第 57 卷 第 1 期 2008 年 1 月
1000-3290/2008/57(01)/0011-07

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57, No.1, January, 2008

(3+1)维 Burgers 系统的新精确解及其特殊孤子结构*

马松华† 吴小红 方建平 郑春龙

(浙江丽水学院物理系，丽水 323000)

(2007 年 4 月 2 日收到；2007 年 4 月 29 日收到修改稿)

将改进的 Riccati 方程映射法和变量分离法推广到(3+1)维 Burgers 系统，得到了该系统的新显式精确解. 根据得到的孤波解，构造出 Burgers 系统的几种特殊孤子结构，例如柱状孤子、锥状孤子和内嵌孤子等，研究了孤子间的相互作用.

关键词：改进的映射法，(3+1)维 Burgers 系统，孤子结构，相互作用

PACC：0230，0340，0290

1. 引 言

(1+1)维和(2+1)维孤子和孤波解在理论和实验方面都已得到广泛的研究[1—5]，人们在不同的非线性系统中得到了许多局域激发结构，如 dromion 解、dromion lattice 解、lump 解、ring soliton 解、peakon 解、compacton 解、loop 解、instanton 解和 foldon 解等等[6—14]，也总结出许多求解非线性方程的新方法[15—22]. 其中最重要的方法之一就是 Lou 等人提出的多线性分离变量法，它借助于 Bäcklund 变换和变量分离可以得到某个确定的非线性物理系统的解具有如下的通式[23—27]：

$$u = \frac{2(a_2a_1 - a_3a_0)q_yp_x}{(a_0 + a_1p + a_2q + a_3pq)^2},$$

其中 $p \equiv p(x,t)$，$q \equiv q(x,t)$ 为两个任意函数. 另外一种有效的方法是 Fang 等人提出的拓展的 Riccati 方程映射法[28]，近几年，该方法已在求解(1+1)维和(2+1)维非线性物理系统中得到了广泛的应用[29—32]. 在此基础上，我们将该方法 作了进一步改进，即在设解中加入根号项，并应用于若干(2+1)维非线性物理模型[33,34]，获得了成功.

2. (3+1)维 Burgers 系统的新精确解

本文的工作是将改进的 Riccati 方程映射法和变量分离法推广到(3+1)维 Burgers 系统

$$u_t - 2uu_y - 2vu_x - 2Qu_z - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = 0,$$
$$u_x - u_y = 0, u_z - Q_y = 0, \tag{1}$$

在求得其精确解的基础上，进一步研究其新的局域激发结构及孤子之间的相互作用. 方程(1)由热传导方程的逆变换得到[35,36]，其中 $u(x,y,z,t)$，$v(x,y,z,t)$，$Q(x,y,z,t)$ 为三个物理场函数. 当 $z=x$，$Q=u$ 时，方程退化为(2+1)维 Burgers 方程；当 $x=y=z$，$Q=u=v$ 时，方程退化为(1+1)维 Burgers 方程. 文献[37]运用拓展的 Riccati 方程映射法求解了(2+1)维 Burgers 方程，得到了它的类孤子解. 文献[25]运用多线性分离变量法得到了(3+1)维 Burgers 系统的多线性分离变量解.

改进的 Riccati 方程映射法的基本思想是对于给定的一个非线性物理模型

$$P(u, u_t, u_{x_i}, u_{x_ix_j}, \cdots) = 0, \tag{2}$$

设它有如下形式的解：

$$u = A(x) + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\phi^i[q(x)]$$

* 浙江省自然科学基金(批准号：Y604106)，浙江丽水学院自然科学基金(批准号：FC06001，QN06009)资助的课题.

† E-mail：msh6209@yahoo.com.cn

$$+C_i(x)\phi^{i-1}[q(x)]\sqrt{\sigma+\phi^2[q(x)]},\tag{3}$$

其中 ϕ 满足

$$\phi'=\sigma+\phi^2,\tag{4}$$

这里 $x=(x_0=t,x_1,x_2,\cdots,x_m)$，$A(x)$，$B_i(x)$，$C_i(x)$和 $q(x)$为待定的 x 的任意函数.将(3)和(4)式代入(2)式就可以得到一组 $A(x)$，$B_i(x)$，$C_i(x)$和 $q(x)$的约束方程.通过约束方程求得变量 $A(x)$，$B_i(x)$，$C_i(x)$和 $q(x)$，再根据 Riccati 方程如下的孤波解、周期波解和变量分离解就可以确定所求方程的解(这里省略了 tanh，tan 函数的解)：

$$\phi=-\sqrt{-\sigma}\coth(\sqrt{-\sigma}q)\quad(\sigma<0),$$
$$\phi=-\sqrt{\sigma}\cot(\sqrt{\sigma}q)\quad(\sigma>0),$$
$$\phi=\frac{-1}{q}\quad(\sigma=0).\tag{5}$$

