

# 不确定非线性系统混沌反控制\*

李文林<sup>1)</sup> 宋运忠<sup>2)†</sup>

1) 河南师范大学数学与信息学院, 新乡 453007)

2) 河南理工大学电气工程与自动化学院复杂网络研究室, 焦作 454000)

(2007 年 3 月 8 日收到, 2007 年 4 月 18 日收到修改稿)

基于滑模变结构控制, 研究了不确定非线性系统模型到达混沌反控制, 保证经有限时间, 使受控不确定非线性系统达到与混沌参考系统数学模型完全一致, 并就到达的快速性、鲁棒性进行了讨论, 最后以 Lorenz 混沌系统为混沌参考模型的情况进行了仿真, 仿真结果表明所给方法是有效的.

关键词: 混沌系统, Lorenz 系统, 变结构控制, 滑动流形

PACC: 0545, 0547

## 1. 引 言

近年来的大量研究工作表明, 混沌与工程技术联系越来越密切. 它在生物工程、化学工程、力学工程、电子工程、信息工程、计算机工程、应用数学和实验物理等领域都存在广泛的应用前景. 如混沌的遍历性可用于图像处理, 混沌的随机性可用于液体的充分混合、保密通信<sup>[1]</sup>等. 由于人的大脑确实存在混沌, 人们还可以应用混沌研究人的大脑<sup>[2]</sup>. 混沌也曾被用来研究人的心脏<sup>[3]</sup>. 因此, 在一些混沌显得非常重要而且有用的领域, 有目的的产生或强化混沌现象已经成为一个关键性的课题. 对任意给定的一个有限维的系统或过程, 它可以是线性的或非线性的、时变的或时不变的、混沌的或非混沌的, 所关心的问题是能否设计一个可行的控制器, 使受控的系统产生混沌现象, 这就是混沌的反控制<sup>[4]</sup>. 混沌反控制解决了混沌源的实现问题. 当有界动力学系统的李雅普诺夫指数至少有一个为正时, 那么就认为该系统是混沌的. 因此, 通过改变受控系统的李雅普诺夫指数的符号, 便可改变系统的运动状态, 实现系统的混沌反控制. Chen 等人<sup>[5]</sup>讨论了将离散非线性系统的李雅普诺夫指数配置为大于零而使系统混沌化的方法. 但对一个实际的系统, 李雅普诺夫指数的计算非

常困难, 当考虑到外界干扰和系统的结构参数不完全清楚时, 系统的李雅普诺夫指数的求取甚至是不可能的, 这就限制了将离散非线性系统的李雅普诺夫指数配置为大于零而使系统混沌化方法的有效应用范围. Wang 等人<sup>[6]</sup>指出通过任意小的反馈控制可以完成一个稳定线性时不变系统的混沌反控制. 关新平等人<sup>[7]</sup>讨论了参数精确已知的稳定连续时间线性系统的混沌反控制问题. Wang 等人<sup>[8]</sup>也讨论了通过时滞反馈实现连续时间系统的混沌反控制. Omer<sup>[9]</sup>讨论了可控动力学系统基于可控规范型和观测器同步化的连续时间系统混沌的反控制问题. Starkov<sup>[10]</sup>讨论了多项式连续时间系统混沌反控制问题. 宋运忠等人<sup>[11, 12]</sup>讨论了基于微分跟随器和逆系统方法不确定连续系统的混沌反控制方法, 但所研究的对象是一种特殊的仿射非线性形式, 且所构造的控制器是单输入形式. 当受控非线性系统的特性不是精确已知且为比较一般的形式时, 如何实现它的混沌反控制尚未得到很好地解决. Li 等对多卷波混沌系统产生的理论、方法和应用进行了详细地综述, 运用切换分段线性控制方式得到了多吸引盆共存混沌系统; 在 Lorenz 系统和陈系统的基础上发现了混沌吕系统, 发现并命名了统一混沌系统<sup>[13-16]</sup>.

