

层状介质时域有限差分方法斜入射 平面波引入新方式^{*}

姜彦南[†] 葛德彪

(西安电子科技大学物理系, 西安 710071)

(2007 年 9 月 29 日收到, 2008 年 2 月 12 日收到修改稿)

应用二维时域有限差分方法分析层状介质中的目标散射时, 在总场-散射场边界斜入射平面波源用常规方法难以引入, 因为在总场-散射场边界处设置的入射波实际上包含了入射脉冲以及各分层界面的反射和多次反射. 为解决这个问题, 提出了斜入射平面波的混合引入方式, 即对总场-散射场的四个边界面采取不同的处理方式. 对于总场-散射场的纵向侧边界, 用含有斜入射角度的修正一维时域有限差分方法, 只要在自由空间位置加入入射脉冲就会自行产生由各分层界面形成的反射波, 包括多次反射. 同时, 把纵向总场-散射场侧边界向下延伸, 使得总场-散射场下边界位于完全匹配层内, 这样透射波和散射波均为外向行波而被吸收. 对于总场-散射场的上边界, 由于完全位于自由空间中, 边界上各点的入射波将是总场-散射场纵向边界角点处入射波的带有时间延迟的复制. 数值模拟结果表明了本文所提出方法的正确性和有效性.

关键词: 时域有限差分, 层状介质, 斜入射平面波, 修正一维麦克斯韦方程

PACC: 4110, 4225B

1. 引言

在光学元件、生物体无损检测以及地下目标探测等层状复杂介质背景^[1]的散射问题研究中, 时域有限差分法(finite difference time domain, FDTD)为解决复杂目标的电磁计算提供了有效手段. 但在层状问题的 FDTD 计算中, 平面波的引入是一个亟待解决的难点.

在自由空间散射问题的 FDTD 计算中, 平面波源往往根据等效原理, 通过总场-散射场(total field-scattered field, TF-SF)边界直接在传播方向上投影并插值引入^[2-4]. 目前, 对于半空间或层状介质问题, 要求出介质分界面处频域反射和透射波, 并通过傅里叶变换到时域, 而后应用到连接边界上各场量节点处^[5,6]. 文献[7]讨论了层状介质 TF-SF 边界处加入时域平面波源的直接方法, 给出了含有斜入射角度的一维麦克斯韦方程(即修正一维 Maxwell 方程), 在离散后的修正一维 FDTD 推进的起点直接加入脉冲, 随时域推进在分层介质的各个分界面会自

动产生反射和透射波, 它仅在纵向侧边界模拟分层介质二维 FDTD 平面波的引入. 根据实验观察, 这种方式难以形成斜入射平面波形式的入射波.

为此, 本文提出了层状介质斜入射平面波引入的混合方式, 即对 TF-SF 的四个边界面采取不同的处理方式: 垂直于分层界面的纵向侧边界上采用修正一维 FDTD 计算分层空间斜入射平面波^[7,8], 位于自由空间内的 TF-SF 上边界上的场量采用“投影”后插值获得, 同时把 TF-SF 下边界深入到完全匹配层(perfectly matched layer, PML)内, 使此处的单向行波形成无反射的吸收, 而无需添加任何形式的附加场量.

2. 总场-散射场边界的设置和处理

2.1. 总场-散射场边界的设置

在层状介质模型中, 对于透射波和散射波而言, 最下层介质内仅存在向下传播的外向行波, 因此可以把 TF-SF 下边界延伸到 PML 内, 如图 1 所示, 即不

^{*} 国家自然科学基金(批准号 60871070)资助的课题.

[†] E-mail: sy_jyn@sina.com

求出 $j = j_d$ 处 TF-SF 下边界的场值. 这同时保证了 TF-SF 纵向侧边界上修正一维 FDTD 计算的 PML 吸收边界范围与二维 PML 吸收下边界重合, 使一维垂直向模拟的入射波引入到二维 FDTD 中形成无反射推进, 进而模拟层状背景最下层仅存在透射波的情况. 这样就解决了位于层状介质内横向的 TF-SF 下边界上入射波难以获得的问题.

