

关联白噪声驱动的具有时间延迟的 Logistic 系统^{*}

郭永峰[†] 徐 伟

(西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

(2007 年 12 月 28 日收到 2008 年 5 月 11 日收到修改稿)

关联白噪声驱动的具有时间延迟的 Logistic 系统可更真实的反映肿瘤细胞的生长问题, 本文通过小时间延迟近似方法对由关联白噪声驱动的具有时间延迟的 Logistic 系统进行了研究, 得到了系统的稳态概率密度, 并进一步分析了加性和乘性噪声强度、噪声关联时间和时间延迟对稳态概率密度的影响以及噪声诱导的非平衡相变现象.

关键词: Logistic 系统, 关联白噪声, 时间延迟, 非平衡相变

PACC: 0540, 6400

1. 引 言

自 20 世纪 70 年代以来, 人们对非线性科学和统计物理的研究取得了重大进展. 经研究发现, 在许多实际的系统中, 例如生物系统、物理系统以及化学系统等, 随机涨落现象是普遍存在的, 引起涨落的主要原因是系统本身动力学行为产生的内噪声或者是外部环境的运动对系统影响而产生的外噪声. 由于一个小的随机力并不仅仅对原有的确定性方程结果产生微小的改变, 在一定的非线性条件下, 它还能对系统的演化起决定性作用^[1], 因此对非线性系统中随机力的研究备受人们所关注. 文献 [1—7] 研究了噪声对驱动的动力系统的稳态概率密度的影响, 并研究了噪声诱导的非平衡相变现象, 文献 [8—11] 对双稳系统的随机共振现象以及平均首次穿越时间等问题进行了研究, 文献 [12—17] 对随机耗散系统的熵流、熵产生以及熵变化率上界进行了研究.

在以往的研究中, 人们主要针对没有时间延迟的随机动力系统进行了探讨, 可是在许多实际的问题中(例如生物系统和光学系统等), 时间延迟对系统可能造成的影响却是不可以忽略的. 所以, 研究具有时间延迟的随机动力系统更符合实际意义. 目前, 对于具有时间延迟的随机动力系统问题的研究已经吸引了越来越多研究者的注意^[18—24], 并得到了许多可行的研究方法和研究结果. 例如, 文献

[21—23] 分别对具有时间延迟的双稳随机系统进行了研究, 并讨论了时间延迟情形下的系统特性. 由于 Logistic 系统可比较准确的反映肿瘤细胞的生长问题, 文献 [25, 26] 分别对该系统在关联噪声驱动下的稳态概率密度和随机共振现象进行了研究. 然而, 在上述的研究中却没有考虑时间延迟对系统本身的影响.

本文主要依据文献 [23, 24] 的研究方法对关联白噪声驱动的具有时间延迟的 Logistic 系统进行了研究, 文中先通过小时间延迟近似方法, 给出了该系统的 FPK 方程, 然后推导得到了系统的稳态概率密度, 并进一步分析了加性和乘性噪声强度、噪声关联时间和时间延迟对稳态概率密度的影响以及该系统在噪声诱导下的非平衡相变现象.

2. 关联噪声驱动的具有时间延迟的 Logistic 系统

Logistic 系统模型是用来分析细胞增长尤其是肿瘤细胞增长的模型之一. 在以往的研究中, 主要考虑了系统外部因素的影响, 而对系统内部因素(如细胞生长过程中的时间延迟因素)没有给与充分的考虑. 然而在实际情形下时间延迟的确是存在的, 在下面的研究中我们将对具有时间延迟的 Logistic 系统进行了探讨. 具有时间延迟的 Logistic 系统所对应的延迟微分方程为^[24]

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10472091)资助的课题.