为了寻找 Burgers 系统的新解，将改进的 Riccati 方程映射法用于(1)式，并根据(3)式，设解为

$$\begin{aligned}u&=f(x,y,z,t)+g(x,y,z,t)\phi[q(x,y,z,t)]\\&\quad+h(x,y,z,t)\sqrt{\sigma+\phi^2[q(x,y,z,t)]},\\v&=F(x,y,z,t)+G(x,y,z,t)\phi[q(x,y,z,t)]\\&\quad+H(x,y,z,t)\sqrt{\sigma+\phi^2[q(x,y,z,t)]},\\Q&=a(x,y,z,t)+b(x,y,z,t)\phi[q(x,y,z,t)]\\&\quad+c(x,y,z,t)\sqrt{\sigma+\phi^2[q(x,y,z,t)]},\end{aligned}\tag{6}$$

这里，f,g,h,F,G,H,a,b,c 和 q 是(x,y,z,t)的任意函数，将(6)式和(4)式代入(1)式，并按 ϕ 的同次幂合并，提取 $\phi^i(i=1,2,\cdots)$前的系数，其中包含 $\sqrt{\sigma+\phi^2}$项，利用计算机的替换功能，用 K 替换所有 $\sqrt{\sigma+\phi^2}$项，然后提取 K，再令 K 前的系数等于零，令不含 K 的系数也等于零，得到一系列方程，由这些方程可求得

$$\begin{aligned}&f=0,g=-\frac{1}{2}q_y,h=\frac{1}{2}q_y,\\&F=-\frac{1}{2}\frac{q_{xx}+q_{yy}+q_{zz}-q_t}{q_x},\\&G=-\frac{1}{2}q_x,H=\frac{1}{2}q_x,a=0,\\&b=-\frac{1}{2}q_z,c=\frac{1}{2}q_z.\end{aligned}\tag{7}$$

从所得到的方程中，发现有如下变量分离形式的特解：

$$q=\chi(x,z,t)+\varphi(y),\varphi(y)=ky,\tag{8}$$

其中 $\chi\equiv\chi(x,z,t)$是关于 x,z,t 的任意函数，k 是任意常数.

情形 1 设 $\sigma=-1$，可以得到 Burgers 系统的孤波解

$$u_1=\frac{1}{2}\varphi_y(\coth(\chi+\varphi)+\mathrm{csch}(\chi+\varphi)),\tag{9}$$

$$\begin{aligned}v_1&=-\frac{1}{2}\frac{-\chi_t+\chi_{xx}+\varphi_{yy}+\chi_{zz}}{\chi_x}\\&\quad+\frac{1}{2}\chi_x(\coth(\chi+\varphi)+\mathrm{csch}(\chi+\varphi)),\end{aligned}\tag{10}$$

$$Q_1=\frac{1}{2}\chi_z(\coth(\chi+\varphi)+\mathrm{csch}(\chi+\varphi)),\tag{11}$$

其中 $\chi(x,z,t)$为所示变量的任意函数，$\varphi(y)=ky$.

情形 2 设 $\sigma=1$，可以得到 Burgers 系统的周期波解

$$u_2=\frac{1}{2}\varphi_y(\cot(\chi+\varphi)+\csc(\chi+\varphi)),\tag{12}$$

$$\begin{aligned}v_2&=-\frac{1}{2}\frac{-\chi_t+\chi_{xx}+\varphi_{yy}+\chi_{zz}}{\chi_x}\\&\quad+\frac{1}{2}\chi_x(\cot(\chi+\varphi)+\csc(\chi+\varphi)),\end{aligned}\tag{13}$$

$$Q_2=\frac{1}{2}\chi_z(\cot(\chi+\varphi)+\csc(\chi+\varphi)),\tag{14}$$

其中 $\chi(x,z,t)$为所示变量的任意函数，$\varphi(y)=ky$.

情形 3 设 $\sigma=0$，可以得到 Burgers 系统的变量分离解

$$u_3=\frac{\varphi_y}{\chi+\varphi},\tag{15}$$

$$v_3=-\frac{1}{2}\frac{-\chi_t+\chi_{xx}+\varphi_{yy}+\chi_{zz}}{\chi_x}+\frac{\chi_x}{\chi+\varphi},\tag{16}$$

$$Q_3=\frac{\chi_z}{\chi+\varphi},\tag{17}$$

其中 $\chi(x,z,t)$为所示变量的任意函数，$\varphi(y)=ky$.