本文将针对不确定非线性系统, 从模型到达的角度研究它的混沌反控制问题, 它与通常的模型参

\* 国家自然科学基金(批准号 60643003, 60374013), 河南省自然科学基金(批准号 06151200), 河南省基础与前沿技术研究中心项目(批准号 072300460050), 河南理工大学博士基金(批准号 648606), 河南理工大学骨干教师计划(批准号 200611)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: songhpu@126.com

考控制不同的是它要求经有限时间使受控系统的数学模型与混沌参考模型达到完全一致,而模型参考控制只要求状态误差渐近趋于零而不要求模型完全一致.本文将利用滑模变结构思想设计控制器,使受控系统经有限时间,与混沌参考系统达到完全一致.

## 2. 问题的陈述

考虑不确定非线性系统

$$\dot{x} = f(x, t, p) + Bu, \quad (1)$$

其中  $x \in R^n$ ,  $p \in R^l$  是参数,  $f \in R^n$  可以已知也可以未知,  $B \in R^m$  为列满秩常阵.

设混沌参考系统为

$$\dot{x}_r = \bar{f}(x_r, t), x_r \in R^n. \quad (2)$$

本文的目的是,设计控制律  $u = u(x, t)$ ,使受控的不确定非线性系统系统(1)经有限长时间  $T$  达到与混沌参考系统(2)数学模型完全一致,即  $f(x, t, p) + Bu(x, t) = \bar{f}(x_r, t), t \geq T$ .这与通常的混沌同步和模型跟踪控制有所不同,通常的混沌同步和模型跟踪控制只要求状态误差渐近趋于零,即要求  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ ,而不要求有限时间,也不要求模型完全一致.

对于受控系统(1),我们虽然不要求  $f(x, t, p)$  或  $\Delta f$  已知,但满足下面一些假设.

假设1 存在非负函数  $\gamma(x): \|\Delta f\| \leq \gamma(x)$ .

假设2  $\Delta f \in \text{Im}(B)$ ,  $\Delta f = f - \bar{f}$ ,即存在  $\tilde{f}: \Delta f = B\tilde{f}$  (但这不等于  $\tilde{f}$  已知!),比如,

$$f = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \end{pmatrix} (\omega \text{ 未知}), B = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix},$$

$$f = Bb^{-1}f = B\tilde{f}.$$

## 3. 滑动流形的构造

对于  $\Delta f$  已知的情况,模型到达问题是很容易解决的.这是因为  $B$  列满秩,不难找到可逆阵  $T$ ,使得

$$TB = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{B}_2 \end{pmatrix},$$

其中  $\bar{B}_2 = T_2 B$  为可逆阵.借助可逆阵  $T_2 B$ ,就可以设计出需要的控制律来.

定理1 对于  $\Delta f$  已知的情况,取控制律

$$u = -(T_2 B)^{-1} T_2 \Delta f, \quad (3)$$

则系统(1)的闭环系统就是混沌参考系统.

证明 因为  $T_2 B$  是可逆矩阵,由假设2,存在  $\tilde{f}: \Delta f = B\tilde{f}$ ,从而

$$u = (T_2 B)^{-1} T_2 \Delta f = (T_2 B)^{-1} T_2 B\tilde{f} = \tilde{f},$$

$$Bu = B\tilde{f} = \Delta f. \quad (4)$$

将(4)式代入(1)式得

$$\dot{x} = \bar{f}(x, t) + \Delta f - \Delta f = \bar{f}(x, t),$$

即系统(1)的闭环系统就是混沌参考系统.

下面考虑  $\Delta f$  未知的情况.

这种情况下,由于受控系统  $f$  未知,可用信息较少,很自然的一个想法就是建立动态补偿器

$$\dot{z} = h(x, z), \quad (5)$$

$h(x, z) \in R^m$  为待定向量函数.动态补偿器(5)的建立使可用信息从原来的  $n$  维系统(1)变为下面的  $(n+m)$  维的增广系统:

$$\dot{x} = f(x, t, p) + Bu,$$

$$\dot{z} = h(x, z). \quad (6)$$

考虑到  $f$  或  $\Delta f$  未知,通常的反馈要达到模型精确到达是非常困难的,我们采用滑模变结构控制来解决这个问题.

