

复杂 Dynamos 混沌系统的追踪控制与同步^{*}

闵富红^{1,2,†} 王执铨¹⁾

¹⁾ 南京理工大学自动化系, 南京 210094)

²⁾ 南京师范大学电气与自动化工程学院, 南京 210042)

(2007 年 4 月 2 日收到, 2007 年 4 月 28 日收到修改稿)

基于系统稳定性理论, 设计合适的新型非线性反馈控制器, 实现复杂 Dynamos 混沌系统的状态向量与任意给定的不同参考信号追踪广义投影同步. 以追踪控制超混沌系统、混沌系统、正弦余弦信号以及不动点为例, 通过改变比例因子, 可以获得多个不同混沌系统之间的异结构广义投影同步以及与正弦波形的广义同步, 或者将复杂 Dynamos 混沌系统控制到期望的平衡点. 数值仿真进一步表明了该方法的有效性.

关键词: 复杂 Dynamos 混沌系统, 追踪控制, 广义投影同步, 平衡点

PACC: 0545

1. 引言

近年来, 混沌研究是非线性科学领域的热点问题之一, 混沌控制与同步由于在保密通讯、信号处理和生命科学等方面有着十分广泛的应用前景, 已经引起广泛关注^[1-14]. 在混沌控制研究中, 追踪控制同步即通过施加控制使受控系统的输出信号达到任意给定的参考信号, 这方面的工作已经有了许多的研究^[6-9]. 文献 6 对 Rössler 混沌系统进行目标单一变量的跟踪研究; 文献 9 基于 Lyapunov 方法, 设计合适的控制器, 有效地实现了任意两个混沌系统之间的异结构同步, 以上方法有一定的局限, 不能实现与参考信号大小成任意比例的追踪控制同步, 也不能实现多个混沌系统的异结构同步等. 对于近来出现的广义投影同步^[10-12], 由于其在混沌系统进行数字通信保密方面有广泛应用, 值得深入研究. 文献 10 中, 利用了单向线性耦合方法实现两个相同的统一混沌系统广义投影同步, 文献 11, 12 分别利用主动控制方法和驱动响应方法实现了 Lorenz 和 Chen 等混沌系统的广义投影同步. 这些广义投影同步都是只针对受控系统与被控系统为精确模型.

可见, 对于混沌系统含有广义投影同步的追踪控制未见有报道. 鉴于此, 本文针对新型的复杂

Dynamos 连续混沌系统, 基于系统稳定性理论, 设计合适的具有统一形式的非线性反馈控制器, 使得该系统的状态向量能够与任意给定的参考信号同相位或者反相位追踪广义投影同步, 或者将其控制到期望的周期轨道与平衡点.

2. 系统模型与问题的描述

最近, Mahmoud 提出了一个非常复杂的含有复数向量的 Dynamos 混沌系统^[13], 该系统在电磁场方面有潜在的非常广泛应用. 其动力学系统方程为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\mu x + y(z + \alpha), \\ \dot{y} &= -\mu y + x(z - \alpha), \\ \dot{z} &= 1 - (1/2)(\bar{x}y + x\bar{y}),\end{aligned}\quad (1)$$

其中, $x = u_1 + iu_2$, $y = u_3 + iu_4$, 分别为复数, $i^2 = -1$, $\bar{x}$, $\bar{y}$ 分别为向量 x , y 的共轭复数. μ 和 α 正参数. 系统 (1) 可以改写成如下五维实微分方程组的形式:

$$\begin{aligned}\dot{u}_1 &= -\mu u_1 + u_3(u_5 + \alpha), \\ \dot{u}_2 &= -\mu u_2 + u_4(u_5 + \alpha), \\ \dot{u}_3 &= -\mu u_3 + u_1(u_5 - \alpha), \\ \dot{u}_4 &= -\mu u_4 + u_2(u_5 - \alpha), \\ \dot{u}_5 &= 1 - (u_1 u_3 + u_2 u_4),\end{aligned}\quad (2)$$

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 60174005, 60774060), 江苏省自然科学基金(批准号: BK2001054)资助的课题.

[†] E-mail: minfuhong@njnu.edu.cn

当参数 $\mu = 0.8, \alpha = 1.8$ 时, 该五维系统的混沌吸引子如图 1(a) 和 (b) 所示.

