

# 色散磁导率对异向介质中的调制不稳定性的影响<sup>\*</sup>

戴小玉 文双春<sup>†</sup> 项元江

(湖南大学计算机与通信学院,长沙 410082)

(2007 年 3 月 21 日收到,2007 年 5 月 13 日收到修改稿)

基于 Drude 模型研究了异向介质的色散磁导率对调制不稳定性的影响. 结果表明,在反常色散情形,五阶非线性在异向介质的负折射区中增大了调制频谱的范围及增益值,这与常规正折射介质中出现的现象正好相反;自陡峭效应在异向介质中有可能为负值,但无论正负,也无论在正折射区还是负折射区,它都抑制调制不稳定性的产生;二阶非线性色散效应在正、负折射区中分别促进和抑制调制不稳定性的产生. 在正常色散情形,由于二阶非线性色散效应的作用,使本来在常规正折射介质中不可能出现的调制不稳定性现象也能出现,这一特性为在正常色散区形成孤子或产生超短脉冲串提供了一条新的途径.

关键词:异向介质,调制不稳定性,色散磁导率,二阶非线性色散

PACC:4225B,4265,4270Y

## 1. 引 言

调制不稳定性是非线性科学中的一个基本物理现象. 在非线性和色散介质中,它主要由非线性效应和群速度色散导致产生,体现出连续波传输时伴随着噪声的不稳定性增长,最后准连续脉冲分裂成一短脉冲串<sup>[1]</sup>. 调制不稳定性与亮、暗孤子的产生有紧密的联系,可以看成是孤子形成的先兆. 对常规的非线性色散介质,例如光纤中的调制不稳定性,已经有大量的理论和实验研究工作,而且各种色散和非线性效应,包括高阶色散、自陡峭以及延时拉曼效应等对调制不稳定性的影响也基本揭示出来<sup>[2-7]</sup>. 本文研究异向介质中的调制不稳定性. 异向介质是人工合成介质,它具有很多自然介质所不具备的特性. 尤其是在某些波段,异向介质能同时具有负的介电常数( $\epsilon < 0$ )和负的磁导率( $\mu < 0$ ),宏观表现出负折射特性<sup>[8]</sup>. 电磁波在异向介质的负折射区中传播时,其波数  $k$ 、电场  $E$  以及磁场  $H$  形成不同于传统介质右手关系的左手关系,因此有时又把这种介质称为左手物质,以区别于传统的右手物质. 负折射介质还具有一些独特的性质,如逆 Doppler 效应、逆 Snell 效应、逆光压、负 Cerenkov 辐射<sup>[8]</sup>、负的折射

率<sup>[9,10]</sup>、逆的 Goos-Hänchen 相移<sup>[11]</sup>、负的光子隧穿时间<sup>[12]</sup>、光学双稳态现象<sup>[13]</sup>等等. 以前实现负折射主要是在微波区,最近,有文献从实验上证实可以在红外和光学波段实现负折射<sup>[14-16]</sup>. 随着研究的深入,对异向介质的研究也开始转向非线性性质的研究. 例如 Zharov 等将开口环谐振腔和金属导线阵列构成的负折射介质嵌入到非线性的电介质中实现了三阶非线性介电常数<sup>[17]</sup>. 非线性异向介质的实现,将大大拓展传统非线性光学的研究领域,并将导致开发出大量的新型光电子器件. 近年来,一些作者研究了超短脉冲在非线性和负折射介质中的传输特性<sup>[18-25]</sup>. Lazarides 等<sup>[21]</sup>在考虑非线性极化和磁化的条件下推出了脉冲在各向同性、均匀介质中传输所满足的准一维耦合非线性薛定谔方程. 基于 Lazarides 等推出的方程, Kourakis 等研究了电磁波在负折射介质中的非线性稳定性<sup>[22]</sup>,得到了耦合平面波解的调制稳定性图像. Scalora 等研究了脉宽达几十个光学周期的脉冲在非线性和负折射介质中的传输特性,通过忽略磁场非线性,得到了一个耦合的非线性方程<sup>[23]</sup>. Wen 等人推导出了一个更精确的超短脉冲在具有非线性极化的异向介质中的传输方程,并分析了负折射介质中反常的时空不稳定性特性<sup>[24,25]</sup>.

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号:10674045,10576012)和教育部高等学校博士点基金(批准号:20040532005)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: scwen@hnu.cn

异向介质与常规介质的一个最重要的区别是前者磁导率是色散的,色散磁导率对超短脉冲非线性传输的影响具体体现在它导致在传输方程中出现五阶非线性效应、一阶非线性色散(通常叫自陡峭)和二阶非线性色散效应.五阶非线性在常规的饱和非线性介质中也存在,对调制不稳定性的影响也有分析,自陡峭效应对调制不稳定性的影响在常规介质尤其在光纤中也有详细分析,但在异向介质中它包含了色散磁导率的贡献,表现出了反常特性,有必要重新考察;二阶非线性色散效应是一种全新的非线性效应,在常规介质中不曾出现.本文通过分析由色散磁导率导致出现的五阶非线性、自陡峭和二阶非线性色散效应对超短脉冲在异向介质中的调制不稳定性的影响,揭示出异向介质中调制不稳定性的新特性,这些新特性预示着异向介质中超短脉冲传输尤其是孤子传输将出现新的现象.

