

# 关于非线性系统两类广义混沌 同步存在性的研究\*

过榴晓<sup>1)†</sup> 徐振源<sup>1)</sup>

1) 江南大学理学院信息与计算科学系, 无锡 214122)

2) 江南大学信息与工程学院, 无锡 214122)

(2007 年 9 月 30 日收到, 2008 年 5 月 13 日收到修改稿)

研究了非线性系统两类广义混沌同步的存在性. 即在响应系统的修正方程在具有渐近稳定平衡点或渐近稳定周期轨道的情况下, 满足一定的条件, 可将广义同步化流形存在性问题转化为 Lipschitz 函数族的压缩不动点问题, 理论上严格证明了该广义同步化流形的指数吸引性. 数值仿真实证了理论的正确性及有效性.

关键词: 广义同步化流形, 压缩不动点, 指数吸引性

PACC: 0545

## 1. 引 言

自 Pecora 和 Carroll<sup>[1]</sup>关于混沌同步的开创性工作以来, 混沌同步特别是完全同步等的研究已取得了丰硕的成果<sup>[2-13]</sup>. 而相对于完全同步, 广义同步(GS)的研究要少得多, 还需要进一步深入研究. 1995 年, Nikolai 等人<sup>[14]</sup>首先描述了 GS 现象, 提出了时间序列相互伪邻域方法可检测 GS. 文献[15]提出了辅助系统方法可以检测到激励响应系统的 GS, 文献[16]讨论了 GS 与等价性的关系并对辅助系统方法做了理论的说明. 文献[17]指出了在一定条件下 GS 流形是光滑的, 否则将是 Hölder 连续的. 文献[18, 19]发现了 GS 中存在多值映射, 文献[20]更指出了 GS 的复杂情况, 对于耦合可逆系统, GS 流形可能由于皱纹而不可微发生尖点, 在不可逆系统, GS 流形可能发生沾污, 此时将出现多值映射. 文献[21]又推广到双向耦合系统的 GS. 文献[22]根据数值实验, 将 GS 分为 3 类, 即被动(passive)GS, 共振(resonant)GS 和相互作用(interacting)GS. 最近文献[23]提出了利用修正系统方法研究 GS. 本文根据修正系统的动力学性质为渐近平衡点渐近稳定周期轨道和混沌态将对应的 GS 发生分成 3 类, 即修正方程具有渐近稳

定平衡点、渐近稳定周期轨道、混沌态.

我们已在文献[24]中严格证明了一类激励响应系统的 GS 存在性和指数吸引性, 方法是利用了惯性流形理论, 但只讨论了耦合矩阵非奇异的情况. 本文基于修正系统方法, 证明在耦合矩阵奇异时第一和第二类型 GS 在一定条件下的光滑 GS 流形的存在性, 也证明其指数吸引性, 并对 Lorenz-Rössler 混沌系统在不同耦合系数下的不同类型广义同步进行了数值仿真.

## 2. 第一类型 GS 存在性

我们研究如下单向耦合的混沌系统:

$$\frac{dy}{dt} = g(y), \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x) + K(y - x), \quad (2)$$

其中  $y \in R_y^n$ ,  $x \in R_x^n$ ,  $g(y)$ ,  $f(x)$  是光滑向量函数,  $A$  和  $K$  是  $n \times n$  常数矩阵. 本文中  $|\cdot|$  表示  $R^n$  中向量的范数,  $\|\cdot\|$  表示矩阵或算子的范数.

定义 1 已知两个动力系统  $X$  和  $Y$ , 如果存在流形  $S = \{(X, Y), X = \Phi(Y)\}$ , 它至少包含一个吸引子, 则称  $X$  和  $Y$  为广义同步化,  $\Phi$  为广义同步函数,  $S$  为广义同步流形.

\* 国家自然科学基金(批准号 60575038)资助的课题.

† E-mail: wxglx2001@263.net

对应于修正系统方法

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x) - Kx \quad (3)$$

的动力学状态为渐近稳定平衡点、渐近稳定周期轨道和混沌,将系统(1)和(2)的GS分为3类.

本文证明常见的前二类GS在一定条件下存在性、光滑性和指数吸引性.

第一类型

当修正方程(3)具有渐近平衡点  $x_0 = 0$ . (如果  $x_0 \neq 0$ , 则可以通过变换将它变换到零点.) 方程(3)可写为

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax - Kx + f(0)x + f(x) - f(0)x \\ &= Bx + F(x), \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $B = A - K - f(0)$ ,  $F(x) = f(x) - f(0)x$ .