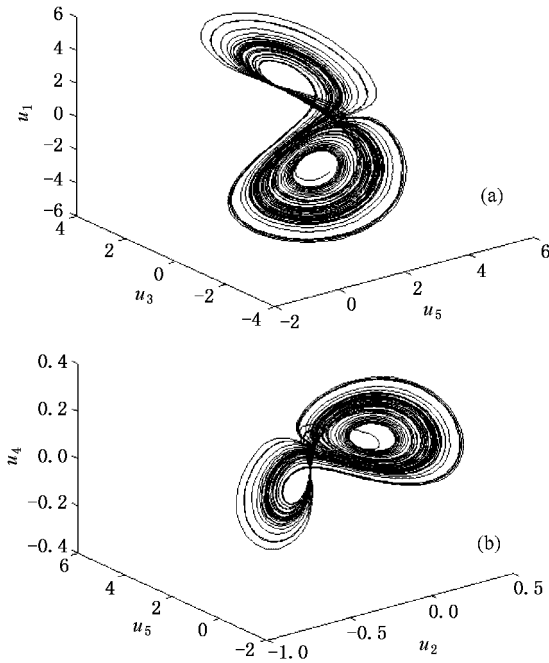


图 1 复杂的 Dynamos 系统混沌吸引子 (a) 在三维空间 (u_1, u_3, u_5) 的混沌吸引子 (b) 在三维空间 (u_2, u_4, u_5) 的混沌吸引子

本文目的是对任意给定的参考信号

$$r(t) = [r_1, r_2, r_3, r_4, r_5]^T,$$

设计统一形式的控制器 $\beta = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5]^T$, 使得受控系统 (2) 式中的状态向量与任意给定的参考信号广义投影同步, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u_i - k_i r_i\| = 0$, 其中 k_i 是不能为零的常数比例因子, 且 $i = 1, \dots, 5$. 当 $k_i > 0$ 时, 是同相位的追踪广义投影同步; 当 $k_i < 0$ 时, 是反相位的追踪广义投影同步. 当 $|k_i| > 1$ 时, 是追踪的参考信号幅值放大的投影同步; 当 $|k_i| < 1$ 时, 是追踪的参考信号幅值缩小的投影同步.

在系统 (2) 中加入控制器, 得到如下方程:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -\mu u_1 + u_3(u_5 + \alpha) + \beta_1, \\ \dot{u}_2 &= -\mu u_2 + u_4(u_5 + \alpha) + \beta_2, \\ \dot{u}_3 &= -\mu u_3 + u_1(u_5 - \alpha) + \beta_3, \\ \dot{u}_4 &= -\mu u_4 + u_2(u_5 - \alpha) + \beta_4, \\ \dot{u}_5 &= 1 - (u_1 u_3 + u_2 u_4) + \beta_5, \end{aligned} \quad (3)$$

不论追踪信号的形式, 设计如下统一形式的非线性反馈控制器:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= k_1 \dot{r}_1 + \mu k_1 r_1 - u_3(u_5 + \alpha), \\ \beta_2 &= k_2 \dot{r}_2 + \mu k_2 r_2 - u_4(u_5 + \alpha), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_3 &= k_3 \dot{r}_3 + \mu k_3 r_3 - k_1 r_1(u_5 - \alpha), \\ \beta_4 &= k_4 \dot{r}_4 + \mu k_4 r_4 - k_2 r_2(u_5 - \alpha), \\ \beta_5 &= k_5 \dot{r}_5 - 1 - u_5 + k_5 r_5 \\ &\quad + k_1 r_1 u_3 + k_2 r_2 u_4, \end{aligned} \quad (4)$$

设追踪误差为

$$\begin{aligned} e(t) &= [u_1 - k_1 r_1, u_2 - k_2 r_2, u_3 - k_3 r_3, \\ &\quad u_4 - k_4 r_4, u_5 - k_5 r_5]^T \\ &= [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5]^T, \end{aligned} \quad (5)$$

将 (4) 式代入 (3) 式, 得到同步误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -\mu e_1, \\ \dot{e}_2 &= -\mu e_2, \\ \dot{e}_3 &= -\mu e_3 + e_1(u_5 - \alpha), \\ \dot{e}_4 &= -\mu e_4 + e_2(u_5 - \alpha), \\ \dot{e}_5 &= -e_5 - e_1 u_3 - e_2 u_4, \end{aligned} \quad (6)$$

可见, 误差变量的零点是误差系统的平衡点, 根据非线性系统的线性化稳定定理^[3], 误差系统 (6) 的线性矩阵

$$A(t) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ u_5 - \alpha & 0 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & u_5 - \alpha & 0 & -\mu & 0 \\ -u_3 & -u_4 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

为时变矩阵, 由于受控系统 (2) 处于混沌状态, 系统变量在一定的吸引领域内变化, 因此 $A(t)$ 对所有 t 有界. 矩阵 $A(t)$ 特征值为 $\lambda_{1,2,3,4} = -\mu, \lambda_5 = -1$, 可见所有的特征值都为负实数, 因此线性时变系统 (6) 的零解一致渐近稳定.