3.(3+1)维 Burgers 系统的特殊孤子结构

由于(9)—(17)式中都包含有任意函数 $\chi(x,z,t)$和 $\varphi(y)=ky$，使得该系统的局域解比(1+1)维和(2+1)维 Burgers 系统的局域解更加丰富.本文以孤波解(9)式为例，讨论系统的若干新颖的局域孤子结构及其相互作用.为清楚和方便起见，令

$$\begin{aligned}U=u_1&=\frac{1}{2}\varphi_y(\coth(\chi+\varphi)\\&\quad+\mathrm{csch}(\chi+\varphi)).\end{aligned}\tag{18}$$

3.1. 内嵌孤子、锥形孤子和柱形孤子

由于(18)式中的 $\chi(x,z,t)$和 $\varphi(y)=ky$ 的任意性，不妨取 $\chi(x,z,t)$和 $\varphi(y)=ky$ 为如下形式：

$$\chi = 1 + \mathrm{sech}(-x^2 - z^2)\sin(x^2 + z^2 - t^2),$$
$$\varphi = ky, \tag{19}$$

于是可以得到一个新颖的孤子结构，根据其形状，我们称之为‘内嵌孤子”,如图 1(a)所示,取 $k=1$,$y=1$,$t=0.6$ 如果取 $\chi(x,z,t)$和 $\varphi(y)=ky$ 为如下形式：

$$\chi = \frac{1}{1 + \exp(-x^2 - z^2)\cos(x^2 + z^2 - t^2)},$$
$$\varphi = ky, \tag{20}$$

则可以得到如图 1(b)所示的内嵌亮暗孤子,取 $k=1$,$y=1$,$t=0$.

此外,如果取 $\chi(x,z,t)$和 $\varphi(y)=ky$ 为

$$\chi = 1 + \frac{1}{\exp(-\sqrt{x^2 + z^2 + t^2})}, \varphi = ky, \tag{21}$$

可得到如图 1(c)所示的锥形孤子结构,取 $k=1$,$y=1$,$t=0$ 如果 $\chi(x,z,t)$和 $\varphi=ky$ 取

$$\chi = \frac{1}{3 - \exp(\tanh(x^2 + z^2 - t^2))},$$
$$\varphi = ky, \tag{22}$$

则可以得到如图 1(d)所示的圆柱形孤子结构,取 $k=1$,$y=0.3$,$t=6$.

3.2. 内嵌孤子的周期性振动

在(19)式中,如果时间分别取(a) $t=1$,(b) $t=1.5$,(c) $t=3$,(d) $t=3.5$,则得到如图 2 所示的内嵌孤子随时间作周期性振动的演化图.从图中看到,开始时孤子的正波幅较大,内嵌得较小,如图 4(a)所示 ;随着时间的增加,孤子的正波幅越来越小,内嵌得越来越多,如图 4(b)所示 ;接着,孤子反方向凸出,起初负波幅较大,如图 4(c)所示 ;然后负波幅渐渐变小,反向越来越内嵌,如图 4(d)4 所示.最后又正向凸出回到(a)的状态,完成一个周期的振动.该孤子按上述规律随时间作周期性的往复振动.