定理2 取切换函数

$$s = Cx + Dz, \quad (7)$$

$h(x, z) = -D^{-1} C\bar{f}(x_r, t)$ ,其中  $C \in R^{m \times n}$  是任意使得  $CB$  非奇异的常阵,  $D$  是任意可逆矩阵.则在滑动流形  $S_0 = \{(x, z) | s(x, z) = 0\}$  上,受控系统与混沌参考系统模型完全一致.

证明 对(7)式沿增广系统(6)求导

$$\dot{s} = C\dot{x} + D\dot{z} = C[f(x, p, t) + CBu + Dh(x, z)].$$

令  $s \equiv 0$ ,可解得等价控制

$$u_{\text{eq}} = -(CB)^{-1} [Cf(x, p, t) + Dh(x, z)]$$

$$= -(CB)^{-1} [Cf(x, p, t) - C\bar{f}(x_r, t)]$$

$$= -(CB)^{-1} C\Delta f$$

$$= -(CB)^{-1} CB\tilde{f}$$

$$= \tilde{f}.$$

(8)

注意等价控制是不需要具体求出的(只需证明其存在), $\tilde{f}$  未知它并不影响等价控制的存在,它是由后面的到达控制自动生成.

将等价控制(8)代入原系统(1)

$$\dot{x} = f(x, t, p) + Bu_{\text{eq}} = f(x, t, p) - B\tilde{f},$$

由假设 2  $\Delta f = B\tilde{f}$ , 代入上式

$$\dot{x} = f(x, t, p) - \Delta f = \bar{f}(x_r, t),$$

这就是说,在滑动流形  $S_0$  上,受控系统(1)与混沌参考系统的模型是一致的.因此混沌系统的模型到达问题的就可归结为:设计控制律,迫使滑动流形以外的状态都能在有限时间到达并保持于滑动流形  $S_0$  上.

## 4. 控制律的设计

**定理 3** 取控制律

$$u = -(CB)^{-1} [ks + (\|C\| \gamma(x) + \epsilon e^{-\alpha t}) \text{sgn}(s)], \quad (9)$$

其中  $k > \alpha > 0$ ,  $\epsilon > 0$ . 则受控系统经有限时间  $T$  与混沌参考系统模型达到一致,

$$T = \frac{1}{k - \alpha} \ln \left( 1 + \frac{k - \alpha}{\epsilon} \|s(0)\| \right).$$

**证明** 将  $s$  沿受控系统(2)求导

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d\|s\|^2}{dt} &= s^T \dot{s} = s^T (Cx + Dz) \\ &= s^T [Cf(x, p, t) + CBu - C\bar{f}(x_r, t)] \\ &= s^T [C\Delta f + CBu] \\ &\leq \|s\| \cdot \|C\| \cdot \|\Delta f\| + s^T CBu \\ &\leq \|s\| \cdot \|C\| \gamma(x) + s^T CBu. \end{aligned}$$

将控制律(9)代入上式,得

$$\frac{1}{2} \frac{d\|s\|^2}{dt} \leq -k\|s\|^2 - \epsilon e^{-\alpha t} \|s\|.$$

从而得

$$\frac{d\|s\|}{dt} \leq -k\|s\| - \epsilon e^{-\alpha t}. \quad (10)$$

解此不等式,得

$$\begin{aligned} \|s(t)\| &\leq \|s(0)\| e^{-kt} - \epsilon e^{-kt} \int_0^t e^{(k-\alpha)\tau} d\tau \\ &= \|s(0)\| e^{-kt} - e^{-kt} \frac{\epsilon}{k-\alpha} (e^{(k-\alpha)t} - 1). \end{aligned}$$

设  $T$  时刻到达滑动流形,即  $s(T) = 0$  则

$$0 = \|s(0)\| e^{-kT} - e^{-kT} \frac{\epsilon}{k-\alpha} (e^{(k-\alpha)T} - 1),$$

$$\|s(0)\| = \frac{\epsilon}{k-\alpha} (e^{(k-\alpha)T} - 1),$$

$$1 + \frac{k-\alpha}{\epsilon} \|s(0)\| = e^{(k-\alpha)T}. \quad (11)$$

由(11)式解得

$$T = \frac{1}{k-\alpha} \ln \left( 1 + \frac{k-\alpha}{\epsilon} \|s(0)\| \right), \quad (12)$$

即最多经有限时间  $T$ , 受控系统状态将进入滑动流

形  $S_0$ , 由(10)式,  $t \geq T$  以后, 系统状态将保持在  $S_0$  上. 再由定理 2,  $t \geq T$  时, 受控系统(1)与希望的混沌系统(2)达到一致.