这里的参考信号应为可微的, 而且有界的, 混沌信号、超混沌信号以及三角信号等都可以. 选定的参考信号既可以同时为某个混沌系统的所有状态向量, 也可以为几个不同混沌系统的任意个数的状态向量, 因而这里使用的方法, 可以实现复杂 Dynamos 混沌系统的自同步, 多个混沌系统的异结构广义投影同步, 与非混沌信号的广义追踪投影同步以及控制等.

3. 实例仿真

下面将利用几种典型的信号, 即超混沌 Chen 系统、非自治 Duffing 系统、Rössler 混沌系统、正弦余弦信号以及平衡点等, 作为任意参考信号, 实现多个不

同维混沌系统之间、超混沌系统之间状态向量的同相位或者反相位异结构广义投影同步、与正弦信号之间广义追踪同步及混沌控制。

3.1. Dynamos 混沌系统与 Duffing 系统、Rössler 混沌系统三者之间的异结构广义投影同步

这里将 Duffing 系统和 Rössler 混沌系统的所有状态向量同时作为参考信号,系统(3)作为受控系统。

著名的 Duffing 系统为

$$\dot{y}_1 = y_2, \dot{y}_2 = ay_1 + by_1^3 + cy_2 + f\cos(\omega t), \quad (8)$$

式中, $a = 1, b = -1, c = -0.25, f = 0.4, \omega = 1$ 时, Duffing 系统呈现混沌状态。

Rössler 混沌系统为

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -z_2 - z_3, \\ \dot{z}_2 &= z_1 + lz_2, \\ \dot{z}_3 &= m + (z_1 - n)z_3, \end{aligned} \quad (9)$$

当参数 $l = 0.2, m = 0.2, n = 5.7$ 时, Rössler 系统呈现混沌状态。

取参考信号为 $[r_1, r_2, r_3, r_4, r_5] = [y_1, y_2, z_1, z_2, z_3]$ 。

下面使用四阶龙格库塔法进行数值仿真,仿真步长为 0.01。系统的初始值为 $[u_1, u_2, u_3, u_4, u_5] = [1, 1, 1, 1, 1]$ $[y_1, y_2, z_1, z_2, z_3] = [0.3, 0.1, 1.2, 1.3, 0.5]$ 。假设投影同步的比例因子 $[k_1, k_2, k_3, k_4, k_5]$ 分别为 $[1.5, 2, 1.4, 1.8, -2]$, 仿真结果见图 2 和图 3。图 2(a) 中, 受控系统(3)的向量 u_1, u_2 按照比例因子 k_1, k_2 跟踪 Duffing 系统状态向量 y_1, y_2 的二维向量图; 从图 2(b) 和 (c) 中, 可见, 随着时间的变化, 广义投影同步误差 e_1, e_2 快速趋于零。当时间 $t \geq 8$ s 时, 有 $u_1 = 1.5y_1, u_2 = 2y_2$ 。图 2(a) 为受控系统(3)的向量 u_3, u_4 按照比例因子 k_3, k_4 跟踪 Rössler 混沌系统状态向量 z_1, z_2 的二维向量图; 从图 2(b) 和 (c) 中也可以清晰看出广义投影同步误差 e_3, e_4, e_5 随着时间的变化也逐渐趋于零。当时间 $t \geq 10$ s 时, $u_3 = 1.4y_3, u_4 = 1.8y_4, u_5 = -2y_5$ 。可见, 此时很好地同时实现了三个不同混沌吸引子之间的异结构广义投影同步, 这在以往文献中鲜见报道。