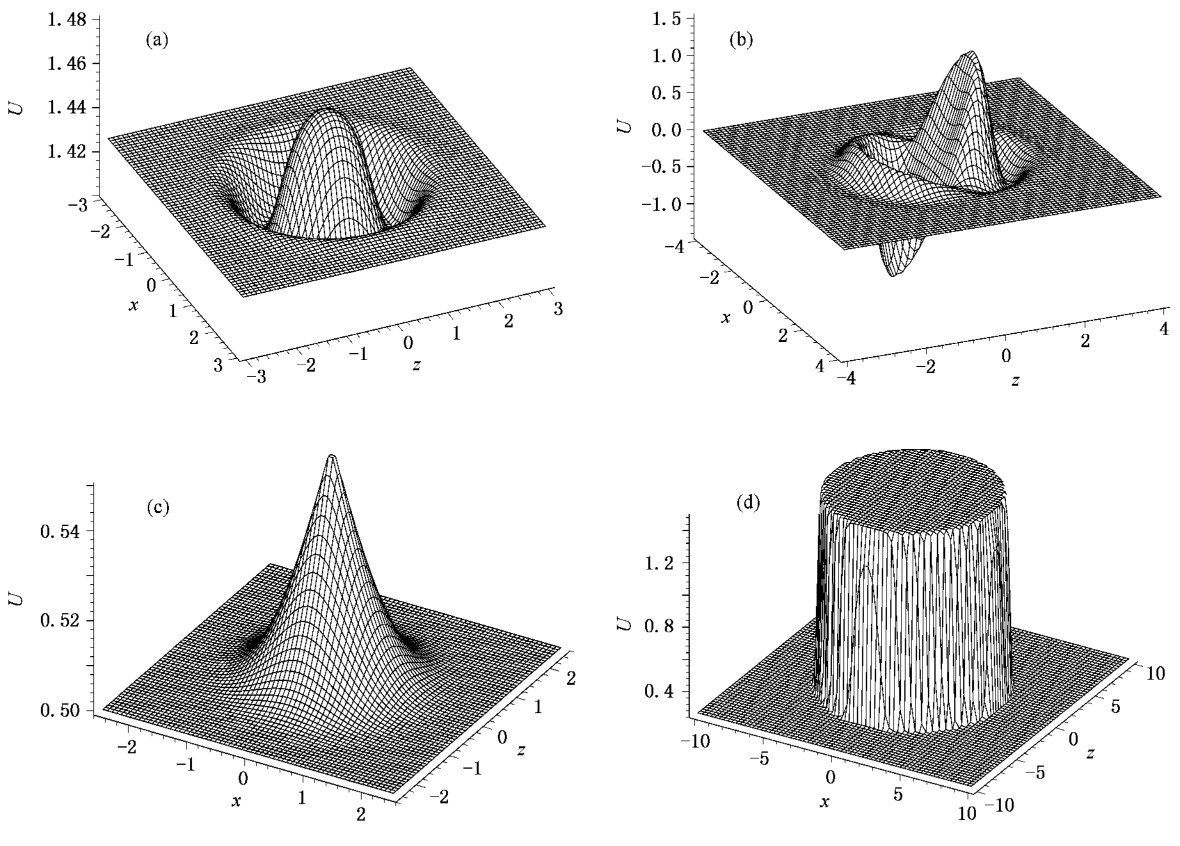

图 1　(a)(18)式利用(19)式得到的内嵌孤子解 ;(b)(18)式利用(20)式得到的内嵌亮暗孤子解 ;(c)(18)式利用(21)式得到的锥形孤子解 ;(d)(18)式利用(22)式得到的圆柱形孤子解

4. 孤子间的相互作用

上面我们通过对 $\chi(x,z,t)$和 $\varphi(y)=ky$ 的不同选取,得到了内嵌孤子、内嵌亮暗孤子、锥形孤子、柱形孤子等局域孤子结构,以下研究这些孤子之间的相互作用.在(18)式中,取 $\chi(x,z,t)$和 $\varphi(y)=ky$ 为如下形式：