显然矩阵  $B$  的特征值具有负实部, 现在激励系统与响应系统可写为

$$\frac{dy}{dt} = g(y), \quad (5)$$

$$\frac{dx}{dt} = Bx + F(x) + Ky. \quad (6)$$

定理1 设系统(5)中  $y \in R_y^n$ , 系统(6)中  $x \in R_x^n$ ,  $B$  具有负实部特征值,  $F: R_x^n \rightarrow R_x^n$ ,  $g: R_y^n \rightarrow R_y^n$  为充分光滑函数. 设以下条件成立:

$$\begin{aligned} |F(x) + Ky - F(x') - Ky'| \\ \leq \lambda[|x - x'| + |y - y'|], \end{aligned} \quad (7)$$

$$|F(x) + Ky| \leq N, \quad (8)$$

$$\|e^{Bt}\| \leq Me^{-\beta t}. \quad (9)$$

当  $t \leq \tau$ ,  $y(\tau) = \eta \in R_y^n$  时, 系统(5)的解  $y(t) = y(t; \tau, \eta)$  在  $(-\infty, \tau)$  存在, 对任  $\eta, \eta'$  成立

$$|y(t; \tau, \eta) - y(t; \tau, \eta')| \leq M_1 e^{\lambda(\tau-t)} |\eta - \eta'|, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{且} \quad |x| &\leq D, \\ MN/\beta &\leq D, \\ \lambda M/\beta &\leq 1, \\ \frac{\lambda M(1 + \Delta)M_1}{\beta - \mu} &\leq \Delta, \end{aligned} \quad (11)$$

其中  $\lambda, M, M_1, N, \beta, \mu, D, \Delta$  均为非负常数, 则(5)和(6)式存在一个GS流形:

$S = \{ (x, y) \mid x = \alpha(y), -\infty < t < \infty, y \in R_y^n \}$ , 满足  $|\alpha(y)| \leq D, \forall y \in R_y^n, |\alpha(y) - \alpha(y')| \leq \Delta |y - y'|, \forall y, y' \in R_y^n$ .

证明 要寻找广义同步化流形  $S$ , 使得它是由 Lipschitz 函数  $\sigma: R_y^n \rightarrow R_x^n$  的图构造而得, 即  $S =$

$\text{Graph } \sigma = \{ (y, x) \mid x = \sigma(y) \}$ .  $\sigma$  作为一个以下定义的算子在函数类  $F_{D, \Delta}$  上的不动点得到的. 令  $F_{D, \Delta}$  为满足以下条件

$$|\alpha(y)| \leq D, \forall y \in R_y^n;$$

$$|\alpha(y) - \alpha(y')| \leq \Delta |y - y'|, \forall y, y' \in R_y^n \quad (12)$$

的 Lipschitz 函数族. 在  $F_{D, \Delta}$  上引入距离  $\| \sigma_1 - \sigma_2 \| = \sup_{y \in R_y^n} | \sigma_1(y) - \sigma_2(y) |$ , 则  $F_{D, \Delta}$  是一个完备的度量空间. 令  $t \leq \tau$ ,  $y(\tau) = \eta \in R_y^n$  时 (5) 式的解  $y(t) = y(t; \tau, \eta)$  在  $(-\infty, \tau)$  存在.

现定义算子

$$\alpha(\sigma)(\tau, \eta) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{\lambda(\tau-s)} [F(\alpha(y(s))) + Ky(s)] ds. \quad (13)$$

其中  $y(s) = y(s; \tau, \eta)$ .

我们要证明映射  $G$  将  $F_{D, \Delta}$  映到  $F_{D, \Delta}$ , 且为压缩映射.

$$|\alpha(\sigma)(\tau, \eta)| \leq \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\lambda(\tau-s)} MN ds = \frac{MN}{\beta} \leq D,$$

