

# 随机激励下二自由度碰撞振动系统的响应分析<sup>\*</sup>

王 亮<sup>†</sup> 徐 伟 李 颖

(西北工业大学理学院应用数学系, 西安 710072)

(2007 年 9 月 28 日收到, 2008 年 1 月 29 日收到修改稿)

研究了一类二自由度碰撞振动系统在随机噪声激励下的响应问题, 展示了这种非光滑系统在倍周期分岔通向混沌的道路中存在的擦边分岔行为. 通过定义一种随机响应的度量, 讨论了随机噪声对于系统响应的影响, 并发现在某些参数条件下, 随机噪声对于系统响应的影响是明显的, 甚至改变了运动的性质. 数值模拟表明此法是研究噪声激励下非光滑系统响应的一种有效方法.

关键词: 非光滑系统, 二自由度碰撞振动系统, 擦边分岔, 倍周期分岔

PACC: 0547

## 1. 引 言

非光滑动力系统是工程实际中经常遇到的一类系统. 所谓非光滑, 就是指系统的状态空间非连续或者向量场非连续、不可积或不可导. 而由于状态空间不连续所产生的碰撞振动系统作为一类重要的非光滑系统, 引起了学术界的广泛关注<sup>[1-11]</sup>. 早在 20 世纪 90 年代, 文献 1—3 就对这类系统的基本动力学行为作了研究, 并分析了这类非光滑系统所特有的擦边分岔行为. 近几年, Dimentberg 与 Iourtchenko 通过线性化和能量平衡法讨论了一系列单自由度特殊非线性碰撞振动系统在白噪声激励下的响应问题<sup>[4,5]</sup>. 文献 6, 7 先后研究了碰撞振动系统的混沌控制与同步问题. 实际中, 遇到的非光滑系统经常是高维数、多自由度的, 所以研究这种较复杂的系统具有更加重要的意义. Luo 等人分别讨论了两种二自由度确定性碰撞振动系统的分岔与混沌行为<sup>[8,9]</sup>, 并揭示了这些系统不同于其他系统的一些特性及通向混沌的道路. 迄今为止, 对于非光滑碰撞振动系统的研究大多是针对单自由度或者确定性多自由度的, 而对于多自由度随机系统的研究文献却比较有限, 本文以二自由度碰撞振动系统为研究对象, 讨论了其特有的动力学行为和随机白噪声对于其响应的影响, 发现了一些光滑系统所没有的现象.

## 2. 模型的提出及理论分析

考虑如图 1 所示的二自由度碰撞振动系统<sup>[8]</sup>, 其中  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  分别表示作用于物体 1 和 2 上的外部激励, 当物体 1 的位移等于  $b$  时, 系统与右侧的约束面发生碰撞. 则在白噪声激励下系统的无量纲运动方程由 (1) 式给出, (2) 式描述了系统在约束面上的速度跃迁. 式中  $a, c, k$  和  $m$  均为系统参数, (1) 式右端为谐和与随机的联合激励, 其中  $\xi(t)$  表示高斯白噪声,  $\delta$  用来描述随机噪声的强度,  $r$  表示恢复系数, 其大小由碰撞面本身决定, 一般取 0.8.

$$\begin{aligned} & \ddot{x}_1 + 2a\dot{x}_1 - 2a\dot{x}_2 + x_1 - x_2 \\ &= (1 - F) [\sin(\omega t + \tau) + \delta\xi(t)], \quad x_1 < b, \quad (1) \\ & m\ddot{x}_2 - 2a\dot{x}_1 + 2ac\dot{x}_2 - x_1 + kx_2 \\ &= F [\sin(\omega t + \tau) + \delta\xi(t)], \end{aligned}$$

$$\dot{x}_{1+} = -rx_{1-}, \quad x_1 = b, \quad (2)$$

对于方程 (1), 当满足  $x_1 < b$  时它是一个线性的高维微分方程, 根据叠加原理, 可将其响应<sup>[10]</sup> 写为

$$x_1 = x_{1d} + x_{1s}, \quad x_2 = x_{2d} + x_{2s}, \quad (3)$$

其中  $x_{id}$  和  $x_{is}$  ( $i = 1, 2$ ) 分别表示系统响应的确定性部分和随机部分. 将 (3) 式代入 (1) 式, 整理, 可得如下两部分:

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金 (批准号: 10472091) 资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: lovenicholaswang@mail.nwpu.edu.cn

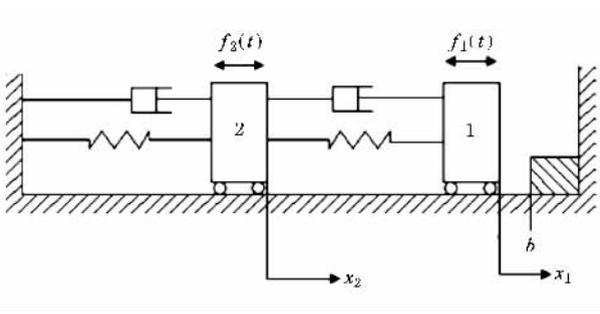


图 1 二自由度碰撞振动系统示意图

$$\begin{cases} \ddot{x}_{1d} + 2ax_{1d} - 2ax_{2d} + x_{1d} - x_{2d} \\ = (1 - F) \sin(\omega t + \tau), \\ m\ddot{x}_{2d} - 2ax_{1d} + 2acx_{2d} - x_{1d} + kx_{2d} \\ = F \sin(\omega t + \tau), \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_{1s} + 2ax_{1s} - 2ax_{2s} + x_{1s} - x_{2s} \\ = (1 - F) \delta \xi(t), \\ m\ddot{x}_{2s} - 2ax_{1s} + 2acx_{2s} - x_{1s} + kx_{2s} \\ = F \delta \xi(t), \end{cases} \quad (5)$$

约束条件为  $x_{1d} + x_{1s} < b$ . (4) 式是一个确定性的微分方程组, 可解, 而 (5) 式是一个随机微分方程组, 为研究系统的响应, 定义下式作为系统随机响应的一种度量:

$$\tilde{E}x_1 = \begin{cases} \sqrt{E(x_{1d} + x_{1s})^2} & x_{1d} + x_{1s} \geq 0, \\ -\sqrt{E(x_{1d} + x_{1s})^2} & x_{1d} + x_{1s} < 0, \end{cases} \quad (6)$$

化简, 并根据数理统计知识及实际的数值模拟, 可用如下可处理的形式来代替 (6) 式:

$$\tilde{E}x_1 = \begin{cases} \sqrt{E(x_{1d} + x_{1s})^2} & x_{1d} + \sigma \geq 0, \\ -\sqrt{E(x_{1d} + x_{1s})^2} & x_{1d} + \sigma < 0, \end{cases} \quad (7)$$

其中  $\sigma$  为  $x_{1s}$  的标准差. 同理, 可对响应  $x_2$ ,  $\dot{x}_1$  和  $\dot{x}_2$  可作类似于 (7) 式的处理, 得到约束条件与跃变方程分别为  $\tilde{E}x_1 < b$  和  $\tilde{E}\dot{x}_{1+} = -r\tilde{E}\dot{x}_{1-}$ . 以下研究中, 就以 (7) 式的定义作为系统随机响应的理论解.