[†] E-mail: guoyongfeng@mail.nwpu.edu.cn

$$\frac{d}{dt}x(t) = [a - bx(t - \tau)]x(t), \quad (1)$$

其中 $x(t)$ 为细胞数量, a 为细胞增长率, b 为细胞衰减率, τ 为小的时间延迟量. 另外, 由于细胞数量的增长会受到一些外部因素的影响, 如温度、辐射、药物等, 产生乘性噪声, 同时这些外部因素也能够直接抑制细胞数量的增长, 产生加性噪声. 并且这两种噪声可认为是具有相同起源的耦合噪声. 为更真实的反映系统的特性, 我们将对时间延迟以及外部影响因素共同作用下的 Logistic 系统进行研究, 此时, Logistic 系统模型的随机延迟微分方程可描述为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) = & [a - bx(t - \tau)]x(t) \\ & + x(t)\xi(t) - \eta(t), \end{aligned} \quad (2)$$

式中 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 为白关联的高斯白噪声, 它们的均值和方差为

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \eta(t) = 0, \\ \xi(t)\xi(t') &= 2D\delta(t - t'), \\ \eta(t)\eta(t') &= 2Q\delta(t - t'), \\ \xi(t)\eta(t') &= \eta(t)\xi(t') \\ &= 2\lambda\sqrt{DQ}\delta(t - t'), \end{aligned} \quad (3)$$

其中 D 和 Q 分别为乘性和加性噪声强度, λ ($|\lambda| < 1$) 为噪声之间的互关联强度.

方程 (2) 可等价变为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) = & [a - bx(t - \tau)]x(t) \\ & + G_0(x)I(t), \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $I(t)$ 为高斯白噪声, 其均值和方差为

$$\begin{aligned} I(t) &= 0, \\ I(t)I(t') &= 2\delta(t - t'). \end{aligned} \quad (5)$$

并且

$$G_0(x) = (Dx^2 - 2\lambda\sqrt{DQ}x + Q)^2. \quad (6)$$

根据小时间延迟近似^[23, 24], 方程 (4) 可近似化为

$$\frac{d}{dt}x(t) = h(x) + \alpha(x)I(t). \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} h(x) &= (ax - bx^2)(1 + b\tau x), \\ \alpha(x) &= (Dx^2 - 2\lambda\sqrt{DQ}x + Q)^2(1 + b\tau x). \end{aligned} \quad (8)$$

由 (4)–(8) 式可得系统 (2) 的 FPK 方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x}[F(x)P(x, t)] \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x^2}[D(x)P(x, t)], \end{aligned} \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} F(x) &= h(x) + \alpha(x)\frac{d\alpha(x)}{dx}, \\ D(x) &= G^2(x). \end{aligned} \quad (10)$$

由 (8)–(10) 式可得到系统的稳态概率密度表达式为

$$\begin{aligned} P_{st}(x) &= \frac{N}{D(x)} \exp\left\{\int^x \frac{F(x')}{D(x')} dx'\right\} \\ &= \frac{N}{\alpha(x)} \exp\left\{\int^x \frac{h(x')}{G^2(x')} dx'\right\} \\ &= N B(x)^{k-1/2} \alpha(x)^{-1} \\ &\quad \times \exp\left\{\text{marcan}\left(\frac{Dx - \lambda\sqrt{DQ}}{\sqrt{DQ(1-\lambda^2)}}\right)\right\} \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} B(x) &= Dx^2 - 2\lambda\sqrt{DQ}x + Q, \\ \alpha(x) &= 1 + b\tau x, \\ k &= \frac{-b^2\tau Q - 2b\lambda\sqrt{DQ} + aD}{2D(b^2\tau^2 Q + 2b\tau\lambda\sqrt{DQ} + D)}, \\ l &= \sqrt{DQ(1-\lambda^2)}, \\ m &= \frac{bDQ + ab\tau DQ - b^2\tau Q\lambda\sqrt{DQ} - 2b\lambda^2 DQ + aD\lambda\sqrt{DQ}}{Dkl}. \end{aligned} \quad (12)$$

3. 关联噪声和时间延迟对稳态概率密度的影响分析

图 1 给出了稳态概率密度 $P_{st}(x)$ 作为细胞数量 x 的函数随不同乘性噪声强度 D 变化的曲线, 从图中可以看出在时间延迟存在的情况下稳态概率密度函数 $P_{st}(x)$ 出现了单峰现象. 随着乘性噪声强度的增加, 峰的高度先逐渐降低后逐渐升高, 并且峰的位置向左移动. 峰值点的位置经历了从 $x \neq 0$ 跳跃到 $x = 0$ 的相变过程. 可见乘性噪声强度的增加可使得 $P_{st}(x)$ 的峰出现在 $x = 0$ 处, 这说明通过增加乘性噪声强度可以减少肿瘤细胞的生成概率, 从而可以通过增加乘性噪声强度对肿瘤细胞的数量加以控制.