## 2. 传输模型

考虑一维空间情形并假设电场在  $x$  方向偏振.在具有三阶非线性极化的各向同性均匀异向介质中,脉冲电场包络  $A$  满足如下方程<sup>[24]</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \xi} = & i \sum_{m=2}^{\infty} \frac{i^m \beta_m}{m!} \frac{\partial^m A}{\partial T^m} + i \gamma_0 \left[ |A|^2 A - \sigma |A|^4 A \right. \\ & + i S \frac{\partial}{\partial T} (|A|^2 A) + i S_1 \frac{\partial}{\partial T} (|A|^2 A) \\ & \left. - S_2 \frac{\partial^2}{\partial T^2} (|A|^2 A) \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

这儿已采用移动坐标系,  $T = t - z/V$ ,  $\xi = z$ ,  $V$  是群速度.其中  $\beta_m$  是  $m$  阶色散系数,  $\beta_2 = \delta_2 - 1(k_0 V)^2$  是群速度色散,  $\gamma_m = m! \omega_0 \epsilon_0 \chi^{(3)} \Xi_m(2k_0)$  是非线性系数,  $\chi^{(3)}$  为三阶非线性电极化率,  $\Xi_m = \partial^m [\omega \mu(\omega)](m! \partial \omega^m)|_{\omega=\omega_0}$ ,  $S = 1/\omega_0$  是自陡系数,而

$$\begin{aligned} \sigma &= \gamma_0 \mathcal{K}(2k_0), \\ S_1 &= -(k_0 V)^{-1} + \gamma_1/\gamma_0, \\ S_2 &= \gamma_1 \mathcal{K}(\omega_0 \gamma_0) - \beta_2 \mathcal{K}(4k_0) + \gamma_2 \mathcal{K}(2\gamma_0). \end{aligned} \quad (2)$$

它们均是由于色散磁导率导致的高阶非线性项,分别表示五阶非线性、自陡峭效应和二阶非线性色散效应.  $k_0 = n(\omega_0) \omega_0/c$  表示介质在载波频率为  $\omega_0$  时的波数,  $n(\omega_0)$  是介质在中心频率为  $\omega_0$  时的折射率,对于负折射介质,波矢  $k_0$  为负,与传统正折射介质中的方向相反,若为自聚焦材料,  $\gamma_0 > 0$ , 则  $\sigma$  恒小于零.与传统正折射材料中超短脉冲的传输方

程<sup>[1]</sup>相比,方程(1)的不同之处在于由于色散磁导率导致了五阶非线性项,额外的自陡峭效应项( $S_1$ ),以及特有的高阶非线性色散项(这里保留到二阶).

异向介质的  $\epsilon$  和  $\mu$  必定是色散的,其色散关系可通过 Drude 模型来描述<sup>[26]</sup>:

$$\begin{aligned} \epsilon(\omega) &= \epsilon_0 \left[ 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + i\gamma_e)} \right], \\ \mu(\omega) &= \mu_0 \left[ 1 - \frac{\omega_{pm}^2}{\omega(\omega + i\gamma_m)} \right], \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $\omega_{pe}$  和  $\omega_{pm}$  分别为电场和磁场的等离子体频率,  $\gamma_e$  和  $\gamma_m$  为相应的电场和磁场损耗项,  $\gamma_e$  和  $\gamma_m$  非常小,所以在后面的分析中为简化起见我们忽略它们.

为便于计算,将方程(1)进行归一化.假设  $\tau = T/T_0$ ,  $Z = \xi/L_D$ ,  $u = A/A_0$ , 其中  $A_0$  和  $T_0$  分别为初始脉冲振幅和宽度,并且定义  $L_D = T_0^2/|\beta_2|$  为色散长度,  $L_{NL} = 1/(\gamma_0 A_0^2)$  为非线性长度,  $L_{SNL} = 1/(\gamma_0 A_0^4 \sigma)$  为饱和非线性长度,  $L_{SS} = T_0 \mathcal{K}(\gamma_0 A_0^2 S)$  为自陡长度,  $L_{SS1} = T_0 \mathcal{K}(\gamma_0 A_0^2 S_1)$  和  $L_{SS2} = T_0^2 \mathcal{K}(\gamma_0 A_0^2 S_2)$  分别为由色散磁导率导致的自陡长度和二阶非线性色散长度.方程(1)转化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial Z} = & - \frac{i \operatorname{sgn}(\beta_2)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + i \sum_{m=3}^{\infty} \frac{i^m b_m}{m!} \frac{\partial^m u}{\partial \tau^m} \\ & + i N \left[ |u|^2 u - p |u|^4 u + i s \frac{\partial}{\partial \tau} (|u|^2 u) \right. \\ & \left. + i s_1 \frac{\partial}{\partial \tau} (|u|^2 u) - s_2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (|u|^2 u) \right], \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $\operatorname{sgn}(\beta_2) = \pm 1$ , 分别代表正常和反常群速度色散,  $N = L_D/L_{NL}$  是非线性系数,  $s = L_{NL}/L_{SS} = 1/(\omega_0 T_0)$  是归一化自陡参数,而  $p = L_{NL}/L_{SNL} = 1/(2k_0 L_{NL})$ ,  $s_1 = L_{NL}/L_{SS1}$ ,  $s_2 = L_{NL}/L_{SS2}$  均由色散磁导率导致产生.取  $N = 1$  (基态孤子),在无损耗 Drude 模型下有

$$\begin{aligned} p &= \frac{s^2}{2n} \left| \frac{1}{n} \left( 1 + \frac{3\omega_{pm}^2 \omega_{pe}^2}{\omega_0^4} \right) - \frac{(1 - \omega_{pm}^2 \omega_{pe}^2 / \omega_0^4)^2}{n^3} \right|, \\ s_1 &= s \left( \frac{\omega_{pm}^2 \omega_{pe}^2 - \omega_0^4}{n^2 \omega_0^4} - \frac{\omega_{pm}^2 + \omega_0^2}{\omega_{pm}^2 - \omega_0^2} \right), \\ s_2 &= s^2 \left[ \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega_{pm}^2)} - \frac{1}{4n^2} \left( 1 + \frac{3\omega_{pe}^2 \omega_{pm}^2}{\omega_0^2 \omega_0^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{4n^4} \left( 1 - \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{pm}^2}{\omega_0^2 \omega_0^2} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

所以,对于给定的  $s$  值,  $p$ ,  $s_1$  和  $s_2$  的值可由图 1 确定.