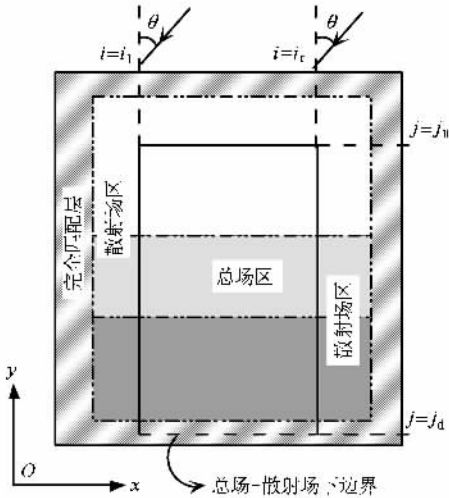


图1 总场-散射场边界分布方案

2.2. 总场-散射场纵向侧边界的处理

大多数地下目标的背景(火山岩除外)和几乎所有生物组织(个别鸟类除外)都是非磁性物质^[9], 本文就以非磁性色散介质为例进行分析. 考虑频率域相对介电系数 $\epsilon_r(\omega)$ 如 Debye 模型^[2]

$$\epsilon_r(\omega) = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 + j\omega\tau} + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon_0}, \quad (1)$$

式中 ϵ_s 和 ϵ_∞ 分别是静态和无穷大频率(ω)时的介电系数, τ 为弛豫时间, σ 为电导率. 令 $\epsilon_s = \epsilon_\infty$, 可以把(1)式退化到非色散介质的形式. 以 TM 模式为例, 二维 FDTD 公式为

$$\begin{aligned} E_z|_{i,j}^{n+1} = & CA(m) \cdot E_z|_{i,j}^n + CB(m) \\ & \times \left[\left(H_y|_{i+1/2,j}^{n+1/2} - H_y|_{i-1/2,j}^{n+1/2} \right) / \Delta x \right. \\ & - \left. \left(H_x|_{i,j+1/2}^{n+1/2} - H_x|_{i,j-1/2}^{n+1/2} \right) / \Delta y \right. \\ & - \left. \frac{(1+k_d)}{2} J_{dz}|_{i,j}^n \right], \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_x|_{i,j+1/2}^{n+1} = & CP(m) \cdot H_x|_{i,j+1/2}^{n-1/2} - CQ(m) \\ & \times (E_z|_{i,j+1}^n - E_z|_{i,j}^n) / \Delta y, \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_y|_{i+1/2,j}^{n+1/2} = & CP(m) \cdot H_y|_{i+1/2,j}^{n-1/2} + CQ(m) \\ & \times (E_z|_{i+1,j}^n - E_z|_{i,j}^n) / \Delta x, \quad (4) \end{aligned}$$

式中, 系数 $CA(m)$, $CB(m)$ 和 $CP(m)$, $CQ(m)$ 参考文献[10], 沿着 x 和 y 方向空间间隔分别是 Δx 和 Δy , 时间步长为 Δt . 图1中 y 方向 TF-SF 侧边界含有斜入射角度的修正一维 Maxwell 方程

$$\begin{aligned} \partial E_{z1D} / \partial y = & -\mu_0 \partial H_{x1D} / \partial t \\ & - \sec^2 \theta \cdot \partial H_{x1D} / \partial y \\ = & \epsilon_0 \mathcal{D}(\epsilon(\omega)) * E_{z1D} / \partial t, \quad (5) \end{aligned}$$

式中, $\epsilon_r(t)$ 为(1)式的时域表示, 并且满足 $\cos \theta = k_y / k$, 其中 k 和 k_y 分别为沿着传播方向和 y 方向的波数, 满足 $k^2 = k_x^2 + k_y^2$. 根据分层介质波数切向连续的相位匹配理论, 从第一层向分层介质中入射的横向波数 k_{x1} 是不变的(第一层中是 $k_{x1} = k_1 \sin \theta$, 其中 $k_1 = \omega \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_0 \mu_0}$ 是第一层空间沿传播方向的波数, ϵ_1 为第一层介质相对介电系数, 真空介质等于1), 因此(5)式第二等式变为

$$-k^2 \partial H_{x1D} / \partial y = (k^2 - k_{x1}^2) j\omega \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) E_{z1D}, \quad (6)$$

参考(1)式的 Debye 非磁性色散介质, 并引入 $\epsilon' = \epsilon_\infty - \epsilon_1 \sin^2 \theta$, 把(6)式转化到时域得到

$$-\partial H_{x1D} / \partial y = \epsilon_0 \epsilon' \partial E_{z1D} / \partial t + \sigma E_{z1D} + J_{dz}, \quad (7)$$

式中

$$J_{dz}^{n+1} = k_d J_{dz}^n + \beta_d (E_{z1D}^{n+1} - E_{z1D}^n) \Delta t, \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} k_d = & \frac{2\tau - \Delta t}{2\tau + \Delta t}, \\ \beta_d = & \frac{2\epsilon_0(\epsilon_s - \epsilon_\infty)\Delta t}{2\tau + \Delta t}, \quad (9) \end{aligned}$$

(7)式和(5)式的第一式的时域形式构成了 TF-SF 侧边界上斜入射一维 Maxwell 方程, 通过离散得到修正一维 FDTD 迭代式.