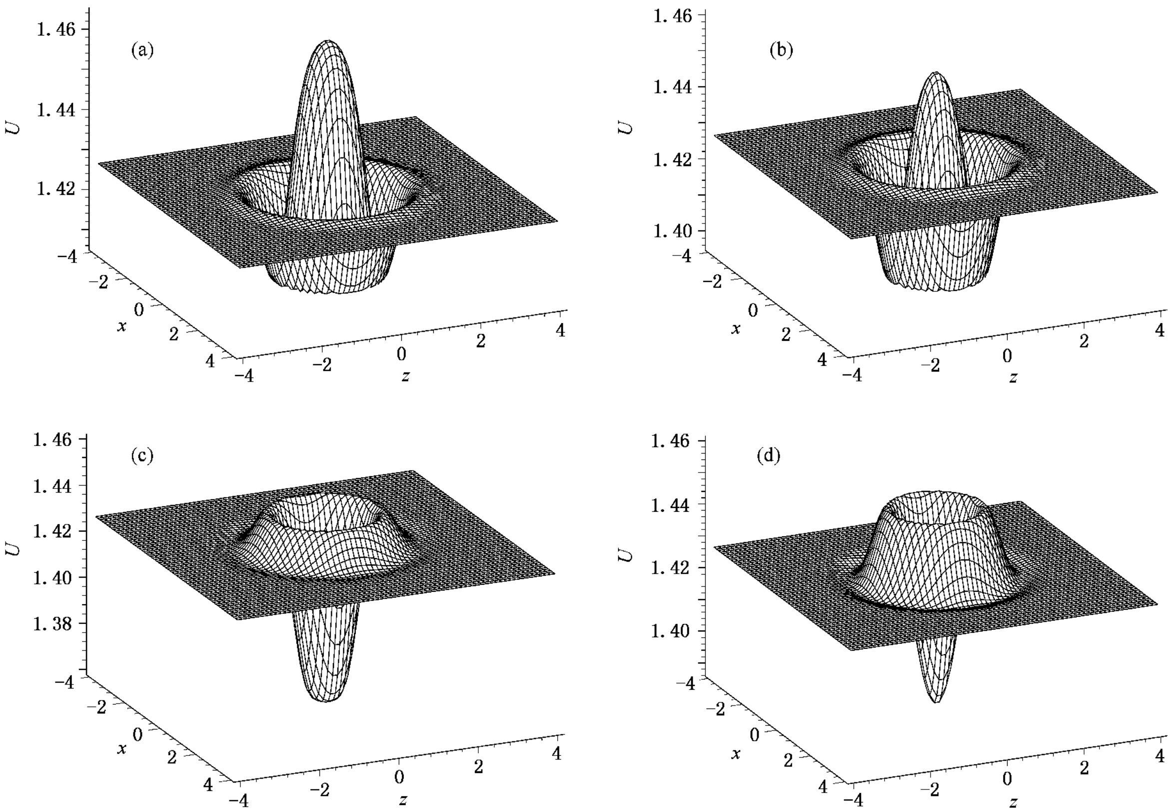

图 2 (18)式利用(19)式得到的内嵌孤子周期性振动时间演化图,时间分别取(a) $t=1$,(b) $t=1.5$,(c) $t=3$,(d) $t=3.5$

$$\chi=\frac{1}{-0.2\tanh((x+t)^2+z^2-4)-0.2\operatorname{sech}((x-t)^2+z^2-4)},\varphi=ky, \tag{23}$$

则得到如图 3 所示的圆柱状孤子和内嵌孤子之间的弹性相互作用时间演化图,取 $k=1$,$y=0.3$,时间分别为(a) $t=-5$,(b) $t=-3$,(c) $t=0$,(d) $t=3$,(e) $t=5$. 从图 3 可以看到,两个孤子发生相互作用后,其形状、波幅和速度都没有发生改变,和作用前完全相同. 即孤子的弹性作用具有“各自分开,互不改变”的特性.

以上讨论的情况,是两个孤子以相同大小的速度相向运动然后发生作用. 接下来研究有趣的孤子“追赶”现象. 在(18)式中,如果取 $\chi(x,z,t)$ 和 $\varphi(y)=ky$ 为如下形式:

$$\chi=\frac{1}{0.6\exp(-\sqrt{(x-2t)^2+z^2})+0.15\operatorname{sech}((x-0.5t)^2+z^2-4)},\varphi=ky, \tag{24}$$

于是,可以得到如图 4 所示的孤子“追赶”时间演化图,取 $k=1$,$y=0.3$,时间分别为(a) $t=-6$,(b) $t=-4$,(c) $t=0$,(d) $t=4$,(e) $t=6$. 从图中清楚看到,一个锥形孤子和一个内嵌孤子以不同的速度朝着同一个方向运动,由于锥形孤子的运动速度大于内嵌孤子的运动速度(通过仔细计算,锥形孤子的速度是内嵌孤子的四倍),所以两个孤子的距离变得越来越近,经过一定时间后锥形孤子赶上内嵌孤子发生碰撞. 碰撞脱开后还是“各自分开,互不改变”,即它们都保持原有的形状和速度继续前进. 因为锥形孤子的速度始终大于内嵌孤子的速度,所以它们之间的距离变得越来越远.