设  $\sigma, \sigma'$  是满足(12)式的两个映射,  $\eta, \eta' \in R_y^n$ , 且令  $y(t) = y(t; \tau, \eta), y'(t) = y(t; \tau, \eta')$ , 那么, 当  $t \leq \tau$ ,  $|y(t) - y'(t)| \leq e^{\lambda(\tau-t)} M_1 |\eta - \eta'|$ , 有

$$\begin{aligned} &|\alpha(\sigma)(\tau, \eta) - \alpha(\sigma')(\tau, \eta')| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\tau} e^{\lambda(\tau-s)} [F(\alpha(y(s))) + Ky(s) - F(\sigma'(y(s))) - Ky'(s)] ds \right| \\ &\leq \left| \int_{-\infty}^{\tau} M \lambda e^{-\lambda(\tau-s)} [|\alpha(y(s)) - \sigma'(y'(s))| + |y(s) - y'(s)|] ds \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\tau} M \lambda e^{-\lambda(\tau-s)} [|\alpha(y(s)) - \sigma'(y(s))| + |\sigma'(y(s)) - \sigma'(y'(s))| + |y(s) - y'(s)|] ds \\ &\leq \lambda M \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\lambda(\tau-s)} [\|\sigma - \sigma'\| + (1 + \Delta) e^{\lambda(\tau-s)} M_1 |\eta - \eta'|] ds \\ &= \frac{\lambda M}{\beta} \|\sigma - \sigma'\| + \frac{\lambda M(1 + \Delta) M_1}{\beta - \mu} |\eta - \eta'| \\ &\leq \frac{\lambda M}{\beta} \|\sigma - \sigma'\| + \Delta |\eta - \eta'|. \end{aligned}$$

当  $\eta = \eta'$  时, 则上式表明  $G$  为  $F_{D, \Delta}$  上的压缩映射; 当  $\sigma = \sigma'$ , 上式表明  $G(\sigma)$  为 Lipschitz 映射, 从而存在唯一不动点, 即存在 Lipschitz 光滑的GS流形.

现在证明  $S$  的不变性. 令  $(x_0, y_0) \in S, x_0 = \alpha(y_0)$ . 对方程  $\frac{dy}{dt} = g(y), y(t_0) = y_0$ , 令  $x(t) =$

$\alpha(y(t))$  要证明  $(x(t), y(t)) \in S$ , 只要证明  $x(t) = \alpha(y(t))$  满足方程 (13), 即

$$\frac{dx}{dt} = Bx + F(\alpha(y)) + Ky.$$

事实上, 由压缩不动点定理知这个方程有唯一解

$$x_b(t) = \int_{-\infty}^t e^{K(t-s)} [F(\alpha(y(s))) + Ky(s)] ds.$$

而且当  $t \rightarrow \infty$ ,  $x_b(t)$  是有界的.

需要注意的是, 由于混沌系统的解大部分是有界的, 因此定理 1 中条件 (8) 可以保证的, 条件 (9) 是因为  $B$  具有负实部, 若驱动系统 (1) 是混沌系统, 具有最大的正 Lyapunov 指数 (10) 式也容易得到, 而 (11) 式条件要求略强, 如果刻划渐近稳定的指数  $\beta$  充分大, 驱动系统 (1) 的正 Lyapunov 充分小, 也是能够成立的. 这可以保证应用压缩不动点定理和 GS 流形光滑性, 如果减弱条件 (11), 将导致 GS 流形的 Hölder 连续性, 此时情况更复杂, 我们将另文给出.

**定理 2** 在定理 1 的条件下, GS 流形是指数吸引的, 特别地, 当  $x(t), y(t)$  为 (5) 和 (6) 式的解, 有

$$\begin{aligned} & |x(t) - \alpha(y(t))| \\ & \leq M |x(t_0) - \alpha(y(t_0))| e^{(-\beta + M\lambda)(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (14)$$

定理 2 的证明中要用到以下引理 [25]:

**引理 3** 设  $\phi(t), \psi(t), \omega(t)$  为定义在  $[a, b]$  上的连续函数,  $\omega(t) > 0, \psi(x)$  为单调非负不减函数, 如果

$$\phi(x) \leq \psi(x) + \int_a^x \omega(s)\phi(s) ds, \quad (15)$$

则有不等式

$$\phi(x) \leq \psi(x) e^{\int_a^x \omega(s) ds}.$$

证明定理 2: 方程 (6) 的解可写为

$$x(t) = e^{K(t-t_0)} x(t_0) + \int_0^t e^{K(t-s)} [F(x) + Ky] ds,$$

在  $S$  上

$$\alpha(y) = \int_{-\infty}^t e^{K(t-s)} [F(\alpha(y(s))) + Ky(s)] ds,$$

则有

$$\begin{aligned} \xi(t) &= x(t) - \alpha(y(t)) = x(t) \\ &= e^{K(t-t_0)} x(t_0) + \int_0^t e^{K(t-s)} [F(x) + Ky] ds \\ &\quad - \int_{-\infty}^t e^{K(t-s)} [F(\alpha(y(s))) + Ky(s)] ds, \\ \xi(t) &= e^{K(t-t_0)} \xi(t_0) \\ &= \int_0^t e^{K(t-s)} [F(x(s)) - F(\alpha(y(s)))] ds, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \xi(t) &= x(t) - \alpha(y(t)) \\ &= e^{K(t-t_0)} \xi(t_0) \\ &\quad + \int_0^t e^{K(t-s)} [F(x(s)) - F(\alpha(y(s)))] ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\xi(t)| &\leq e^{-\beta(t-t_0)} M |\xi(t_0)| \\ &\quad + \lambda M \int_0^t e^{-\beta(t-s)} |x(s) - \alpha(y(s))| ds \\ e^{K(t-t_0)} |\xi(t)| &\leq M |\xi(t_0)| \\ &\quad + \lambda M \int_0^t e^{-\beta(t_0-s)} |\xi(s)| ds, \end{aligned}$$

由引理 3 知

$$e^{K(t-t_0)} |\xi(t)| \leq M |\xi(t_0)| e^{M\lambda(t-t_0)},$$

故有

$$|\xi(t)| \leq M |\xi(t_0)| e^{(-\beta + M\lambda)(t-t_0)}.$$

### 3. 第二类型的 GS 存在性

当修正方程 (3) 具有渐近稳定周期解  $\bar{x}(t) = \bar{x}(t+T), T > 0$ , 我们证明第二类型可以归结为第一类型即可, 为此引入以下两个引理:

**引理 4** [26] 对于周期线性微分方程

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (16)$$

其中  $A(t)$  是连续函数,  $A(t+T) = A(t), T > 0$ , 则存在周期为  $T$  的连续函数  $Z(t)$ , 令  $u(t) = Z(t)x$ , 则 (16) 式可变换成

$$\frac{dw}{dt} = Bw, \quad (17)$$

其中  $B$  为常数矩阵.

**引理 5** [26] 设 (16) 式经周期线性变换成为 (17) 式

$B$  的特征根实部为  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \frac{1}{2}(A(t) + A^*(t))$  的特征根为  $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)$ , 则有酉矩阵  $S(t) = (S_{ij}(t))$  使得

$$\beta_i = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{j=1}^n |S_{ij}(t)|^2 \alpha_j(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

令  $e(t) = x(t) - \bar{x}(t)$  则有

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= Ax + f(x) - Kx \\ &\quad - [A\bar{x} + f(\bar{x}) - K\bar{x}] + Ky \\ &= Ae - Ke + Df(\bar{x})e + f(x) \\ &\quad - f(\bar{x}) - Df(\bar{x})e \\ &= A(t)e + F(x, \bar{x}, e) + Ky, \end{aligned} \quad (18)$$

其中  $A(t) = A - K + Df(\bar{x}), F(x, \bar{x}, e) = f(x) -$

$$f(\bar{x}) - Df(\bar{x})e.$$

由于引理 4 (18) 式可以由  $e(t) = Z^{-1}(t)u(t)$  变换成

$$\frac{dw}{dt} = Bw + Z(t)F(Z^{-1}u(t)) + Z(t)Ky \quad (19)$$

因此  $x(t)$  在  $\bar{x}(t)$  附近的 GS 流形  $x(t) = \bar{x}(t) + \alpha(y(t))$  可转变为

$$e(t) = Z^{-1}(t)u(t) = \alpha(y(t)),$$

$$u(t) = Z(t)\alpha(y(t)) = \sum(y(t)).$$

我们只要证明

$$\frac{dy}{dt} = g(y), \quad (20)$$

$$\frac{dw}{dt} = Bw + Z(t)F(Z^{-1}u(t)) + Z(t)Ky \quad (21)$$

存在 GS 流形 则即得到 (1) 和 (2) 式在第二类型下的 GS 流形.