求解随机微分方程 (5), 将其写为如下形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1s} = y_{1s}, \\ \dot{y}_{1s} = (1 - F) \delta \xi(t) - 2ay_{1s} + 2ay_{2s} - x_{1s} + x_{2s}, \\ \dot{x}_{2s} = y_{2s}, \\ \dot{y}_{2s} = [F \delta \xi(t) + 2ay_{1s} - 2acy_{2s} + x_{1s} - kx_{2s}] / m. \end{cases} \quad (8)$$

根据文献 [12], 可知 (8) 式的稳态联合概率密度函数  $p(x_{1s}, y_{1s}, x_{2s}, y_{2s})$  由如下 FPK 方程支配:

$$\frac{\partial}{\partial x_{1s}} y_{1s} p + \frac{\partial}{\partial y_{1s}} (-2ay_{1s} + 2ay_{2s}$$

$$\begin{aligned} & - x_{1s} + x_{2s}) p + \frac{\partial}{\partial x_{2s}} y_{2s} p \\ & + \frac{\partial}{\partial y_{2s}} \frac{1}{m} (2ay_{1s} - 2acy_{2s} + x_{1s} - kx_{2s}) p \\ & - \frac{\partial^2}{\partial y_{1s}^2} \frac{1}{2} (1 - F) \delta^2 p \\ & - \frac{\partial^2}{\partial y_{1s} \partial y_{2s}} \frac{1}{m} (1 - F) F \delta^2 p \\ & + \frac{\partial^2}{\partial y_{2s}^2} \frac{1}{2m^2} F^2 \delta^2 p = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

由此, 可得<sup>[12, 13]</sup>

$$Ex_{1s} = Ey_{1s} = Ex_{2s} = Ey_{2s} = 0, \quad (10)$$

$$Ex_{1s}^2 = \frac{(1 - F)^2 \delta^2}{4a},$$

$$Ey_{1s}^2 = \frac{(1 - F)^2 \delta^2}{4a}, \quad (11)$$

$$Ex_{2s}^2 = \frac{F^2 \delta^2}{4akc},$$

$$Ey_{2s}^2 = \frac{F^2 \delta^2}{4amc},$$

根据 (10) 和 (11) 式, 即可确定随机系统的理论解  $\tilde{E}x_1$ ,  $\tilde{E}\dot{x}_1$ ,  $\tilde{E}x_2$  和  $\tilde{E}\dot{x}_2$ .

### 3. 数值模拟

在以下分析中, 通过比较 Monte-Carlo 数值模拟法与本文方法的理论解来说明这种方法的有效性. 取参数为  $a = 0.1$ ,  $m = 1.0$ ,  $c = k = 3.0$ ,  $F = 0$ ,  $\tau = 0$ ,  $b = 0$  时的系统作为研究对象, 初始条件同取为  $(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2)^T = (0.0, 0.0, -1.0, 0.0)^T$ , 当  $\delta = 0$ , 即没有随机激励时, 随着  $\omega$  从 3.85 到 4.1 的变化, 系统的分岔图如图 2 所示.

图 2 中 (a) 与 (b) 分别是取定相位面  $\Phi = \{(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, t) | t = \text{mod}(2\pi/\omega)\}$  和取碰撞面  $\Sigma = \{(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, t) | x_1 = b\}$  作为 Poincaré 截面所得的结果. 由图可知, 当  $\omega$  从 4.1 递减到 4.0440 时, 系统为稳态的 1-3 响应, 这里符号  $p$ - $q$  表示碰撞系统的周期运动,  $p$  表示碰撞次数,  $q$  表示周期数. 继续减小  $\omega$  到 4.0061677, 在这段区间内, 系统为 2-6 响应. 而在 4.0061677 与 4.0061676 之间, 系统与约束面发生了擦边碰撞, 即物体 1 以速度 0 接触到约束面, 如图 3 所示, 从而导致了擦边分岔的发生, 因此, 系统的运动变为了 3-6. 随着参数  $\omega$  的继续减小, 系统依次发生了 6-12, 12-24 运动, 然后产生了混沌.