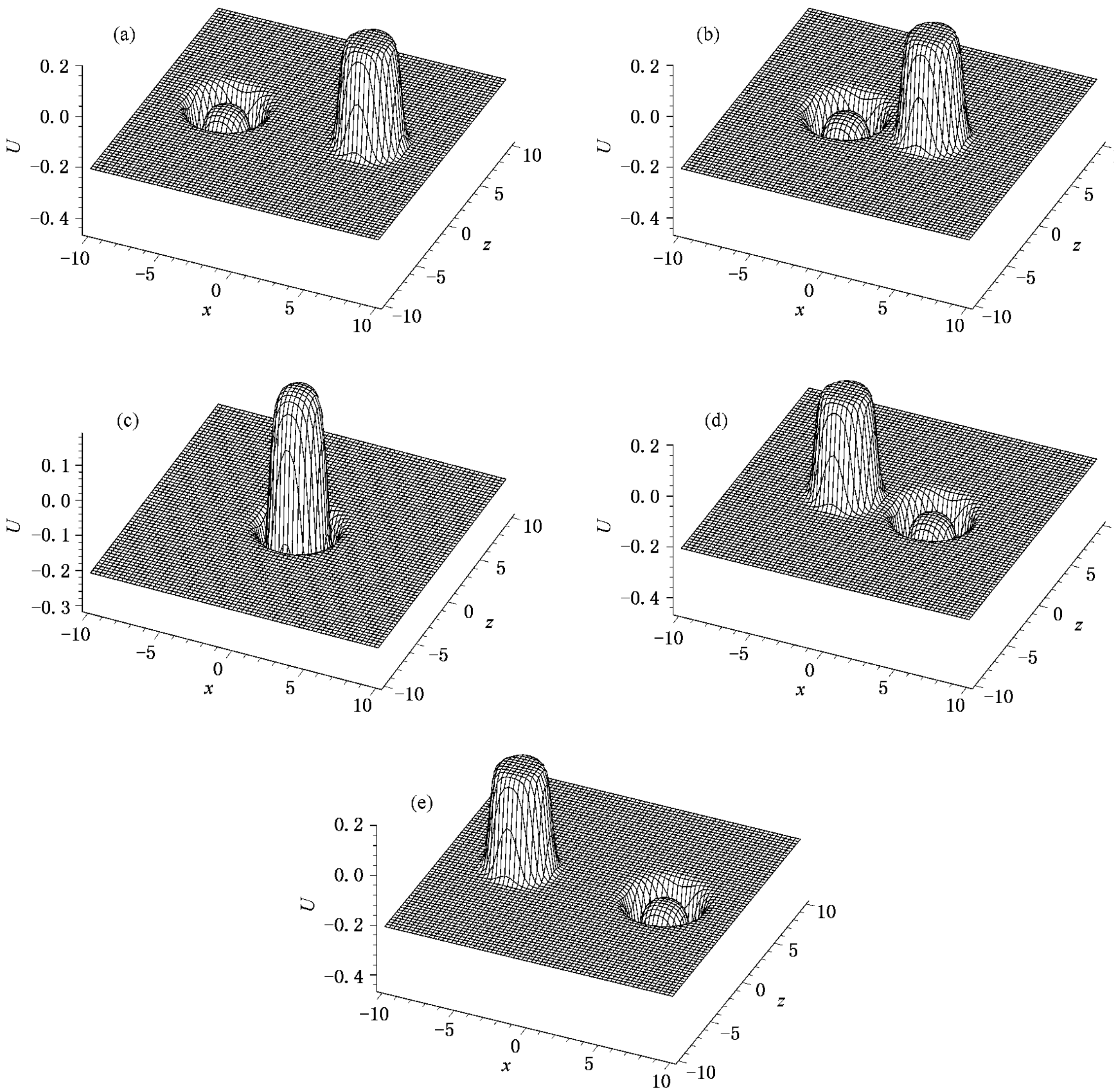

图 3　(18)式利用(23)式得到的圆柱状孤子和内嵌孤子之间的弹性相互作用时间演化图，取 $k = 1$，$y = 0.3$，时间分别为(a)$t = -5$，(b)$t = -3$，(c)$t = 0$，(d)$t = 3$，(e)$t = 5$

5. 结　　论

本文将改进的 Riccati 方程映射法和变量分离法推广到(3 + 1)维 Burgers 系统，得到了该系统新的精确解，包括孤波解、周期波解和变量分离解. 根据孤波解(9)式，得到了该系统几种新颖的局域孤子结构，如内嵌孤子、内嵌亮暗孤子、锥形孤子和圆柱形孤子等，研究了内嵌孤子的周期性振动. 我们知道，孤子弹性作用具有‘各自分开，互不改变’的特性，即两个孤子作用前后，其形状、波幅和速度都不会发生改变. 本文通过研究不同孤子之间的相互作用，进一步验证了孤子的这一特性(如图 3、图 4 所示). 以往所研究的孤子之间的相互作用大多是两个孤子以相同大小的速度相向运动，然后发生相互作用. 有关孤子的‘追赶’现象报道得很少. 本文研究了 Burgers 系统中锥形孤子‘追赶’内嵌孤子的有趣现象(如图 4 所示)，即两个孤子以不同大小的速度同向运动，锥形孤子赶上内嵌孤子，然后发生相互作用. 由于作用后两个孤子仍保持各自的速度前进，所以锥形孤子超过了内嵌孤子，而且距离越拉越大.

改进的映射法对(3 + 1)维非线性系统的精确解研究在这里得到了应用，该方法对其他(3 + 1)维非线性物理模型的应用值得推广.