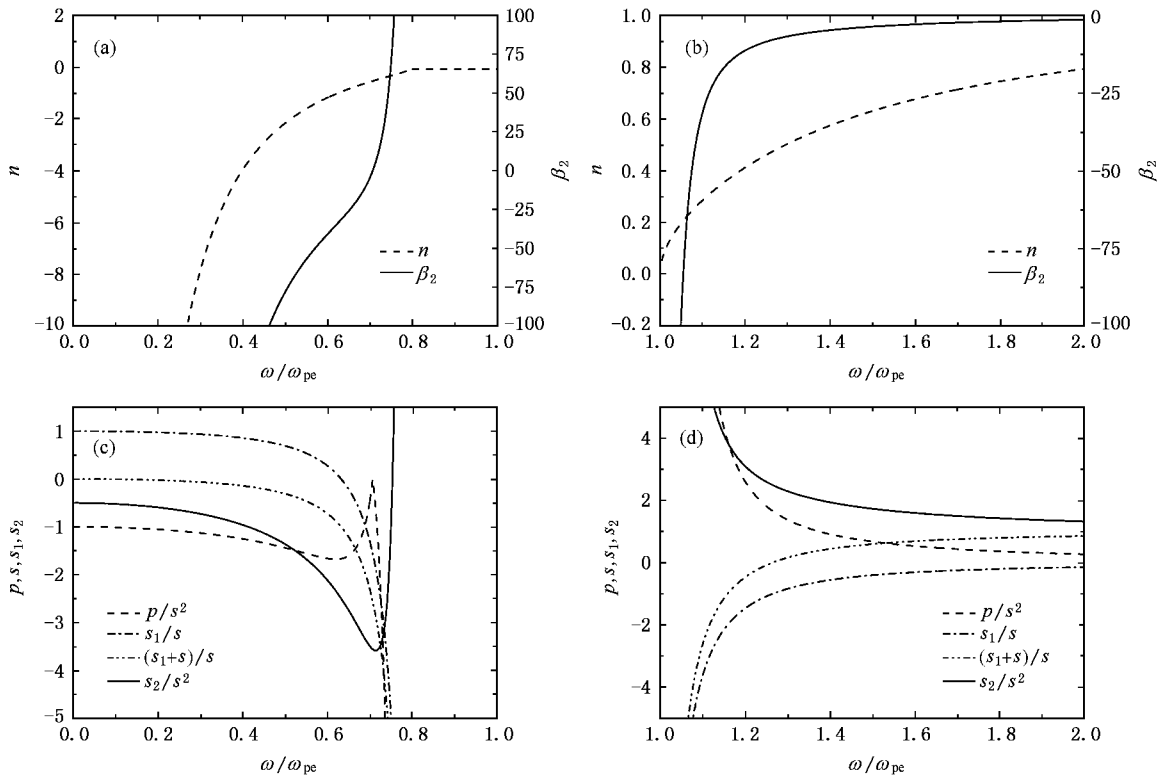


图 1 折射率  $n$ 、五阶非线性系数  $p/s^2$ 、总自陡系数  $(s + s_1)/s$ 、由色散磁导率引起的额外自陡系数  $s_1/s$ 、二阶非线性色散系数  $s_2/s^2$  和群速度色散系数  $\beta_2$  与归一化频率  $\omega/\omega_{pe}$  的关系图(其中  $\omega_{pm}/\omega_{pe} = 0.8$ ,  $\beta_2$  的单位为  $1/(2\pi c\omega_{pe})$ )

图 1 为  $n$ ,  $\beta_2$ ,  $s_1/s$ ,  $(s_1 + s)/s$  和  $s_2/s^2$  在  $\omega_{pm}/\omega_{pe} = 0.8$ ,  $\gamma_e = \gamma_m = 0$  的情况下与归一化频率  $\omega/\omega_{pe}$  的关系图. 其中 (a)(c) 为负折射情况, 其中  $0 < \omega/\omega_{pe} < 0.8$  范围为负折射区域, (b)(d) 为正折射情况, 其中  $\omega/\omega_{pe} > 1$  范围为正折射区域. 在负折射区域内, 五阶非线性系数恒为负, 总的自陡、二阶非线性色散系数均可正可负, 而且自陡系数的零点取决于开口环谐振腔、金属导线的结构参数. 而在正折射区域内, 五阶非线性系数恒为正, 总的自陡系数均可正可负, 二阶非线性色散系数恒为正, 且自陡系数的大小同样取决于开口环谐振腔、金属导线的结构参数.

### 3. 调制不稳定性分析

#### 3.1. 调制不稳定的增益谱表达式

关于高阶线性色散对调制不稳定的影响已是众所周知, 所以为方便计算这儿忽略高阶色散项. 方程 (4) 的稳态解为  $\bar{u} = \sqrt{I_0} \exp[iNI_0(1 - pI_0)Z]$ , 其中  $I_0$  为归一化初始光强. 为了研究解的稳定性,

在稳态解上施加微扰项  $u = (\sqrt{I_0} + a) \exp[iNI_0(1 - pI_0)Z]$  其中  $|a(z, \tau)| \ll \sqrt{I_0}$ , 代入方程 (5) 并使  $a$  线性化, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial Z} = & -i \left[ \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{2} + 2NI_0s_2 \right] \frac{\partial^2 a}{\partial \tau^2} \\ & + iNI_0(1 - 2I_0p)(a + a^*) \\ & - NI_0s'_1 \left( 2 \frac{\partial a}{\partial \tau} + \frac{\partial a^*}{\partial \tau} \right) - iNI_0s_2 \frac{\partial^2 a^*}{\partial \tau^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

式中  $s'_1 = s + s_1$ . 设微扰为  $a(Z, \tau) = a_1 \exp[i(KZ - \Omega\tau)] + a_2 \exp[-i(KZ - \Omega\tau)]$ ,  $\Omega, K$  分别是微扰的频率和波数, 代入 (6) 式, 可得  $\Omega$  和  $K$  满足的色散关系为

$$\begin{aligned} K = & 2NI_0\Omega s'_1 \pm \frac{|\Omega|}{2} \\ & \times \sqrt{4\text{sgn}(\beta_2)NI_0 + \Omega^2 + 4N^2I_0^2s^2 + M(\Omega)}, \end{aligned} \quad (7)$$