## 5. 快速性与平稳性的讨论

由(12)式, 增加  $\epsilon$  和  $(k-\alpha)$  可有效提高响应的快速性, 但常规滑模控制快速性与平稳性是矛盾的, 快速性好必然抖振大, 平稳性差. 本文的方法较好的解决了这个矛盾: 我们在切换项前引入了一个指数衰减项  $e^{-\alpha t}$ , 同时将  $\epsilon$  选取得适当大, 由(10)式(若忽略不确定项)滑动流形附近的穿越速度为  $d\|s\|/dt|_{s=0} \approx -\epsilon e^{-\alpha t}$ , 由于  $\epsilon$  选得较大, 到达滑动流形  $S_0$  的时间  $T$  就较小, 有利于快速性的提高, 但它不会引起抖振, 因为  $-\epsilon e^{-\alpha t}$  随着时间的推移迅速减小, 穿越滑动流形的速度迅速衰减, 从而抖振振幅迅速衰减. 因此适当的选取参数  $k$ ,  $\epsilon$  和  $\alpha$ , 可使快速性, 平稳性和鲁棒性都得到满意的效果.

## 6. 算例与仿真

考虑系统

$$\dot{x} = f(x, t) + Bu, \quad (13)$$

$$f_1(x, t) = 10(x_2 - x_1) + \omega_1(x, t),$$

$$f_2(x, t) = 28x_1 - x_2 - x_1x_3$$

$$- \omega_1(x, t)\omega_2(x, t),$$

$$f_3(x, t) = x_1x_2 - (8/3)x_3 + 0.5\omega_1(x, t),$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix},$$

$\omega_1, \omega_2$  未知, 但有界  $\|\omega_1\| \leq \gamma_1$ ,  $\|\omega_2\| \leq \gamma_2$ , 设混沌参考系统为 Lorenz 系统

$$\dot{x}_r = \bar{f}(x_r, t) = \begin{pmatrix} 10(x_{r2} - x_{r1}) \\ 28x_{r1} - x_{r2} - x_{r1}x_{r3} \\ x_{r1}x_{r2} - (8/3)x_{r3} \end{pmatrix},$$

则(13)式可写成

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \bar{f}(x_r, t) + \Delta f + Bu \\ &= \bar{f}(x_r, t) + B(u + \tilde{f}), \end{aligned}$$

$$\bar{f}(x_r, t) = \begin{pmatrix} 10(x_{r2} - x_{r1}) \\ 28x_{r1} - x_{r2} - x_{r1}x_{r3} \\ x_{r1}x_{r2} - (8/3)x_{r3} \end{pmatrix},$$

$$\Delta f = \begin{pmatrix} \omega_1(x, t) \\ -\omega_1(x, t)\omega_2(x, t) \\ 0.5\omega_1(x, t) \end{pmatrix}$$

$$= B \begin{pmatrix} \omega_1(x, t) \\ \omega_1(x, t)\omega_2(x, t) \end{pmatrix},$$

$$\omega_1(x, t) = 0.15\sin x_1,$$

$$\omega_2(x, t) = 0.30\cos x_3.$$

按定理 2 取切换函数

$$s = Cx + D^{-1}z(x, t),$$

动态补偿器

$$\dot{z} = h(x, z) = -D^{-1}C\bar{f}(x_r, t),$$

选控制律

$$u = -(CB)^{-1}[ks + ( \| C \| \eta(x) + \epsilon e^{-at} )\text{sgns}],$$

则可生成混沌参考系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{r1} \\ \dot{x}_{r2} \\ \dot{x}_{r3} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 10(x_{r2} - x_{r1}) \\ 28x_{r1} - x_{r2} - x_{r1}x_{r3} \\ x_{r1}x_{r2} - (8/3)x_{r3} \end{pmatrix},$$