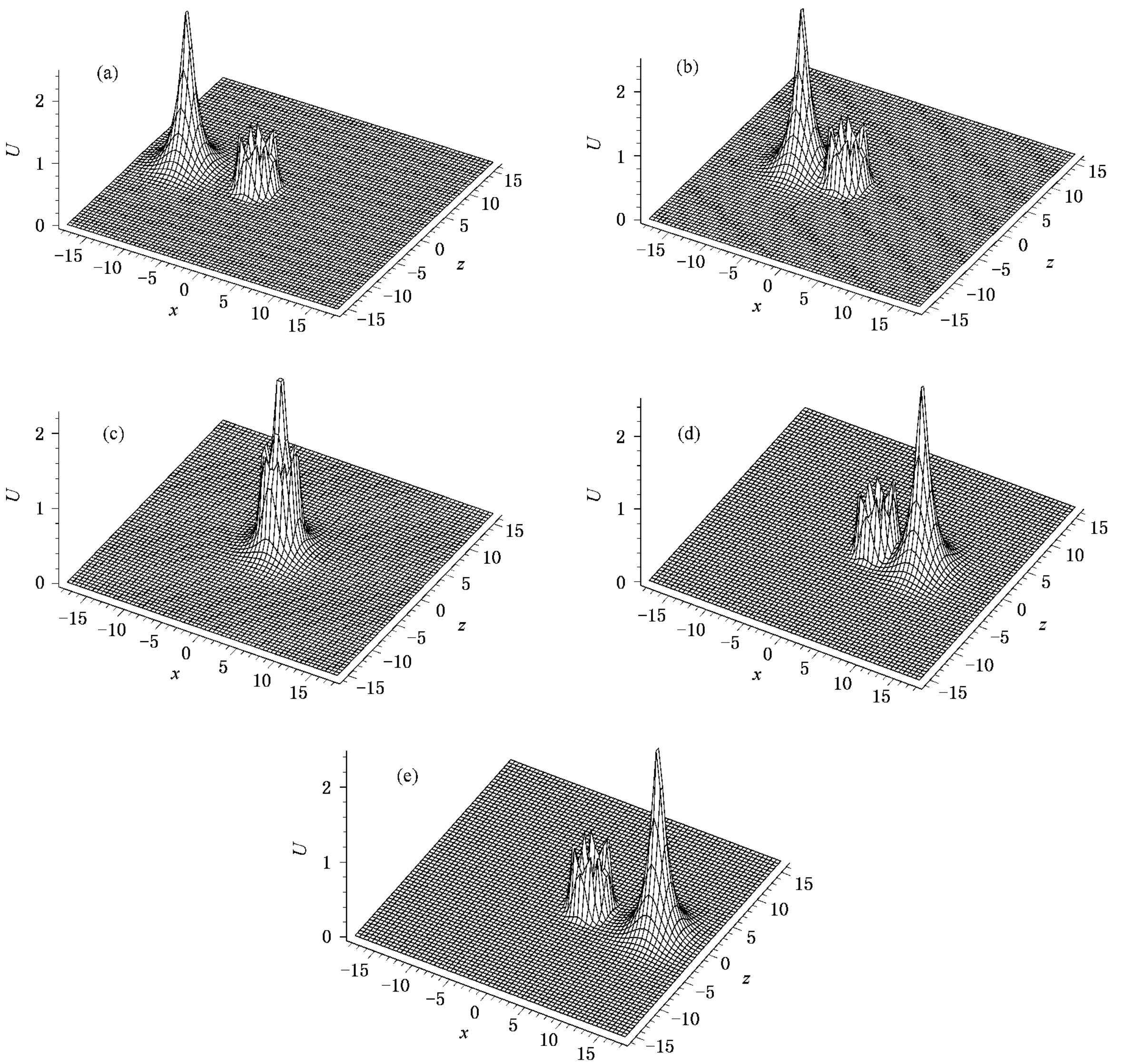

图4 (18)式利用(24)式得到的锥形孤子和内嵌孤子的‘追赶’时间演化图,取 $k=1$, $y=0.3$,时间分别为(a) $t=-6$,(b) $t=-4$,(c) $t=0$,(d) $t=4$,(e) $t=6$

[1] Lou S Y 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5027

[2] Lou S Y 1999 *Science in China* **42** 537

[3] Tang X Y, Lou S Y, Zhang Y 2002 *Phys. Rev.* E **66** 46601

[4] Zhang J F, Huang W H, Zheng C L 2002 *Acta. Phys. Sin.* **51** 2676 (in Chinese) [张解放、黄文华、郑春龙 2002 物理学报 **51** 2676]