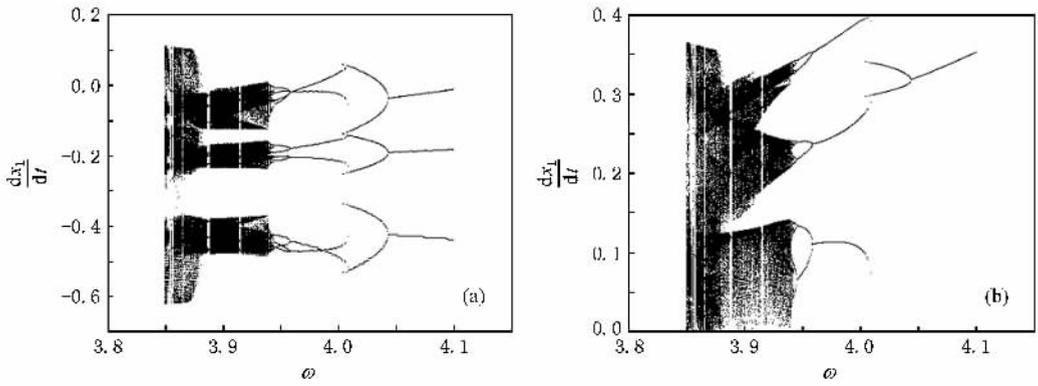


图2 系统分岔图,其中  $\omega \in [3.85, 4.1]$  (a)取定相位面作为 Poincaré 截面;(b)取碰撞面作为 Poincaré 截面

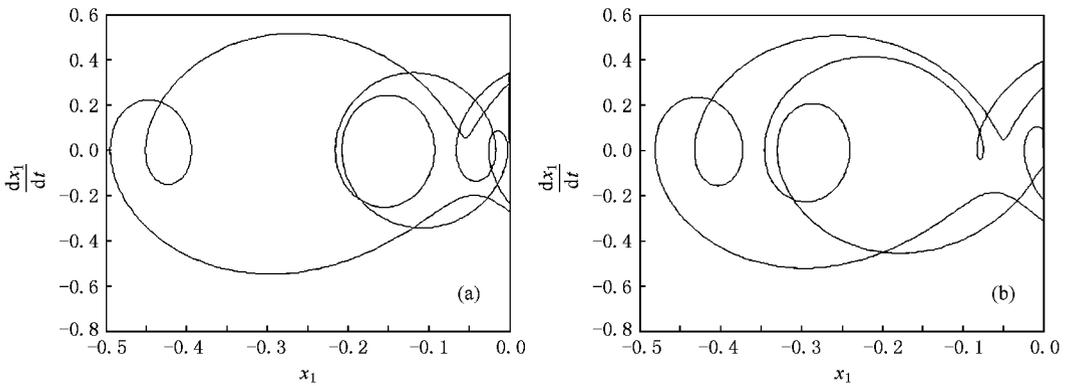


图3 相轨图 (a)  $\omega = 4.0061677$ , (b)  $\omega = 4.0061676$

由上述分析可知,在  $\omega \in [3.85, 4.1]$  这段范围内,随着  $\omega$  的减小,系统的响应由周期经过倍周期分岔而通向了混沌,这其中发生了非光滑系统特有的擦边分岔现象,并且擦边分岔只是在某一点使系统的响应发生了突变,并不改变系统倍周期分岔的整体趋势,这些是一般的光滑系统所没有的特点。

以下考虑随机激励对于系统响应的影响,取  $\omega$

$= 4.0061677$  时的系统作为研究对象,当  $\delta = 0.0001$  时,系统的数值解与理论解分别如图 4 (a)和(b)所示,由图可见,由于随机激励的强度比较小,系统响应的性质并没有发生本质的变化,只是轨线略微有些扩散,且数值解与理论解是吻合的.增大  $\delta$  到 0.001,此时,系统的相轨图如图 5 所示,数值解与理论解均显示,系统的轨线不仅发生了严重的扩散,而