图 2 给出了稳态概率密度 $P_{st}(x)$ 作为细胞数量 x 的函数随不同加性噪声强度 Q 变化的曲线. 在加性噪声强度不是很大的情况下稳态概率密度函数 $P_{st}(x)$ 出现了单峰现象, 此时和图 1 有所类似, 但加性噪声强度增加到一定程度时 $P_{st}(x)$ 会出现一谷一峰的相变现象(图中没有给出). 从图中可以看出

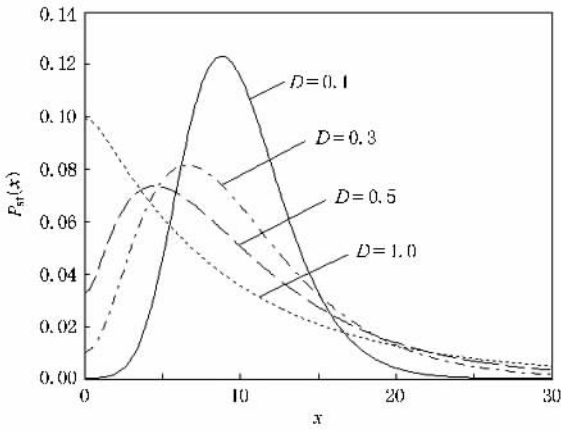


图 1 稳态概率密度 $P_{st}(x)$ 作为细胞数量 x 的函数在 $a = 1.0$, $b = 0.1$, $\tau = 0.1$, $Q = 0.5$, $\lambda = 0.0$ 时随不同乘性噪声强度 D 的变化情况

随着加性噪声强度的增加,峰的位置逐渐降低并且变的比较平坦, $P_{st}(x)$ 在 $x = 0$ 处的值不断增大,可见增加加性噪声强度也可以减少肿瘤细胞的发生概率,但减少的效果并不明显.通过对图 1 和图 2 的比较可以发现,在对肿瘤细胞的数量控制方面,增加乘性噪声的强度比增加加性噪声的强度更有效.

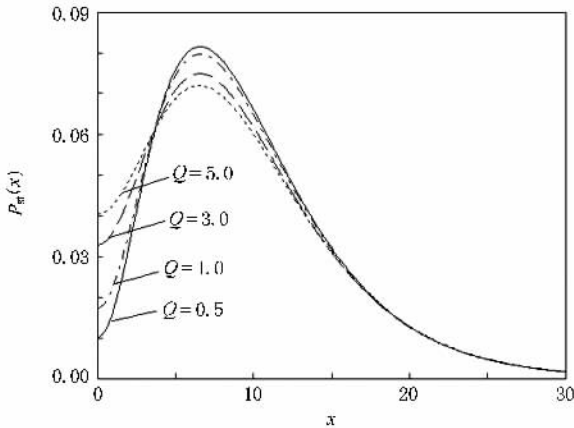


图 2 稳态概率密度 $P_{st}(x)$ 作为细胞数量 x 的函数在 $a = 1.0$, $b = 0.1$, $\tau = 0.1$, $D = 0.3$, $\lambda = 0.0$ 时随不同加性噪声强度 Q 的变化情况

图 3 给出了稳态概率密度 $P_{st}(x)$ 作为细胞数量 x 的函数随不同时间延迟 τ 变化的曲线.从图中可以看出,当时间延迟较小的时候系统的稳态概率密度函数 $P_{st}(x)$ 在 $x \neq 0$ 处出现了单峰现象,当时间延迟进一步的增加后出现了两峰一谷,且随着时间延迟的增加两峰值均逐渐增大,右峰向左峰逐渐靠近.随着时间延迟增加到一定程度后,右峰以及一谷现象逐渐消失, $P_{st}(x)$ 在 $x = 0$ 处出现单峰,可见细

胞自身生长过程中时间延迟越大细胞数量就越少,肿瘤细胞的发生概率也就越小.这一现象与实际情况较为符合.