3.2. Dynamos 混沌系统与超混沌 Chen 系统异结构广义投影同步

这里将超混沌 Chen 系统全部状态向量作为参

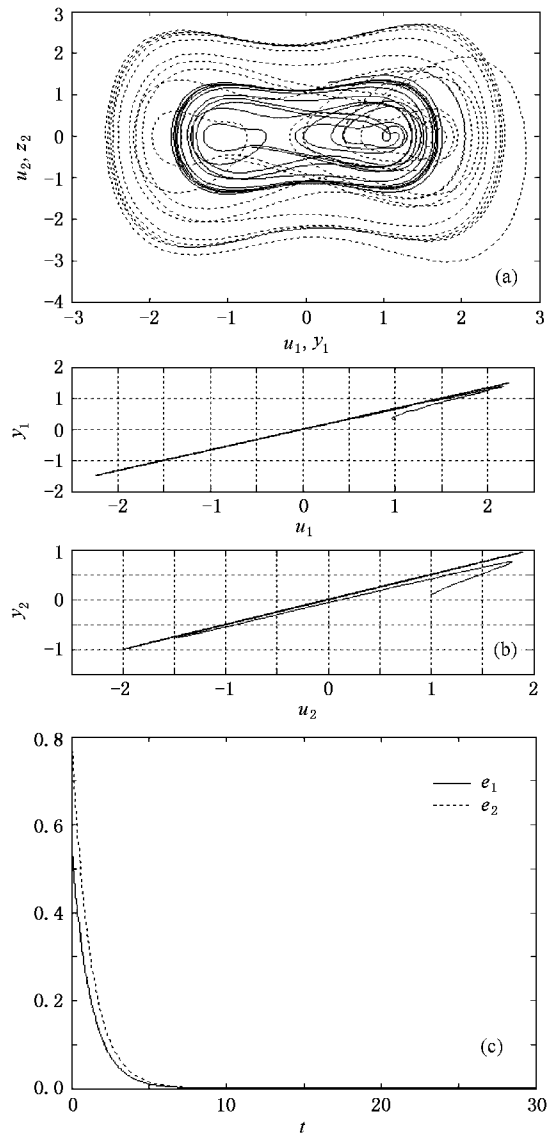


图2 受控系统(3)的向量 u_1, u_2 跟踪 Duffing 系统状态向量 y_1, y_2 的广义投影同步仿真结果 (a) 虚线为 u_1, u_2 二维向量图形, 实线为 Duffing 系统混沌吸引子 (b) 分别为向量 u_1, y_1 与 u_2, y_2 广义同步向量图 (c) 广义投影同步误差曲线 e_1, e_2

考信号, 实现 Dynamos 混沌系统与不同阶的超混沌 Chen 系统异结构广义同步。

超混沌 Chen 系统^[14]为

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= a(w_2 - w_1) + w_4, \\ \dot{w}_2 &= dw_1 + cw_2 - w_1w_3, \\ \dot{w}_3 &= -bw_3 + w_1w_2, \\ \dot{w}_4 &= w_2w_3 + pw_4, \end{aligned} \quad (10)$$