[5] Camassa R, Holm D D 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 1661

[6] Zheng C L, Zhu J M, Zhang J F 2003 *Commun. Theor. Phys.* **39** 261

[7] Zheng C L, Zhang J F 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 1399

[8] Zheng C L 2003 *Commun. Theor. Phys.* **40** 25

[9] Zhang J F, Zheng C L, Fang J P 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 448

[10] Zhu J M, Ma Z Y, Zheng C L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3248 (in Chinese) [朱加民、马正义、郑春龙 2004 物理学报 **53** 3248]

[11] Tang X Y, Chen C L, Lou S Y 2002 *J. Phys. A: Math. Gen.* **43** 4078

[12] Hietarinta J 1990 *Phys. Lett.* A **149** 113

[13] Zheng C L, Zhang J F 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2426 (in Chinese) [郑春龙、张解放 2002 物理学报 **51** 2426]

[14] Zheng C L, Fang J P, Chen L Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1468 (in Chinese) [郑春龙、方建平、陈立群 2005 物理学报 **54** 1468]

[15] Radha R, Lakshmanan M 1991 *Phys. Lett.* A **197** 7

[16] Lou S Y 1995 *J. Phys. Math. Gen* A **28** 7227

[17] Ruan H Y, Lou S Y 1997 *J. Math. Phys.* **38** 3123

[18] Ma Z Y, Zhu J M, Zheng C L 2004 *Chin. Phys.* **13** 1382

[19] Zhang J F, Meng J P 2004 *Commun. Theor. Phys.* **41** 655

[20] Lou S Y 1996 *Commun. Theor.* **26** 487

[21] Lou S Y, Tang X Y, Li J 2001 *Eue. Phys. J. B* **22** 473

[22] Lai D W C, Chow K W 1999 *J. Phys. Soc. Jpn.* **65** 1847

[23] Lou S Y 2000 *Phys. Lett.* A **277** 94

[24] Tang X Y, Liang Z F 2006 *Phys. Lett.* A **351** 398

[25] Ying J P, Lou S Y 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 1448

[26] Lü Z S, Zhang H Q 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **19** 527

[27] Zhang J F, Meng J P 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 1006

[28] Fang J P, Zheng C L, Zhu J M 2005 *Commun. Theor. Phys.* **44** 203

[29] Fang J P, Zheng C L 2005 *Chin. Phys.* **14** 670

[30] Fang J P, Zheng C L, Zhu J M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2990 (in Chinese) [方建平、郑春龙、朱加民 2005 物理学报 **54** 2990]

[31] Huang L, Sun J A, Dou F Q, Duan W S, Liu X X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 611 (in Chinese) [黄　磊、孙建安、豆福全、段文山、刘兴霞 2007 物理学报 **56** 611]

[32] Ma S H, Fang J P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5611 (in Chinese) [马松华、方建平 2006 物理学报 **55** 5611]

[33] Ma S H, Wu X H, Fang J P, Zheng C L 2006 *Z. Naturforsch.* **61**a 249

[34] Ma S H, Qiang J Y, Fang J P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 620 (in Chinese) [马松华、强继业、方建平 2007 物理学报 **56** 620]

[35] Lou S Y, Yu J, Tang X Y 2000 *Z. Naturforsch.* **55**a 867

[36] Dai C Q, Yan C J, Zhang J F 2006 *Commun. Theor. Phys.* **46** 389

[37] Kong F L, Chen S D 2006 *Chaos, Solitons and Fractals* **27** 495

New exact solutions and special soliton structures for the (3 + 1)-dimensional Burgers system*

Ma Song-Hua† Wu Xiao-Hong Fang Jian-Ping Zheng Chun-Long

(*Department of Physics, Zhejiang Lishui University, Lishui* 323000, *China*)

(Received 2 April 2007; revised manuscript received 29 April 2007)

Abstract

Applying the improved mapping approach and variable separation method to the (3 + 1)-dimensional Burgers system, the new exact solutions of the system is derived. Based on the derived solitary wave solution, we obtained some special soliton structures, such as cylinder-like soliton, tapered soliton and embeded-solitons, and the interactions between the solitons are discuessed.

Keywords: improved mapping approach, (3 + 1)-dimensional Burgers system, soliton structures, interactions between the solitons

PACC: 0230, 0340, 0290

* Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. Y604106), and the Natural Science Foundation of Zhejiang Lishui University (Grant Nos. FC06001 and QN06009).

† E-mail: msh6209@yahoo.com.cn