类似于定理 1 和定理 2 可得到

**定理 3** 设系统 (20) 中  $y \in R_y^n$ , 系统 (21) 中  $w \in R_w^n$ ,  $B$  具有负实部特征值,  $F: R_w^n \rightarrow R_w^n$ ,  $g: R_y^n \rightarrow R_y^n$  为充分光滑函数. 设以下条件成立:

$$|ZF(Z^{-1}w) + ZKy - ZF(Z^{-1}w') - ZKy'|$$

$$\leq \lambda(|w - w'| + |y - y'|),$$

$$|ZF(Z^{-1}w) + ZKy| \leq N,$$

$$\|e^{Bt}\| \leq Me^{-\beta t}.$$

当  $t \leq \tau$ ,  $y(\tau) = \eta \in R_y^n$  时 (20) 式的解  $y(t) = y(t; \tau, \eta)$  在  $(-\infty, \tau)$  存在, 对任  $\eta, \eta'$  成立

$$|y(t; \tau, \eta) - y(t; \tau, \eta')| \leq M_1 e^{\lambda(\tau-t)} |\eta - \eta'|$$

$$\text{且 } |x| \leq D, MN/\beta \leq D, \lambda M/\beta \leq 1, \frac{\lambda M(1+\Delta)M_1}{\beta-\mu} \leq \Delta$$

其中  $\lambda, M, M_1, N, \beta, \mu, D, \Delta$  均为非负常数, 则 (20) 和 (21) 式存在一个 GS 流形.

$S = \{w, y \mid w = \sum(y), -\infty < t < \infty, y \in R_y^n\}$  满足  $|\sum(y)| \leq D, |\sum(y) - \sum(y')| \leq \Delta |y - y'|$ .

(1) 和 (2) 式存在第二类型 GS 流形

$$x(t) = \bar{x}(t) + \alpha(y(t))$$

$$= \bar{x}(t) + Z^{-1} \sum(y(t)).$$

**定理 4** 在定理 3 的条件下, GS 流形是指数吸引的. 特别地, 当  $u(t), y(t)$  为 (20) 和 (21) 式的解, 则有

$$|u(t) - \sum(y(t))|$$

$$\leq M |u(t_0) - \sum(y(t_0))| e^{(-\beta + M\lambda)(t-t_0)}.$$

对应于 (1) 和 (2) 式 则有

$$|x(t) - \bar{x}(t) - \alpha(y(t))|$$

$$\leq M |x(t_0) - \bar{x}(t_0) - \alpha(y(t_0))| e^{(-\beta + M\lambda)(t-t_0)}.$$

需要注意的是, 当修正方程为混沌态时, 可能的情况相当复杂. 我们对一些有名的混沌系统, 如不同参数的 Lorenz-Lorenz, Rössler-Rössler 系统, 不同驱动和相应 Lorenz-Chen, Lorenz-Rössler 系统等等, 作了大量的仿真数值广义同步实验. 基本都属于第一、第二类广义同步, 目前还未检测到第三类广义同步的存在性.

### 4. 数值例子

对于驱动系统 (1) 和响应系统 (2), 我们采用经典的构造辅助系统方法<sup>[15,16]</sup>检测第一类和第二类广义同步. 讨论 Lorenz-Rössler 混沌系统在不同耦合系数下的不同类型广义同步, 则

$$\text{驱动系统 } p: \begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha(y_2 - y_1), \\ \dot{y}_2 = ry_1 - y_2 - y_1 y_3, \\ \dot{y}_3 = y_1 y_2 - b_1 y_3. \end{cases}$$

响应系统  $q$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3 + k_1(y_1 - x_1), \\ \dot{x}_2 = x_1 + a_2 x_2 + k_2(y_2 - x_2), \\ \dot{x}_3 = b_2 + x_3(x_1 - c_2) + k_3(y_3 - x_3). \end{cases}$$

辅助系统  $m$ :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -z_2 - z_3 + k_1(y_1 - z_1), \\ \dot{z}_2 = z_1 + a_2 z_2 + k_2(y_2 - z_2), \\ \dot{z}_3 = b_2 + z_3(z_1 - c_2) + k_3(y_3 - z_3). \end{cases}$$

$$\text{修正方程 } a: \begin{cases} \dot{x}_1^* = -x_2^* - x_3^* - k_1 x_1^*, \\ \dot{x}_2^* = x_1^* + a_2 x_2^* - k_2 x_2^*, \\ \dot{x}_3^* = b_1 + x_3^*(x_1^* - c_2) - k_3 x_3^*. \end{cases}$$

取  $\sigma = 10, r = 28, b_1 = 8/3, a_2 = 0.15, b_2 = 0.2, c_2 = 10$ ,  $k_1, k_2, k_3$  为耦合系数. 此时, 驱动系统  $p$  为混沌系