当参数 $a = 35, b = 3, c = 12, d = 7, p = 0.58$ 时, 该系统呈现超混沌状态。

取参考信号为 $[r_1, r_2, r_3, r_4] = [w_1, w_2, w_3, w_4]$ 。

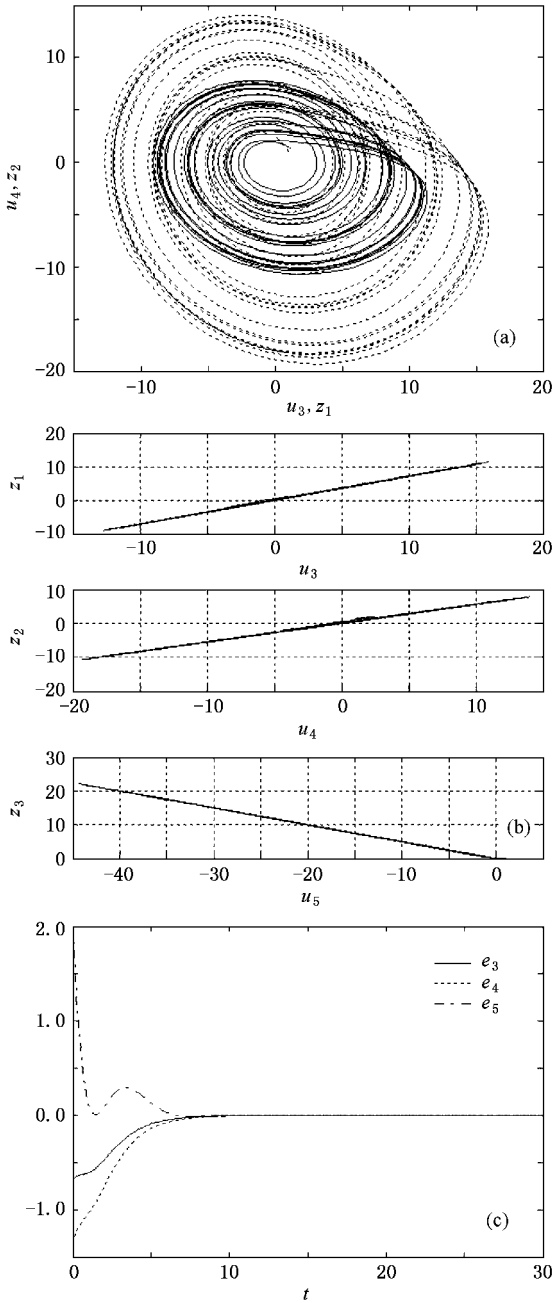


图3 受控系统(3)的向量 u_3, u_4, u_5 跟踪 Rössler 混沌系统向量 z_1, z_2, z_3 的广义投影同步仿真结果 (a)虚线为向量 u_3, u_4 二维图形,实线为 Rössler 系统混沌吸引子 (b)分别为向量 u_3, z_1 、 u_4, z_2 及 u_5, z_3 广义同步向量图 (c)广义投影同步误差曲线 e_3, e_4, e_5

$w_4]$, 同样仿真步长取为 0.01, 进行数值仿真. 初始值为 $[u_1, u_2, u_3, u_4] = [1, 1, 1, 1]$, $[w_1, w_2, w_3, w_4] = [0.3, 0.1, 1.2, 0.5]$. 比例因子 k_1, k_2, k_3, k_4 分别设为 $[-2, 1.5, -1, 0.5]$, 仿真结果见图 4. 从图 4(a) 和 (b) 中可见, 随着时间变化, 广义投影同步误差 e_1, e_2, e_3, e_4 快速趋于零, 当时间 $t \geq 10$ s 时, 有 u_1

$= -2w_1, u_2 = 1.5w_2, u_3 = -w_3, u_4 = 0.5w_4.$

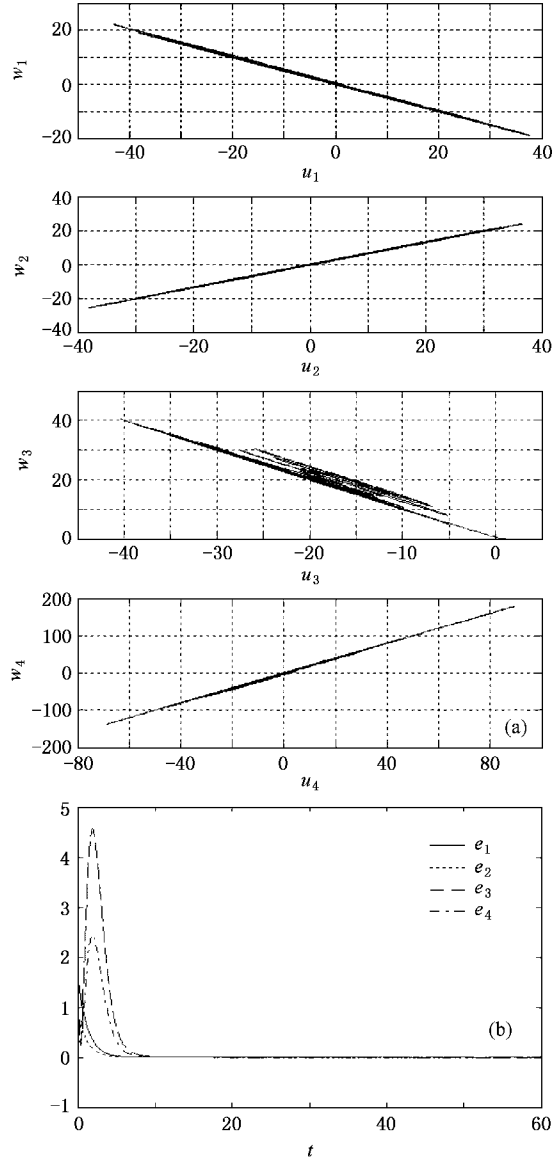


图4 受控系统(3)向量 u_1, u_2, u_3, u_4 与超混沌 Chen 的广义投影同步仿真结果 (a)分别为向量 u_1 与 w_1, u_2 与 w_2, u_3 与 w_3 和 u_4 与 w_4 的对应广义同步结果 (b)广义投影同步误差曲线 e_1, e_2, e_3, e_4

3.3. 控制 Dynamos 混沌系统

这里对 Dynamos 混沌系统实现混沌控制, 将其向量控制到周期轨道或任意期望的平衡点.