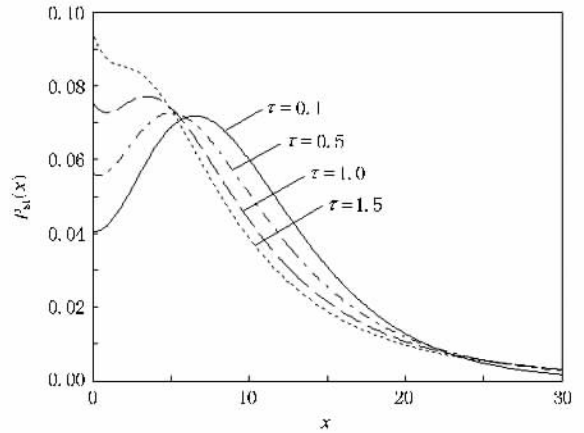


图 3 稳态概率密度 $P_{st}(x)$ 作为细胞数量 x 的函数在 $a = 1.0$, $b = 0.1$, $D = 0.3$, $Q = 0.5$, $\lambda = 0.0$ 时随不同时间延迟 τ 的变化情况

图 4 给出了稳态概率密度 $P_{st}(x)$ 作为细胞数量 x 的函数随不同耦合强度 λ 变化的曲线.从图中可见,在时间延迟存在的情况下 $P_{st}(x)$ 随耦合强度的变化出现了明显的相变现象,随着噪声耦合强度的增加, $P_{st}(x)$ 从单峰逐渐变为两峰一谷,最后又变为单峰,且峰的位置经历了从 $x = 0$ 处转移到了 $x > 0$ 处的突变过程.其中,当耦合强度为负时 $P_{st}(x)$ 的峰值主要集中在 $x = 0$ 处,说明在负的耦合强度下肿瘤细胞的存活数量较低,然而当耦合强度为正值时 $P_{st}(x)$ 的峰值则逐渐偏离 $x = 0$ 处,向 $x > 0$ 处进行转移,这说明在正的耦合强度下肿瘤细胞的存活

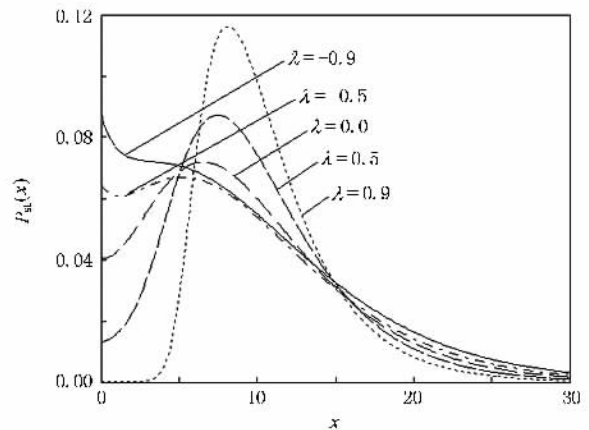


图 4 稳态概率密度 $P_{st}(x)$ 作为细胞数量 x 的函数在 $a = 1.0$, $b = 0.1$, $\tau = 0.1$, $D = 0.3$, $Q = 0.5$ 时随不同噪声耦合强度 λ 的变化情况

数量较高,肿瘤细胞的发生概率较大.从上面的分析可知噪声的耦合强度对稳态概率密度 $P_{st}(x)$ 的影响是较为丰富的.