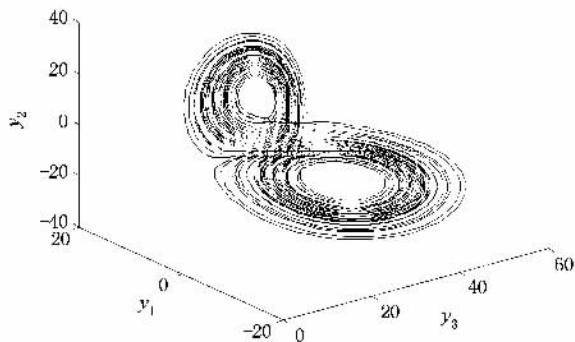


图 1 驱动系统 Lorenz 混沌吸引子

统 见图 1. 不失一般性 在数值实验中 任意给定取初值  $(y_1(0), y_2(0), y_3(0), x_1(0), x_2(0), x_3(0), z_1(0), z_2(0), z_3(0), x_1^*(0), x_2^*(0), x_3^*(0)) = (1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0, 9.0, 1.0, 2.0, 3.0)$ .

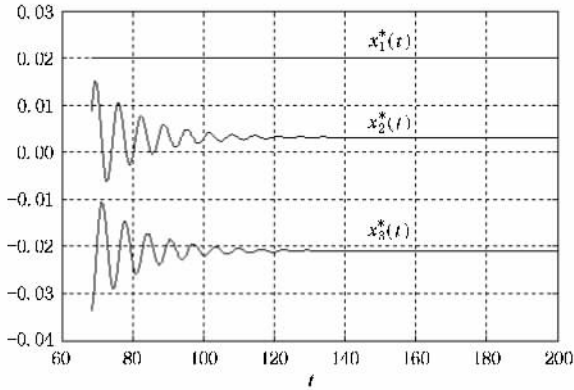
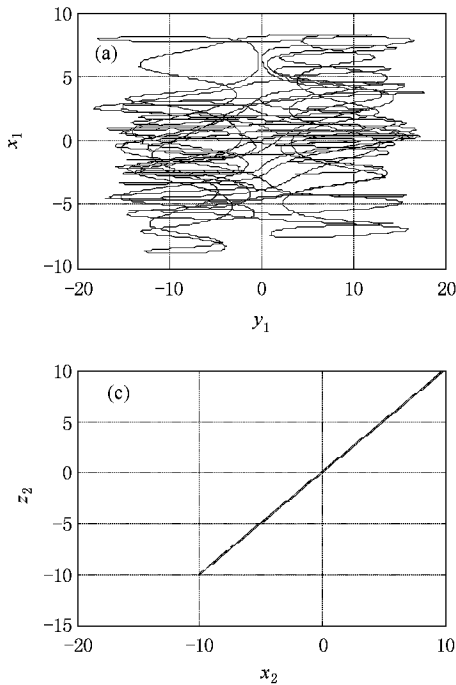


图 2 耦合系数为  $k_1 = 0.3, k_2 = 0, k_3 = 0$  时, 修正方程  $x_1^* - t, x_2^* - t, x_3^* - t$  演化图

4.1. 第一类广义同步

当耦合系数  $k_1 = 0.3, k_2 = 0, k_3 = 0$  时, 对应(4)式中矩阵

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 1 & 0.15 & 0 \\ 0.02 & 0 & -9.9969 \end{pmatrix},$$



具有负实部特征值  $-0.0760 + 0.9742i, -0.0760 - 0.9742i, -9.9949$  相应修正系统具有渐近稳定的平衡点  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (0.0031, -0.0209, 0.0200)$ , 验证满足定理 1 诸条件, 辅助系统和响应系统达到完全同步, 见图 3(b)(c)(d), 得到第一类型广义同步.

4.2. 第二类广义同步

当耦合系数  $k_1 = 0.05, k_2 = 0.05, k_3 = 0.3$  时, 对应修正系统(3)具有渐近稳定周期轨道(见图 4), 此时, 由辅助系统方法观测到驱动与响应系统达到广义同步, 见图 5.