参考信号分别为

$r_1 = \cos(2t), r_2 = \sin(2t)$, 以及 $[r_3, r_4, r_5] = [20, 25, 10]$.

使用仿真步长为 0.01 的四阶龙格库塔法进行数值仿真. 初始值为

$[u_1, u_2, u_3, u_4, u_5] = [-2, 0.3, -6, 5, 2]$.
比例因子 $[k_1, k_2, k_3, k_4, k_5]$ 分别为 $[-4, 1.8, -1.5, 0.8, 1.5]$,仿真结果见图 5. 图 5(a)是受控系统(3)的向量 u_1, u_2 跟踪 r_1, r_2 后的二维相平面图,呈现期望的周期轨道.图 5(b)误差曲线 e_1, e_2 随时间

的变化情况.可见,当 $t \geq 9$ s 时,有 $u_1 = -4\cos(2t)$,
 $u_2 = 1.8\sin(2t)$.图 5(c)为误差曲线 e_3, e_4, e_5 变化,随着时间的变化, u_3, u_4, u_5 都收敛到期望的平衡点.当 $t \geq 9$ s 时,有 $u_1 = 1.5r_3 = 30$, $u_2 = -0.8r_4 = -20$, $u_5 = 1.5r_5 = 15$.

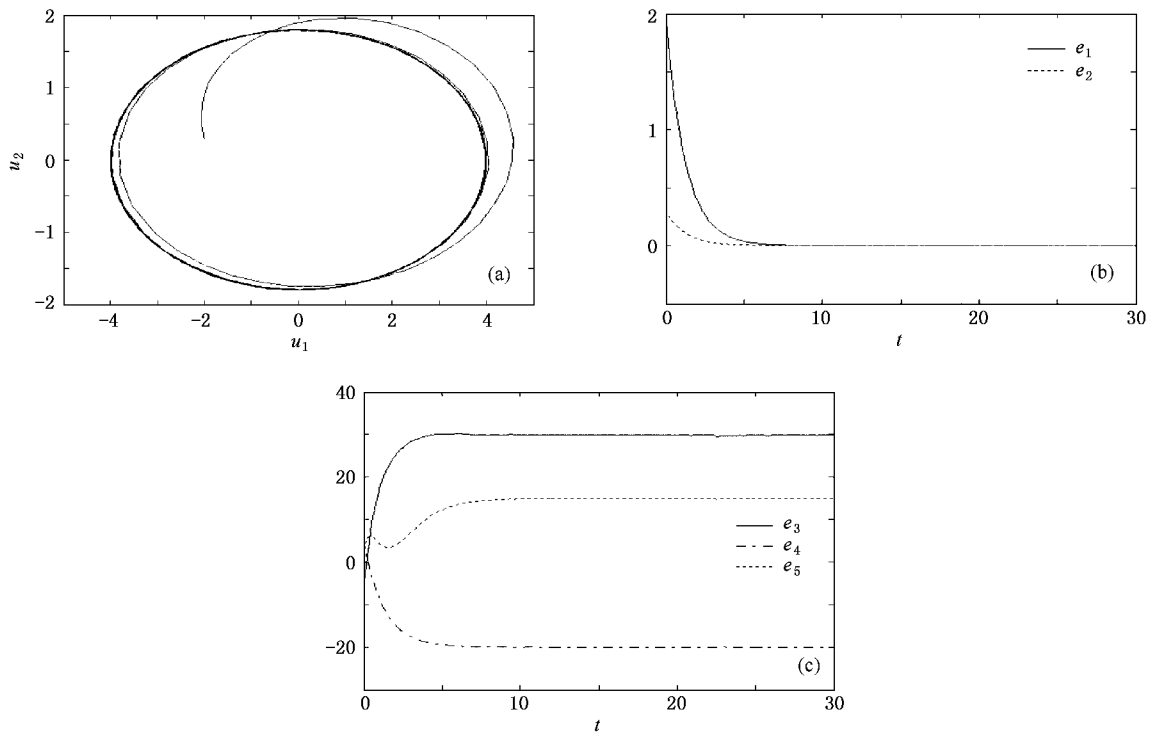


图 5 控制 Dynamos 混沌系统的仿真结果 (a)向量 u_1, u_2 二维相平面图,呈现期望的周期轨道 (b)曲线 e_1, e_2 变化 (c)误差曲线 e_3, e_4, e_5 随着时间的变化情况