即 Lorenz 混沌系统,特别地取  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, D =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 此时}$$

$$CB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \| C \| = 2, \eta = 1,$$

$$\bar{f}(x, t) = \begin{pmatrix} 10(x_2 - x_1) \\ 28x_1 - x_2 - x_1x_3 \\ x_1x_2 - (8/3)x_3 \end{pmatrix}.$$

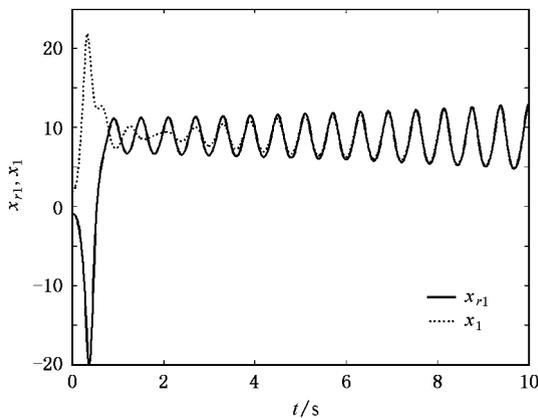


图 1 第一个状态变量的到达情况

取  $k = 5, \epsilon = 0.5$  则在控制

$$u = -5s - (2 + 0.5e^{-2t})\text{sgns}.$$

驱动下生成 Lorenz 系统,仿真结果如图 1—3 所示.

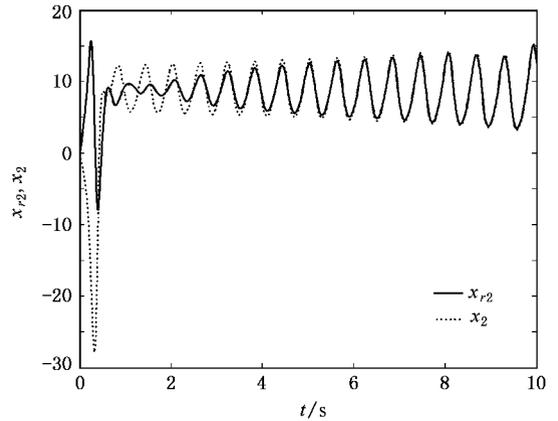


图 2 第二个状态变量的到达情况

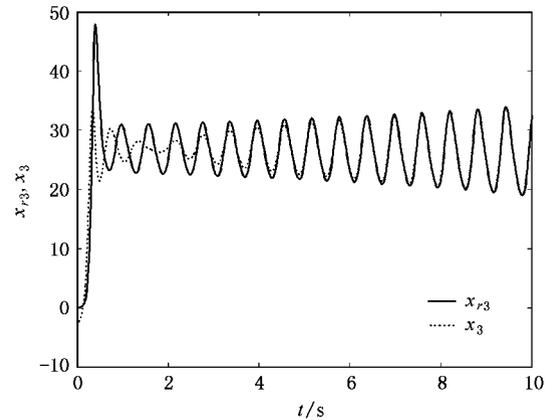


图 3 第三个状态变量的到达情况

## 7. 结 论

基于滑模变结构方法实现了不确定非线性系统的模型到达混沌反控制,使得受控系统有限时间混沌化,与其他混沌反控制方法相比,它具有调节方便,鲁棒性强,计算简单,使用对象广,实现容易等优点.该方法在混沌参考系统为多吸引子混沌系统,如 Newton-Leipnik 双吸引子混沌系统<sup>[17]</sup>,Li 双吸引子混沌系统<sup>[18]</sup>,A 卷波混沌系统<sup>[19-20]</sup>等的混沌反控制研究将是我们下一步努力的目标.