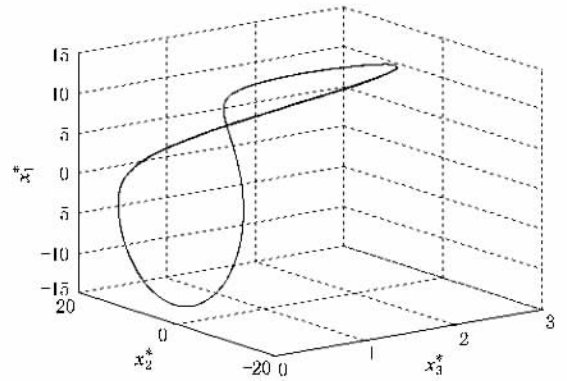


图 4 耦合系数为  $k_1 = 0.05, k_2 = 0.05, k_3 = 0.3$  时, 修正方程三维图

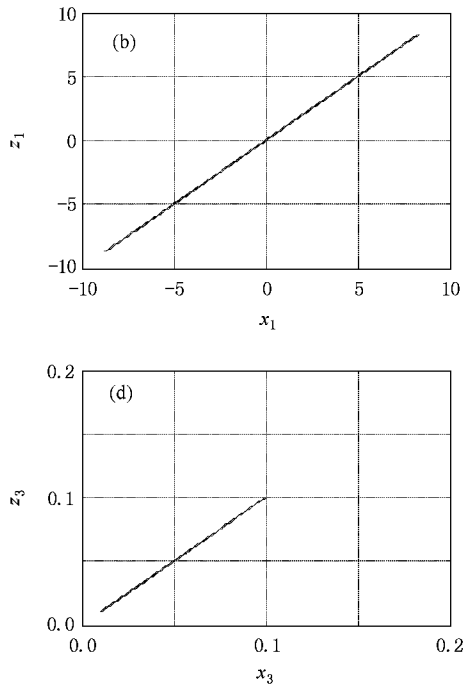


图 3 耦合系数为  $k_1 = 0.3, k_2 = 0, k_3 = 0$  (a)为驱动系统与响应系统  $y_1 - x_1$  相图 (b)(c)(d)为响应系统与辅助系统对应  $x_1 - z_1, x_2 - z_2, x_3 - z_3$  相图

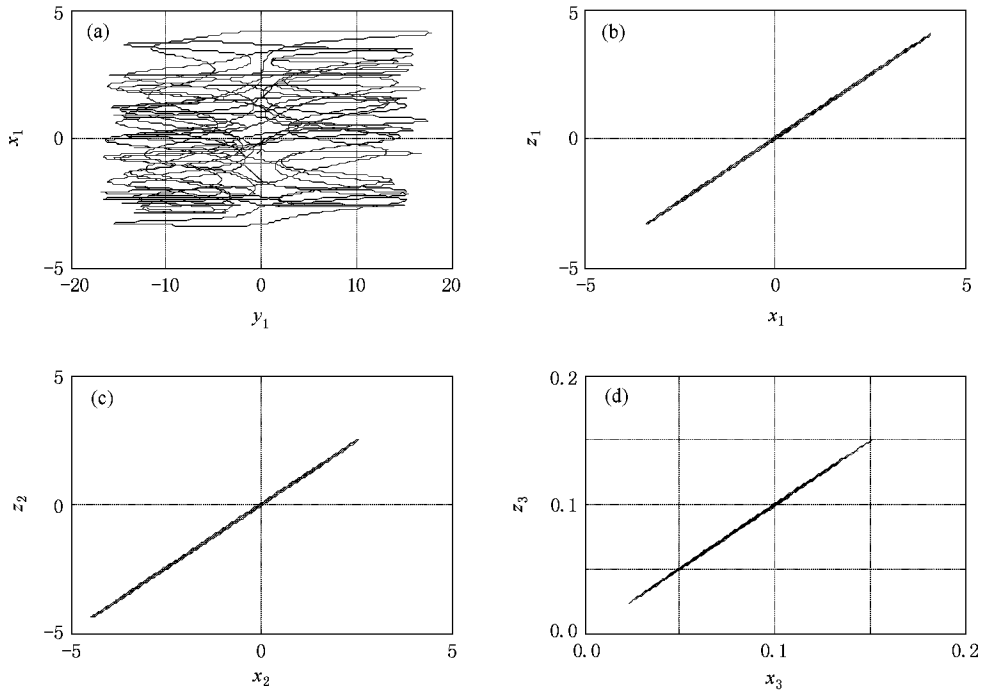


图 5 耦合系数为  $k_1 = 0.05$ ,  $k_2 = 0.05$ ,  $k_3 = 0.3$  (a) 为驱动系统与响应系统  $y_1 - x_1$  相图 (b) (c) (d) 为响应系统与辅助系统对应  $x_1 - z_1$ ,  $x_2 - z_2$ ,  $x_3 - z_3$  相图

## 5. 讨 论

关于激励响应系统的 GS 的发生的数学物理机理长期以来是没有完全解决的问题, 在文献 [24] 研究的理论基础上, 我们初步解决了第一、第二类型的

GS 的存在性、光滑性和指数存在性. 对于第三种类型 (修正系统为混沌) 情况下可能出现的 GS 问题, 情况相当复杂, 可以用指数二分性理论进行讨论. 关于 GS 流形的不光滑导致 Hölder 连续性及更复杂的双向耦合和网络连接的动力系统情况, 我们将作进一步研究.