4. 结 论

本文提出的新型追踪控制与广义投影同步方案适用范围较广,可以使得复杂的 Dynamos 连续混沌系统的状态向量按照不同的比例与任意的参考信号实现广义的追踪同步与控制.当追踪信号为不同的

混沌信号时,则受控 Dynamos 系统可以变成新的混沌吸引子;当追踪信号为不同的周期信号或者不动点时,则可将混沌 Dynamos 系统控制到周期轨道或期望的平衡点.总之,本文设计的控制器适用范围广,在利用混沌系统进行数字通信保密方面,具有很强的抗破译能力,有广泛的应用前景.

[1] Pecora L M ,Carroll T L 1990 *Phys . Rev . Lett .* **64** 821

[2] Min F H ,Wang Z Q 2005 *Acta Phys . Sin .* **54** 4026 (in Chinese)
[闵富红、王执铨 2005 物理学报 **54** 4026]

[3] Liu Y Z ,Jiang C S ,Lin C S 2007 *Acta Phys . Sin .* **56** 0707 (in Chinese)
[刘扬正、姜长圣、林长圣 2007 物理学报 **56** 0707]

[4] Shan L ,Li J ,Wang Z Q 2006 *Acta Phys . Sin .* **55** 3950 (in Chinese)
[单 梁、李 军、王执铨 2006 物理学报 **55** 3950]

[5] Lü L ,Luan L ,Guo Z A 2007 *Chin . Phys .* **16** 0346

[6] Chen S H ,Xie J ,Lu J A 2002 *Acta Phys . Sin .* **51** 749 (in Chinese)
[陈士华、谢 进、陆君安 2002 物理学报 **51** 749]

[7] Wu W G ,Gu T X 2000 *Acta Phys . Sin .* **49** 1922 (in Chinese)
[伍 维根、古天祥 2000 物理学报 **49** 1922]

[8] Yu D C ,Wu A G ,Wang D Q 2006 *Chin . Phys .* **15** 0306

[9] Li J F ,Lin H ,Li N 2006 *Acta Phys . Sin .* **55** 3992 (in Chinese)
[李建芬、林 辉、李 农 2006 物理学报 **55** 3992]

[10] Yan J P ,Li C P 2005 *Chaos . Solitons Fract .* **26** 1119

[11] Li C P ,Yan J P 2006 *Chaos . Solitons Fract .* **30** 140

[12] Li G H 2006 *Chaos Solitons Fract .* **30** 77

[13] Mahmoud G M ,Shaban A A ,Farghaly A A 2007 *Chaos . Solitons Fract .* **33** 178

[14] Cai G L ,Huang J J 2006 *Acta Phys . Sin .* **55** 3997 (in Chinese)

[蔡国梁、黄娟娟 2006 物理学报 **55** 3997]

Generalized projective synchronization and tracking control of complex Dynamos systems^{*}

Min Fu-Hong^{1,2†} Wang Zhi-Quan¹⁾

¹ *School of Automation ,Nanjing University of Science & Technology ,Nanjing 210094 ,China)*

² *School of Electronic Engineering and Automation ,Nanjing Normal University ,Nanjing 210042 ,China)*

(Received 2 April 2007 ; revised manuscript received 28 April 2007)

Abstract

Based on the system stability theory ,a new tracking control method is proposed to acquire asymptotically generalized projective synchronization of full states of a complex dynamo system and arbitrary trajectories. It also allows us to drive a complex dynamo system to arbitrary periodic orbits or fixed point. The technique can direct the scaling factor to a desired value. Sinusoidal waves ,chaotic systems ,hyper-chaotic systems and fixed points are taken as examples respectively. Numerical simulation results are presented to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords : complex dynamo chaotic system , tracking control , generalized projective synchronization , fixed points

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60174005 and 60774060) and the Natural Science Foundation of Jiangsu Province ,China (Grant No. BK2001054).

[†] E-mail :minfuhong@njnu.edu.cn