式中

$$\begin{aligned} M(\Omega) = & -8\text{sgn}(\beta_2)NI_0^2p + 4N^2I_0^2s_1^2 + 8N^2I_0^2ss_1 \\ & + 4NI_0s_2(2NI_0 - 4NI_0^2p \\ & + 2\text{sgn}(\beta_2)\Omega^2 + 3NI_0s_2\Omega^2) \end{aligned} \quad (8)$$

是由色散磁导率导致的.  $K$  的虚部使微扰指数增长, 因此有虚部解是产生调制不稳定性的前提. 根据调制不稳定性增益的定义  $g = 2\ln|K|^{[1]}$ , 增益表达式可写为

$$g(\Omega) = |\Omega| \sqrt{-4\text{sgr}(\beta_2)NI_0 - \Omega^2 - 4N^2I_0^2s^2 - M(\Omega)}. \quad (9)$$

由(9)式可发现, 群速度色散、三阶和五阶非线性, 以及自陡和二阶非线性色散的正负及大小共同决定着调制不稳定性产生的范围及增益大小,  $M(\Omega)$  决定了色散磁导率对调制不稳定性的影响.

### 3.2. 色散磁导率对调制不稳定性的影响

我们基于方程(9)来分析色散磁导率对调制不稳定性的影响. 参数的取值根据图1确定, 并考虑基态孤子( $N=1$ ), 自陡峭系数  $s=0.2$  的情况.

#### 3.2.1. 色散磁导率导致的五阶非线性对调制不稳定性的影响

此时忽略自陡峭和非线性色散效应, 只考虑五阶非线性的作用, 由(9)式可得增益为

$$g(\Omega) = |\Omega| \sqrt{-\Omega^2 - 4\text{sgr}(\beta_2)NI_0 + 8\text{sgr}(\beta_2)NI_0^2p}. \quad (10)$$

由(8)式可知, 要有调制不稳定性发生, 须有

$$-4\text{sgr}(\beta_2)NI_0 + 8\text{sgr}(\beta_2)NI_0^2p > 0. \quad (11)$$

根据图1, 五阶非线性系数的大小可以通过选择开口环谐振腔和金属导线序列的结构参数来控制. 由(11)式知, 对于正常色散区, 无论是否考虑

五阶非线性, 都不存在增益. 对于反常色散区, 且超短脉冲在负折射区域中传输, 则五阶非线性  $p$  为负, 不论考虑五阶非线性与否, 调制不稳定性总能发生. 当  $p \neq 0$  时, (11)式的条件转化为  $NI_0 - 2NI_0^2p > 0$ . 因为在负折射介质中  $p < 0$ , 所以(11)式恒成立. 令  $\Omega_c^2 = 4NI_0 - 8NI_0^2p$ , 由(10)式可知, 此时的频谱的范围为  $\Omega^2 < \Omega_c^2$ , 当  $\Omega = \sqrt{2}\Omega_c/2$  时, 存在最大增益为  $g_{\max} = 2NI_0 - 4NI_0^2p$ . 所以, 如果考虑五阶非线性, 可以使增益值从不考虑其影响的  $g_{\max} = 2NI_0$  增加到  $g_{\max} = 2NI_0 - 4NI_0^2p$ , 调制频谱的范围将从  $\Omega^2 < 4NI_0$  增加到  $\Omega^2 < \Omega_c^2$ , 并且随着  $p$  的减小, 也就是  $|p|$  的增加, 增益值和调制频谱的范围都将得到增加(如图2(a)所示).

假定超短脉冲在正折射区域中传输, 则五阶非线性  $p$  恒为正, 若不考虑五阶非线性, 调制不稳定性总能发生. 当  $p \neq 0$  时, 调制不稳定性能发生条件转化为  $NI_0 - 2NI_0^2p > 0$ , 将抑制调制不稳定性的产生, 对于正折射区域,  $p$  使最大增益值从不考虑其影响的  $g_{\max} = 2NI_0$  减小到  $g_{\max} = 2NI_0 - 4NI_0^2p$ , 调制频谱的范围将从  $\Omega^2 < 4NI_0$  减小到  $\Omega^2 < \Omega_c^2$ , 并且随着  $p$  的增加, 调制频谱的范围及增益值将不断减小(如图2(b)所示), 这与负折射区域中出现的现象正好相反.

如果将介质换为自散焦介质( $N < 0$ ), 则在正折射介质中是不存在调制不稳定性的, 然而, 对于异向介质的负折射区, 同样也能得到正增长的增益谱.

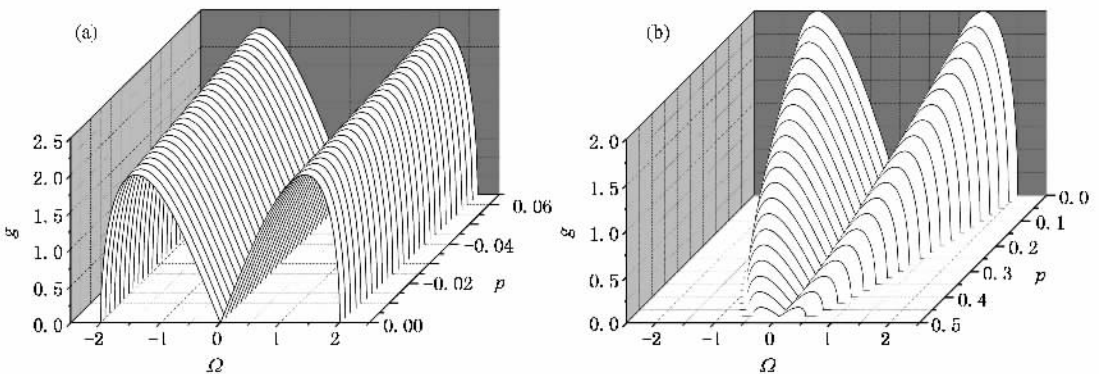


图2 在异向介质的反常色散区中增益谱随五阶非线性系数的变化( $I_0=1$ ) (a) 负折射区域; (b) 正折射区域

#### 3.2.2. 色散磁导率导致的自陡对调制不稳定性的影响

忽略二阶非线性色散效应, 考虑五阶非线性和自陡峭效应的作用, 由(9)式可得增益表达式为

$$g(\Omega) = |\Omega| \sqrt{-\Omega^2 - 4\text{sgr}(\beta_2)NI_0 + 8\text{sgr}(\beta_2)NI_0^2p - 4N^2I_0^2s_1^2}. \quad (12)$$