4. 结 论

本文主要对关联白噪声驱动的具有时间延迟的 Logistic 系统进行了研究,首先通过小时间延迟近似方法给出了该系统的 FPK 方程,并推导得到了系统的稳态概率密度,进一步分析了加性和乘性噪声

强度、噪声关联时间和时间延迟对稳态概率密度的影响以及噪声诱导的非平衡相变现象.研究发现在时间延迟存在的情况下,增加乘性噪声强度比增加加性噪声强度在控制肿瘤细胞的生长方面更有效,且噪声强度、时间延迟量和耦合强度均可产生相变现象,同时也说明了周围环境的变化以及细胞自身的因素的变化均可引起肿瘤细胞的消亡.由于在细胞的生长过程中是存在时间延迟的.希望本文的研究能够为更好的控制肿瘤细胞的生长提供一些新的思路.

-
- [1] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear System* (Shanghai : Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese)[胡 岗 1994 随机力与非线性系统(上海:上海科技教育出版社)] p2
- [2] Vanden Broeck C , Parrondo J M R , Toral R 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 3395
- [3] Blythe R A 2006 *Journal of Physics : Conference Series* **40** 1
- [4] García-Ojalvo J , Sancho J M 1994 *Phys. Rev. E* **49** 2769
- [5] Mangioni S , Deza R , Wio H S , Toral R 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 2389
- [6] Li J H , Huang Z Q 1996 *Phys. Rev. E* **53** 3315
- [7] Denisov S I , Vitrenko A N 2003 *Phys. Rev. E* **68** 046132
- [8] Jia Y , Yu S N , Li J R 2000 *Phys. Rev. E* **62** 1869
- [9] Luo X Q , Zhu S Q 2003 *Phys. Rev. E* **67** 021104
- [10] Jin Y F , Xu W , Xu M , Fang T 2005 *J. Phys. A : Math. Gen.* **38** 3733
- [11] Mei D C , Xie G Z , Cao L , Wu D J 1999 *Phys. Rev. E* **59** 3880
- [12] Bag B C , Banik S K , Ray D S 2001 *Phys. Rev. E* **64** 026110
- [13] Bag B C 2002 *Phys. Rev. E* **66** 026122
- [14] Goswami G , Mukherjee B , Bag B C 2005 *J. Phys. A : Math. Gen.* **38** 1659
- [15] Xie W X , Xu W , Cai L 2005 *Chin. Phys.* **14** 1766
- [16] Xie W X , Xu W , Cai L 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1639 (in Chinese)[谢文贤、徐 伟、蔡 力 2006 物理学报 **55** 1639]
- [17] Xie W X , Xu W , Cai L 2007 *Chin. Phys.* **16** 42
- [18] Mackey M C , Nechaeva I G 1995 *Phys. Rev. E* **52** 3366
- [19] Frank T D 2004 *Phys. Rev. E* **69** 061104
- [20] Frank T D 2005 *Phys. Rev. E* **71** 031106
- [21] Wu D , Zhu S Q 2007 *Phys. Lett. A* **363** 202
- [22] Tsimiring L S , Pikovsky A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 250602
- [23] Guillouzac S , Heures I L , Longtin A 2000 *Phys. Rev. E* **61** 4906
- [24] Guillouzac S , Heures I L , Longtin A 1999 *Phys. Rev. E* **59** 3970
- [25] Ai B Q , Wang X J , Liu G T , Liu L G 2003 *Phys. Rev. E* **67** 022903
- [26] Cai J C , Wang C J , Mei D C 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 1162

Time-delayed Logistic system driven by correlated Gaussian white noises ^{*}

Guo Yong-Feng[†] Xu Wei

(*Department of Applied Mathematics , Northwestern Polytechnical University , Xi 'an 710072 , China*)

(Received 28 December 2007 ; revised manuscript received 11 May 2008)

Abstract

Time-delayed Logistic system driven by correlated Gaussian white noises could be a more true reflection of the growth of tumor cell population. In this paper , we study the Logistic system through the small time delay approximation to obtain the probability density of the system in its steady state , and further analyze the influences of the additive and multiplicative noise intensity , the noise-correlated time and the time delay on the steady-state probability density. The non-equilibrium phase transition phenomena induced by the noises is also studied.

Keywords : Logistic system , correlated Gaussian white noises , time delay , non-equilibrium phase transition

PACC : 0540 , 6400

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10472091).

[†] E-mail : guoyongfeng@mail.nwpu.edu.cn