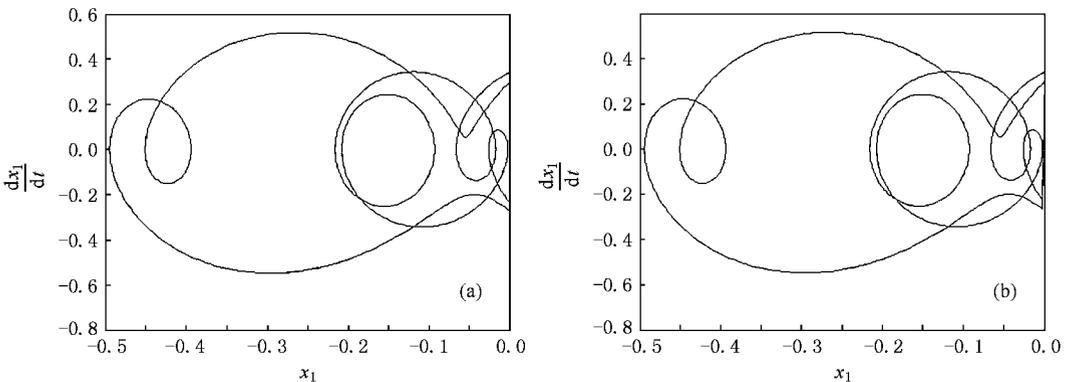


图4 相轨图,其中  $\omega = 4.0061677$ ,  $\delta = 0.0001$  (a)数值模拟 (b)理论解

且已改变了原来的运动性质,不再是 2-6 运动,而是一种近似 3-6 的运动.分析表明,这是由于轨线的扩散使得其与约束面发生了碰撞而产生的,这种现象在光滑系统中是不存在的.研究发现,对于其他参数条件下类似的临界情形,随机噪声具有同样的作用,不再一一列举.以上现象说明,对于非光滑系统,在

某些临界情况下随机噪声的影响是巨大的,直至改变系统的运动特性.此外,数值模拟还显示,对于  $\omega$  取其他参数的情形,随机噪声同样可以使系统的轨线发生扩散,这与光滑系统的情形是比较类似的<sup>[16]</sup>,此处不再赘述.

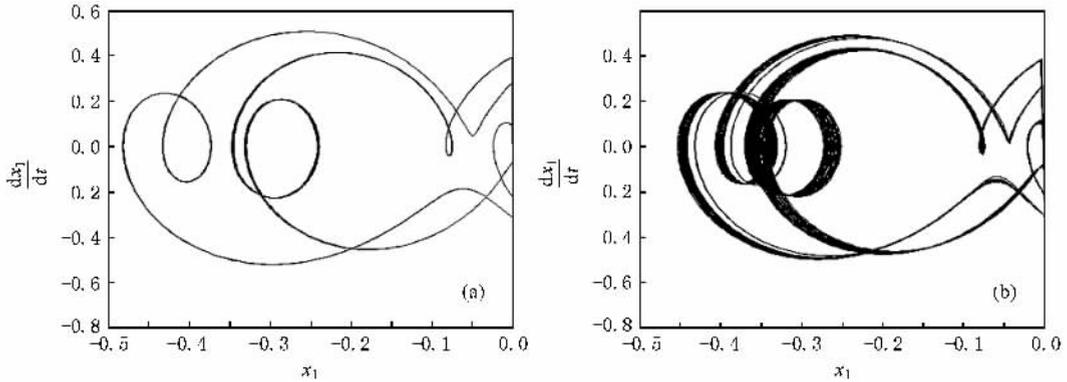


图 5 相轨图,其中  $\omega = 4.0061677$ ,  $\delta = 0.001$  (a) 数值模拟; (b) 理论解

## 4. 结 论

针对随机白噪声激励下的二自由度碰撞振动系统,本文定义了一种随机响应的度量,用来研究这种随机系统的运动.通过与其与数值模拟的比较,验证了这种方法对于此类系统是有效的.研究发现,当仅有谐和激励时二自由度碰撞振动系统在一定的参数范围内存在着倍周期分岔通向混沌的道路,且其中

伴随着出现了非光滑系统所特有的擦边分岔现象.随机噪声对系统响应的影响不仅具有光滑系统的特点<sup>[14-18]</sup>,也有非光滑系统特有的现象,即在擦边分岔发生的临界点上,适当强度的随机噪声使得系统改变了原来运动的拓扑性质,在本文中表现为从 2-6 运动突变为近似 3-6 运动.这说明不同于光滑系统,在非光滑系统中存在一些临界情形,在这些情形下很小的随机噪声可以改变系统的运动特性,对系统响应的影响是不可忽略的.