假设超短脉冲在异向介质的负折射区域中传输,对于正常色散区( $\beta_2 > 0$ ),因为  $p < 0, s_1'^2 > 0$ ,调制不稳定性不能产生.

在反常色散区( $\beta_2 < 0$ ),微扰频率  $\Omega$  只有满足关系式

$$\Omega^2 < \Omega_c^2 - 4N^2 I_0^2 s_1'^2 \quad (13)$$

时,调制不稳定性才存在,其中  $\Omega_c^2 = 4NI_0 - 8NpI_0^2$ . (12)(13)式清楚表明,自陡系数( $s_1$ )不仅使增益谱的谱宽由不考虑其影响的  $\Omega^2 < \Omega_c^2$  减小为  $\Omega^2 < \Omega_c^2 - 4N^2 I_0^2 s_1'^2$ ,而且使增益谱的最大值由  $2NI_0 - 4NI_0^2 p$  减小为  $2NI_0 - 4NI_0^2 p - 2N^2 I_0^2 s_1'^2$ ,即如图 3(a)所示,

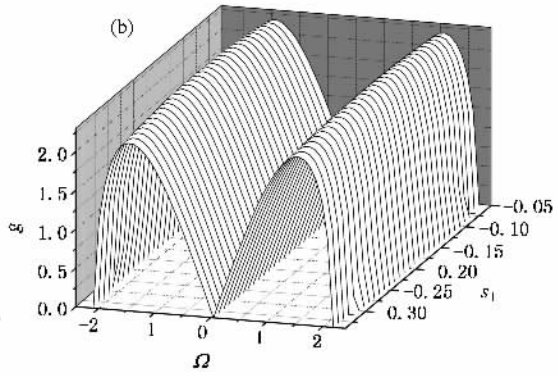
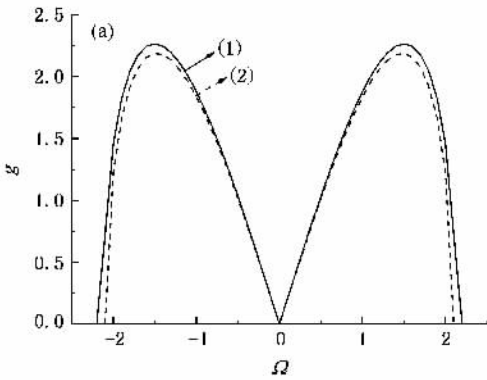


图 3 在负折射区域的反常色散区中增益与自陡峭系数的关系图( $I_0 = 1$ ) (a)曲线(2)为  $s_1 = -0.16$  时的增益谱图,曲线(1)为同频率下不考虑  $s_1$  时的增益谱图;(b)增益随自陡峭系数的变化关系图

若超短脉冲在正折射区域中传输,则在反常色散区考虑自陡峭效应也将在使谱宽变窄的同时使振幅的增长速度下降(如图 4(a)), $s_1$  不仅使增益谱的谱宽由不考虑其影响的  $\Omega^2 < \Omega_c^2$  减小为  $\Omega^2 < \Omega_c^2 - 4N^2 I_0^2 s_1'^2$ ,而且使增益谱的最大值由  $2NI_0 - 4NI_0^2 p$  减小为  $2NI_0 - 4NI_0^2 p - 2N^2 I_0^2 s_1'^2$ ,由于  $p$  和  $s_1'^2$  都恒

自陡峭效应在使谱宽变窄的同时使振幅的增长速度下降.当  $\omega_{pm}/\omega_{pe} = 0.8, s = 0.2$  时,增益随  $s_1$  的变化关系如图 3(b)所示(其中  $I_0 = 1$ )随  $s_1$  的减小增益谱的谱宽和增益值先增大后减小,并且在  $s_1 = 0.2$  达到最大值.这主要是取决于  $s_1'^2$  的大小,当  $(s_1 + s) > 0$  时,随  $s_1$  的逐渐减小,  $|s_1 + s|$  逐渐减小,增益谱的谱宽和振幅得到了较大幅度的增加.但当  $(s_1 + s) < 0$  时,随  $s_1$  的逐渐减小,但  $|s_1 + s|$  变大,引起了增益谱谱宽变窄和振幅有较大幅度的减小,可见总的自陡峭效应对增益的影响与其系数的符号无关,只取决于其值的大小.

大于零,使得谱宽和增益比负折射区域(图 3(a))都有较大幅度的减小.与负折射区域相似,总的自陡峭效应对增益的影响与其系数的符号无关,只取决于其值的大小.增益随  $s_1$  的变化关系如图 4(b)所示(其中  $I_0 = 1$ )随  $s_1$  的增大,增益谱的谱宽和增益值增大.这主要是因为当  $(s_1 + s) < 0$  时,随  $s_1$  的逐