- [ 1 ] Lian K Y , Ching T S , Lian P 2000 *International Journal of Bifurcation and Chaos* **10** 2193
- [ 2 ] Schife S J , Jerger K , Du D H *et al* 1994 *Nature* **370** 615
- [ 3 ] Brandt M E , Chen G 1997 *IEEE Transactions on Circuits and Systems I* **44** 1031
- [ 4 ] Chen G 2003 *Dynamical of Continuous , Discrete and Impulse Systems B* **10** 235
- [ 5 ] Chen G , Lai D 1997 *IEEE Transactions on Circuits and Systems I* **43** 250
- [ 6 ] Wang X F , Chen G 2000 *International Journal of Bifurcation and Chaos* **10** 549
- [ 7 ] Guan X P , Fan Z P , Zhng Q L *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2216 ( in Chinese ) [ 关新平、范正平、张群亮等 2002 物理学报 **51** 2216 ]
- [ 8 ] Wang X F , Chen G R , Yu X H 2000 *Chaos* **10** 904
- [ 9 ] Omer M 2003 *International Journal of Bifurcation and Chaos* **13** 3449
- [ 10 ] Starkov K , Chen G R 2004 *Chaos Solitons and Fractals* **22** 849
- [ 11 ] Song Y Z , Zhao G Z , Qi D L 2005 *Journal of Zhejiang University ( Engineering Science )* **39** 1520 ( in Chinese ) [ 宋运忠、赵光宙、齐冬莲 2005 浙江大学学报(工学版) **39** 1520 ]
- [ 12 ] Song Y Z , Zhao G Z , Qi D L 2006 *Journal of Zhejiang University ( Engineering Science )* **40** 474 ( in Chinese ) [ 宋运忠、赵光宙、齐冬莲 2006 浙江大学学报(工学版) **40** 474 ]
- [ 13 ] Lü J H , Chen G R 2006 *International Journal of Bifurcation and Chaos* **16** 775
- [ 14 ] Lü J H , Yu X H , Chen G R 2003 *IEEE Transactions on Circuits and Systems I* **50** 198
- [ 15 ] Lü J H , Chen G R 2002 *International Journal of Bifurcation and Chaos* **12** 659
- [ 16 ] Lü J H , Chen G R , Cheng D G , Celikovsky S 2002 *International Journal of Bifurcation and Chaos* **12** 2917
- [ 17 ] Song Y Z , Zhao G Z , Qi D L 2006 *Chinese Physics* **15** 2266
- [ 18 ] Lü J H , Chen G R , Cheng D G 2004 *International Journal of Bifurcation and Chaos* **14** 1507
- [ 19 ] Wang F Q , Liu C X 2007 *Chinese Physics* **16** 942
- [ 20 ] Wang F Q , Liu C X 2007 *Chinese Physics* **16** 946

## Chaos anti-control of nonlinear system with uncertainties<sup>\*</sup>

Li Wen-Lin<sup>1)</sup> Song Yun-Zhong<sup>2)†</sup>

<sup>1)</sup> School of Mathematics and Information , Henan Normal University , Xinxiang 453007 , China )

<sup>2)</sup> Complex Networks Laboratory , School of Electrical Engineering and Automation , Henan Polytechnic University , Jiaozuo 454000 , China )

( Received 8 March 2007 ; revised manuscript received 18 April 2007 )

### Abstract

The model for realizing chaos anti-control of nonlinear system is studied based on sliding mode variable structure control and on account of which the identity of the controlled system model and chaos reference model is guaranteed in finite time. Both its speed and robustness are discussed theoretically. As an example , Lorenz chaotic system is employed as the chaos reference model for the simulation verification. Results show that the suggested method is valid.

**Keywords :** chaos system , Lorenz system , variable structure control , sliding manifold

**PACC :** 0545 , 0547

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 60643003 , 60374013 ) , the Natural Science Foundation of Henan Province , China ( Grant No. 06151200 ) , Research Planning Project of Basic and Advanced Technology of Henan Province , China ( Grant No. 072300460050 ) , Doctoral Program of Henan Polytechnic University ( Grant No. 648606 ) , Foundation for Key Teachers of Henan Polytechnic University ( Grant No. 200611 ) .

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail : songhpu@126.com