[1] Wai C, Edward O, Helena E, Celso G 1994 *Phys. Rev. E* **50** 4427  
 [2] Fernando C, Wai C, Celso G, Edward O 1996 *Phys. Rev. E* **53** 134  
 [3] John de W, Doug B, Jaap M, Willem van de W 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 3951  
 [4] Dimentberg M F, Iourtchenko D V 1999 *Probabilistic Engineering Mechanics* **14** 323  
 [5] Iourtchenko D V, Dimentberg M F 2001 *J. Sound. Vibra.* **248** 913  
 [6] Lee J Y, Yan J J 2006 *Chaos, Solitons Fractals* **28** 136  
 [7] Souza S L T de, Caldas I L, Viana R L 2007 *Chaos, Solitons Fractals* **32** 745  
 [8] Luo G W 2004 *Phys. Lett. A* **323** 210  
 [9] Luo G W, Xie J H, Zhu X F, Zhang J G 2008 *Chaos, Solitons Fractals* **36** 1340  
 [10] Feng Q, He H 2003 *Eur. J. Mech. A Solids*. **22** 267

[11] Feng J Q, Xu W, Wang R 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5733 (in Chinese)[冯进钤、徐伟、王蕊 2006 物理学报 **55** 5733]  
 [12] Hu G 1994 *Stochastic Force and Nonlinear Systems* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education) (in Chinese) p25, 38 [胡岗 1994 随机力与非线性系统(上海:上海科技教育出版社)第 25, 38 页]  
 [13] Zhu W Q 1992 *Stochastic Vibration* (Beijing: Science Press) p249 (in Chinese)[朱位秋 1992 随机振动(北京:科学出版社)第 249 页]  
 [14] Rong H W, Wang X D, Xu W, Fang T 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4610 (in Chinese)[戎海武、王向东、徐伟、方同 2005 物理学报 **54** 4610]  
 [15] Yang X L, Xu W, Sun Z K 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1678 (in Chinese)[杨晓丽、徐伟、孙中奎 2006 物理学报 **55** 1678]  
 [16] Rong H W, Xu W, Meng G, Fang T 2001 *Chinese Journal of Applied Mechanics* **18** 32 (in Chinese)[戎海武、徐伟、孟

光、方 同 2001 应用力学学报 18 32 ]

物理学报 56 2005 ]

[ 17 ] Rong H W , Wang X D , Xu W , Fang T 2007 *Acta Phys. Sin.* 56 2005 ( in Chinese ) [ 戎海武、王向东、徐 伟、方 同 2007

[ 18 ] Wang L , Xu W , Li Y 2008 *Chin. Phys. B* 17 2446

## Response analysis of two-degree-of-freedom impact oscillator to random excitation \*

Wang Liang<sup>†</sup> Xu Wei Li Ying

( *Department of Applied Mathematics , Northwestern Polytechnical University , Xi 'an 710072 , China* )

( Received 28 September 2007 ; revised manuscript received 29 January 2008 )

### Abstract

The response of a two-degree-of-freedom impact oscillator to random excitation is investigated. The existence of grazing bifurcation involved in the period-doubling bifurcation is shown clearly. The effects of the random excitation are studied by defining a measure of the stochastic response. The idea that the random factor can change the property of the system in some conditions is proposed. Numerical simulations show that the method is effective.

**Keywords :** non-smooth system , two-degree-of-freedom impact oscillator , grazing bifurcation , period-doubling bifurcation

**PACC :** 0547

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10472091 ).

<sup>†</sup> E-mail : lovenicholaswang@mail.nwpu.edu.cn