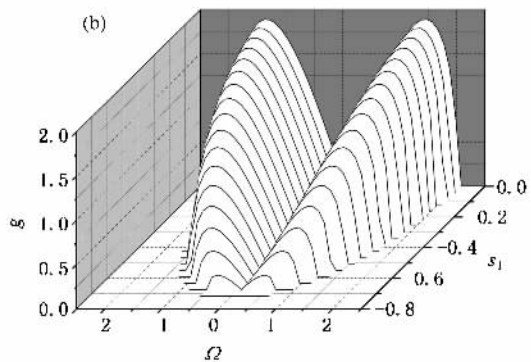
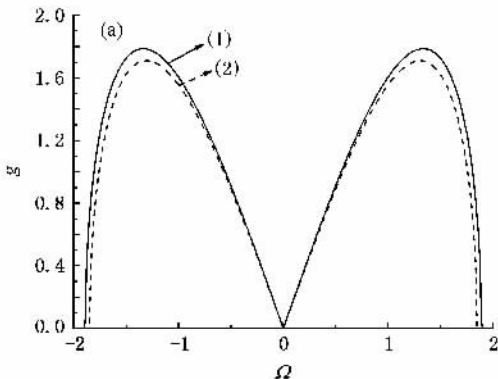


图 4 在正折射区域的反常色散区中增益与自陡峭系数的关系图( $I_0 = 1$ ) (a)曲线(2)为  $s_1 = -0.16$  时的增益谱图,曲线(1)为同频率下不考虑  $s_1$  时的增益谱图;(b)增益随自陡峭系数的变化关系图

渐增大,  $|s_1 + s|$  逐渐减小, 增益谱的谱宽和振幅得到了较大幅度的增加. 当  $(s_1 + s) > 0$  时, 随  $s_1$  的逐渐增大,  $|s_1 + s|$  逐渐增大, 会引起增益谱的谱宽和增益值的变小, 但是由于  $p$  在这一范围有更大程度的减小,  $p$  的变化占主导地位, 所以谱宽和增益值一直增大, 未出现转折点.

### 3.2.3. 色散磁导率导致的二阶非线性色散对调制不稳定性的影响

由图 1 可知, 二阶非线性色散的大小同样可通过选择开口环谐振腔和金属导线序列的结构参数来控制. 同时考虑五阶非线性、自陡峭效应和二阶非线性色散效应的作用, 由(9)式可得增益表达式为

$$g = |\Omega| \left( -4\text{sgr}(\beta_2)NI_0 - \Omega^2 + 8\text{sgr}(\beta_2)NI_0^2p - 4N^2I_0^2s_1'^2 - 4NI_0s_2(2NI_0 - 4NI_0^2p + 2\text{sgr}(\beta_2)\Omega^2 + 3NI_0s_2\Omega^2) \right)^{1/2}. \quad (14)$$

调制不稳定性产生的条件为

$$-4\text{sgr}(\beta_2)NI_0 + 8\text{sgr}(\beta_2)NI_0^2p - 4N^2I_0^2s_1'^2 - 4NI_0s_2(2NI_0 - 4NI_0^2p + 2\text{sgr}(\beta_2)\Omega^2 + 3NI_0s_2\Omega^2) > 0. \quad (15)$$

假设超短脉冲在负折射区域中传输, 当不考虑二阶非线性色散时, 调制不稳定性只有在反常色散区( $\beta_2 < 0$ )才能发生. 当  $s_2 \neq 0$  时, 对于正常色散区同样能产生调制不稳定性, 且微扰频率  $\Omega$  只有满足关系式  $\Omega^2 < \Omega_c'^2$  时存在调制不稳定性, 其中

$$\Omega_c'^2 = (-4NI_0 + 8NI_0^2p - 4N^2I_0^2s_1'^2 - 8N^2I_0^2s_2 + 16N^2I_0^3ps_2) \times (1 + 8NI_0s_2 + 12N^2I_0^2s_2^2). \quad (16)$$

当  $\Omega = \sqrt{2}\Omega_c'/2$  时, 增益值为最大, 即

$$g_{\max} = (-2NI_0 + 4NI_0^2p - 2N^2I_0^2s_1'^2 - 4N^2I_0^2s_2 + 8N^2I_0^3ps_2 \times (1 + 8NI_0s_2 + 12N^2I_0^2s_2^2)^{-1/2}). \quad (17)$$

可见, 由于二阶非线性色散的影响, 使得在正常色散区也可能发生调制不稳定性. 这一性质为在正常色散区产生超短光脉冲串提供了思路, 因此在实际的应用中必将有重要的价值. 根据方程(15), 要出现调制不稳定性,  $s_2$  必须小于 0 且初始脉冲的强度不能过小. 当  $I_0 = 10$  时, 考虑二阶非线性色散效应的增益谱如图 5 所示, 随着  $s_2$  的逐渐增大, 增益谱谱宽和振幅先增大后减小, 最后不再存在调制不稳定性.

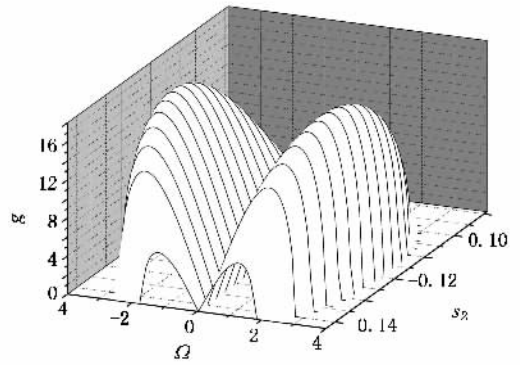


图 5 在负折射区域的正常色散区中增益随二阶非线性色散系数的变化关系图( $I_0 = 10$ )

对于反常色散区( $\beta_2 < 0$ ), 微扰频率  $\Omega$  只有满足关系式  $\Omega^2 < \Omega_{cl}'^2$  存在调制不稳定性, 其中

$$\Omega_{cl}'^2 = (4NI_0 - 8NI_0^2p - 4N^2I_0^2s_1'^2 - 8N^2I_0^2s_2 + 16N^2I_0^3ps_2) \times (1 - 8NI_0s_2 + 12N^2I_0^2s_2^2). \quad (18)$$

当  $\Omega = \sqrt{2}\Omega_{cl}'/2$  时, 增益值达到最大, 即

$$g_{\max} = (2NI_0 - 4NI_0^2p - 2N^2I_0^2s_1'^2 - 4N^2I_0^2s_2 + 8N^2I_0^3ps_2 \times (1 - 8NI_0s_2 + 12N^2I_0^2s_2^2)^{-1/2}). \quad (19)$$

假设超短脉冲在负折射区域中传输, 则  $s_2 < 0$ , 可存在调制不稳定性. 图 6(a) 给出了考虑二阶非线性色散与不考虑其影响下的增益谱图, 由图可知, 二阶非线性色散使 MI 频率范围和增益值均减小. 图 6(b) 为在  $\beta_2 < 0, s_2 < 0$  的区域内, 增益随  $s_2$  的变化关系, 随  $s_2$  逐渐减小,  $|s_2|$  变大, 能使振幅和调制频谱范围较大幅度的减小. 结果表明在负折射区域中, 二阶非线性色散将抑制调制不稳定性的产生.