- [1] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [2] Lu J, Cao J 2005 *Chaos* **15** 043901
- [3] Huang X, Cao J 2006 *Nonlinearity* **19** 2797
- [4] Cao J, Wang Z Y 2007 *Phys. A* **38** 718
- [5] Tu L L, Lu J A 2005 *Chin. Phys.* **14** 1755
- [6] Zhang J, Xu H B, Wang H J 2006 *Chin. Phys.* **15** 953
- [7] Hua C C, Guan X P 2004 *Chin. Phys.* **13** 1391
- [8] Zhang X Y, Guan X P, Li H G 2005 *Chin. Phys.* **14** 279
- [9] Gao B J, Lu J A 2007 *Chin. Phys.* **16** 666
- [10] Hu A H, Xu Z Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3132 (in Chinese) [胡爱花、徐振源 2007 物理学报 **56** 3132]
- [11] Wu X J, Wang X Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6261 (in Chinese) [武相军、王兴元 2006 物理学报 **55** 6261]
- [12] Liu Y Z, Jiang C S, Ling C S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 707 (in Chinese) [刘扬正、姜长生、林长圣 2007 物理学报 **56** 707]
- [13] Guo L X, Xu Z Y, Hu M F 2008 *Chin. Phys. B* **17** 836
- [14] Nikolai F R, Mikhail M S, Tsimring L S 1995 *Phys. Rev. E* **51** 980
- [15] Henry D I A, Nikolai F R, Mikhail M S 1996 *Phys. Rev. E* **53** 4528
- [16] Kocarev L, Parlitz U 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1816
- [17] Brian R H, Edward O, James A Y 1997 *Phys. Rev. E* **55** 4039
- [18] Zheng Z G, Hu G 2000 *Phys. Rev. E* **62** 7882
- [19] Nikolai F R, Valentin S A, Clifford T L, Jean-Rene C, Albert C 2001 *Phys. Rev. E* **64** 016217
- [20] Paul S, Ernest B, Kresimir J, Evelyn S, Steven J S 2002 *Phys. Rev. E* **65** 046225
- [21] Zheng Z G, Wang X G, Cross M C 2002 *Phys. Rev. E* **65** 056211
- [22] Alexander E H, Alexey A K 2005 *Phys. Rev. E* **71** 067201
- [23] Yang J Z, Hu G 2007 *Phys. Lett. A* **361** 332
- [24] Li F, Xu Z Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 590 (in Chinese) [李芳、徐振源 2006 物理学报 **55** 590]

- [ 25 ] Wang R H , Wu Z Q 1979 *Lectures on Ordinary Differential Equations* ( Beijing : People Education Press ) ( in Chinese ) [ 王柔怀、伍卓群 1979 常微分方程讲义 ( 北京 : 人民教育出版社 ) ] *Manifold* ( Shanghai : Shanghai Science and Technology Press ) ( in Chinese ) [ 林振声 1986 概周期微分方程与积分流形 ( 上海 : 上海科学技术出版社 ) ]
- [ 26 ] Ling Z S 1986 *Almost Periodic Differential Equation and Integral*

## The existence of two types of generalized synchronization of nonlinear systems<sup>\*</sup>

Guo Liu-Xiao<sup>1,2,†</sup> Xu Zhen-Yuan<sup>1)</sup>

<sup>1</sup> *School of Science , Jiangnan University , Wuxi 214122 , China* )

<sup>2</sup> *School of Information Technology , Jiangnan University , Wuxi 214122 , China* )

( Received 30 September 2007 ; revised manuscript received 13 May 2008 )

### Abstract

The existence of two types of generalized synchronization of chaotic nonlinear systems is studied. When the modified system collapses to a stable equilibrium or periodic oscillation , the existence of generalized synchronization can be converted to the problem of compression fixed point under certain conditions. Strict theoretical proofs are given to the exponential attractive property of generalized synchronization manifold. Numerical simulations illustrate the correctness of the present theory.

**Keywords :** generalized synchronization manifold , compression fixed point , exponential attractive property

**PACC :** 0545

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No.60575038 ).

<sup>†</sup> E-mail : wxglx2001@263.net