假设超短脉冲在正折射区域中传输, 则  $p > 0, s_2 > 0$ , 同样存在调制不稳定性. 由图 7(a), 考虑二阶非线性色散能使 MI 频率范围和增益值有大幅度的增加, 这与负折射区域的结果相反. 考虑  $s_2$  使增益谱的谱宽由不考虑其影响的  $4NI_0 - 8NI_0^2p - 4N^2I_0^2s_1'^2$  增大为  $(4NI_0 - 8NI_0^2p - 4N^2I_0^2s_1'^2 - 8N^2I_0^2s_2 + 16N^2I_0^3ps_2) \times (1 - 8NI_0s_2 + 12N^2I_0^2s_2^2)$ , 而且使增益谱的最大值由  $2NI_0 - 4NI_0^2p - 2N^2I_0^2s_1'^2$  增大为  $(2NI_0 - 4NI_0^2p - 2N^2I_0^2s_1'^2 - 4N^2I_0^2s_2 + 8N^2I_0^3ps_2 \times (1 - 8NI_0s_2 + 12N^2I_0^2s_2^2)^{-1/2})$ . 当  $s_2$  变化时, 增益随  $s_2$  的变化关系如图 7(b), 随  $s_2$  逐渐增大, 振幅和增益谱谱宽也将增大, 说明在正折射区域

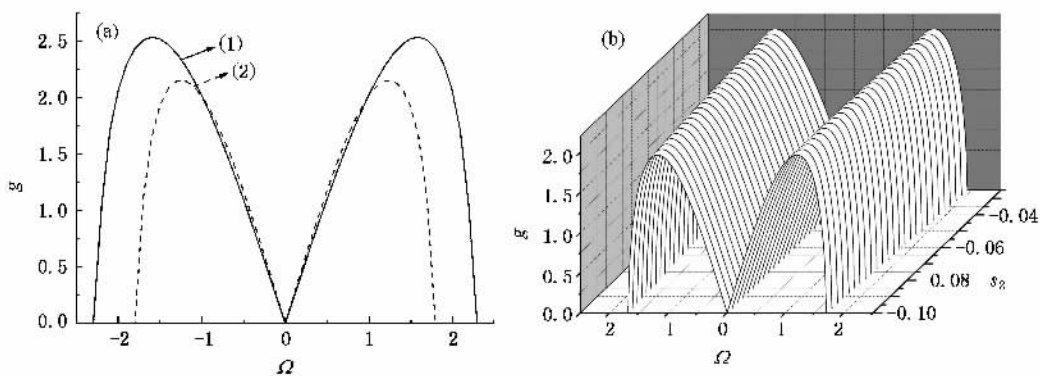


图 6 在负折射区域的反常色散区中增益与二阶非线性色散系数的关系图 ( $I_0 = 1$ ) (a) 曲线 (2) 为  $s_2 = -0.1, s_1 = -0.2$  时的增益谱图, 曲线 (1) 为同频率下不考虑  $s_2$  时的增益谱图; (b) 增益随二阶非线性色散系数的变化关系图

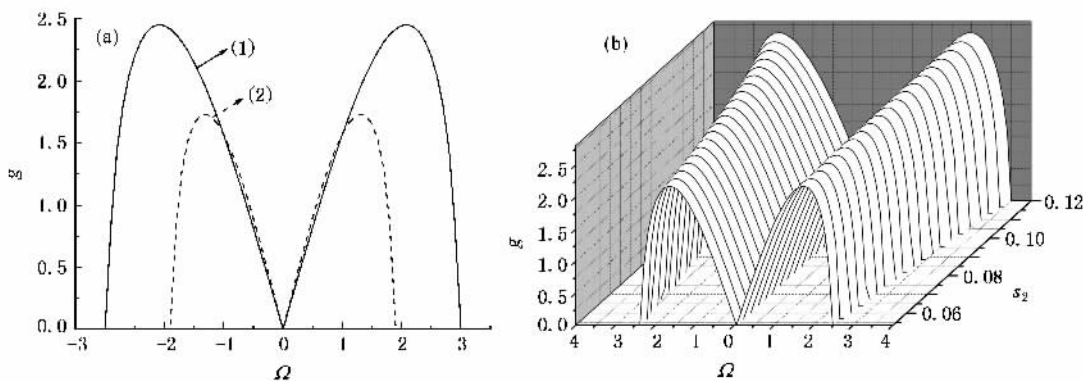


图 7 在正折射区域的反常色散区中增益与二阶非线性色散系数的关系图 ( $I_0 = 1$ ) (a) 曲线 (1) 为  $s_2 = 0.1, s_1 = -0.2$  时的增益谱图, 曲线 (2) 为同频率下不考虑  $s_2$  时的增益谱图; (b) 增益随二阶非线性色散系数的变化关系图

中二阶非线性色散效应能不断促进调制不稳定性的产生.

### 4. 结 论

通过 Drude 模型得出了考虑五阶非线性和二阶非线性色散效应的超短脉冲在异向介质中的传输模型, 这一方程与传统正折射介质中的传输方程相类似. 但是对于负折射区域, 五阶非线性系数、自陡系数、二阶非线性色散系数的大小可以通过选择不同的开口环谐振腔、金属导线的结构参数来改变,

且五阶非线性系数恒为负值, 负的五阶非线性增大了调制频谱的范围及增益值, 这与异向介质的正折射区域和传统介质中出现的现象正好相反, 对于正折射区域和传统介质, 它将抑制调制不稳定性. 在负折射区域中自陡系数、二阶非线性色散系数均可正可负. 正、负自陡效应均抑制调制不稳定性的产生. 特别值得一提的是, 负的二阶非线性色散使得在正常色散区产生调制不稳定性成为可能, 这一性质为在正常色散区形成孤子或产生超短脉冲串提供了一条新的途径.

[ 1 ] Agrawal G P 2001 *Nonlinear Fiber Optics* ( 3rd ed )( San Diego : Academic )  
 [ 2 ] Vysloukh V A , Sukhotskova N A 1987 *Sov. J. Quantum Electron.* **17** 1509

[ 3 ] Potosek M J 1987 *Opt. Lett.* **12** 921  
 [ 4 ] Hook A , Karlsson M 1993 *Opt. Lett.* **18** 1388  
 [ 5 ] Abdullaev F K , Darmanyany S A , Bsichoff S , Christiansen P L , Sørensen M P 1994 *Opt. Commun.* **108** 60

- [ 6 ] Xu W C , Zhang S M , Chen W C , Luo A P , Guo Q , Liu S H 2002 *Chin. Phys.* **11** 39
- [ 7 ] Lu K Q , Zhao W , Yang Y L , Zhu X P , Li J P , Zhang Y P 2004 *Chin. Phys.* **13** 2077
- [ 8 ] Veselago V G 1968 *Sov. Phys. Usp.* **10** 509
- [ 9 ] Smith D R , Kroll N 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2933
- [ 10 ] Zheng Q , Zhao X P , Fu Q H , Zhao Q , Kang L , Li M M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5683 ( in Chinese ) [ 郑 晴、赵晓鹏、付全红、赵乾、康 雷、李明明 2005 物理学报 **54** 5683 ]
- [ 11 ] Berman P R 2002 *Phys. Rev. E* **66** 67603
- [ 12 ] Xiang Y J , Wen S C , Tang K S 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2714 ( in Chinese ) [ 项元江、文双春、唐康淞 2006 物理学报 **55** 2714 ]
- [ 13 ] Shi H Y , Jiang Y Y , Sun X D , Guo R H , Zhao Y P 2005 *Chin. Phys.* **14** 1571
- [ 14 ] Berrier A , Mulot M , Swillo M , Qiu M , Thyl' en L , Talneau A , Anand S 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 73902
- [ 15 ] Schonbrun E , Tinker M , Park W , Lee J B 2005 *IEEE Photonics Technol. Lett.* **17** 1196
- [ 16 ] Shalaev V M , Cai W , Chettiar U K , Yuan H , Sarychev A K , Drachev V P , Kildishev A V 2005 *Opt. Lett.* **30** 3356
- [ 17 ] Zharov A A , Shadrivov I V , Kivshar Y S 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 37401
- [ 18 ] O'Brien S , McPeake D , Ramakrishna S A , Pendry J B 2004 *Phys. Rev. B* **69** 241101
- [ 19 ] Lapine M , Gorkunov M , Ringhofer K H 2003 *Phys. Rev. E* **67** 65601
- [ 20 ] Agranovich V M , Shen Y R , Baughman R H , Zakhidov A A 2004 *Phys. Rev. B* **69** 165112
- [ 21 ] Lazarides N , Tsironis G P 2005 *Phys. Rev. E* **71** 36614
- [ 22 ] Kourakis I , Shukla P K 2005 *Phys. Rev. E* **72** 16626
- [ 23 ] Scalora M , Syrchin M S , Akozbek N , Poliakov E Y , D'Aguzzo G , Mattiucci N , Bloemer M J , Zheltikov A M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 13902
- [ 24 ] Wen S C , Wang Y W , Su W H , Xiang Y J , Fu X Q , Fan D Y 2006 *Phys. Rev. E* **73** 36617
- [ 25 ] Wen S C , Xiang Y J , Su W H , Hu Y H , Fu X Q , Fan D Y 2006 *Opt. Express* **14** 1568
- [ 26 ] Pendry J B 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 3966

## Influence of dispersive magnetic permeability on modulation instability in metamaterials<sup>\*</sup>

Dai Xiao-Yu Wen Shuang-Chun<sup>†</sup> Xiang Yuan-Jiang

( School of Computer and Communication , Hunan University , Changsha 410082 , China )

( Received 21 March 2007 ; revised manuscript received 13 May 2007 )

### Abstract

The influence of dispersive magnetic permeability on propagation of ultrashort pulses in metamaterials is mainly in that it leads to the appearance of the pseudo- $\chi^{(5)}$ , self-steepening (SS) and second-order nonlinear dispersion terms in the propagation equations. In this paper, the role of dispersive magnetic permeability in modulation instability (MI) in metamaterials is identified based on the Drude model. It is found that in the anomalous dispersion regime, the pseudo- $\chi^{(5)}$  nonlinear parameter, which is always negative, increases the MI frequency and growth rate, which is opposite to that in ordinary positive-index materials; the SS tends to suppress MI regardless of its sign, while the second-order nonlinear dispersion effect tends to stimulate MI in the positive-index region and suppress MI in the negative-index region. In the normal dispersion regime, in which MI cannot occur in the ordinary materials, MI can occur due to the role of the second-order nonlinear dispersion, suggesting a new way of generating solitons or ultrashort pulse trains in the normal dispersion regime.

**Keywords** : metamaterials , modulation instability , dispersive magnetic permeability , second-order nonlinear dispersion

**PACC** : 4225B , 4265 , 4270Y

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 10674045 and 10576012 ) and the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China ( Grant No. 20040532005 ).

<sup>†</sup> E-mail : scwen@hnu.cn