仅以图1中 $i = i_r$ 处右侧边界为例, 对二维 FDTD 的 TF-SF 边界的处理进行分析. 由(2)和(4)式可知, 总场区域内 $E_z(i_r, j)$ 的处理需要用到散射场区域的入射源 $H_{y,inc}(i_r + 1/2, j)$, 同理 $H_y(i_r + 1/2, j)$ 的处理也要用到 $E_{z,inc}(i_r, j)$. 这里, 下标 inc 所表示的“入射波”包含了入射脉冲以及各分层界面的反射和多次反射, 但通过(7)式和(5)式的第一式可以看出, 由 y 方向斜入射一维 Maxwell 方程计算出的仅有 $E_{z,inc}$, 而 $H_{y,inc}$ 不存在. 我们发现(4)式中存在 H_y 分量, 为求出 $(i_r + 1/2, j)$ 处的 $H_{y,inc}$, 需要已知 (i_r, j) 和 $(i_r + 1, j)$ 处的 $E_{z,inc}$, 这就要在这两个位置上均作一次斜入射一维 Maxwell 方程的 FDTD 计算, 即

$$\begin{aligned} & H_{y_anc}^{n+1/2}(i_r + 1/2\ j) \\ &= CP(m) \cdot H_{y_anc}^{n-1/2}(i_r + 1/2\ j) + CQ(m) \\ &\quad \times [E_{z1D}^n(i_r + 1\ j) - E_{z1D}^n(i_r\ j)]\Delta x. \quad (10) \end{aligned}$$

至此,处理 TF-SF 右侧边界所需要的入射场源已经全部求出,TF-SF 左侧边界处理方法类似.

2.3. 自由空间中总场-散射场上边界的处理

对于 x 方向 TF-SF 上边界,由于完全位于自由空间中,边界上各点的入射波将是 TF-SF 纵向边界角点处入射波的带有时间延迟的复制,可以通过引入时间延迟和插值获得.对如图 1 所示 $\theta > 0^\circ$ 的 TM 模式斜入射平面波,在 TF-SF 边界 $j = j_u$ 处,入射波方向、入射波波面以及波动延迟几何关系如图 2 所示.

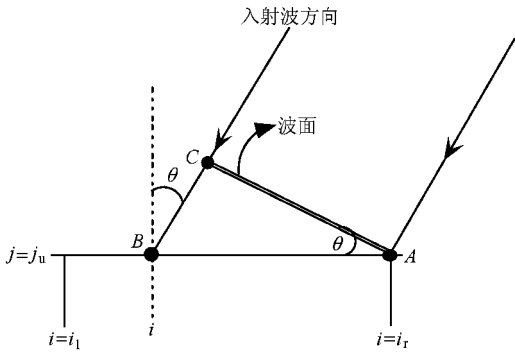


图 2 总场-散射场上边界 $j = j_u$ 处入射波几何示意图

在 TF-SF 纵向边界上 $A(i_r\ j_u)$ 处场分量随时间的变化如图 3(a) 所示,这可以通过垂向修正一维 FDTD 迭代获得,对于 TF-SF 上边界 $j = j_u$ 上任意一点 $B(i\ j_u)$ 处,场分量随时间的变化与 A 点相同,如图 3(b) 所示,仅存在 ΔT_{AB} 的时间延迟.

设斜入射平面波在自由空间波速度为 c_0 ,则时间延迟为

$$\begin{aligned} \Delta T_{AB} &= |BC| / c_0 \\ &= (i_r - i) \cdot \Delta x \cdot \sin\theta / c_0. \quad (11) \end{aligned}$$

但延迟时间 ΔT_{AB} 并不一定是时间的样本点时刻,例如 $\Delta T_{AB} = (p + w)\Delta t$, $0 < w < 1$,其中 p 为整数, w 为小数,即 $0 < w < 1$.于是,采用线性插值公式得二维总场-散射场上边界任意节点 $(i\ j_u)$ 处入射波为

$$\begin{aligned} E_{z_anc}^n(i\ j_u) &= (1 - w)E_{inc}^p(i_r\ j_u) \\ &\quad + wE_{inc}^{p+1}(i_r\ j_u). \quad (12) \end{aligned}$$

对于自由空间内 x 方向连接边界上的磁场分量作同样处理.

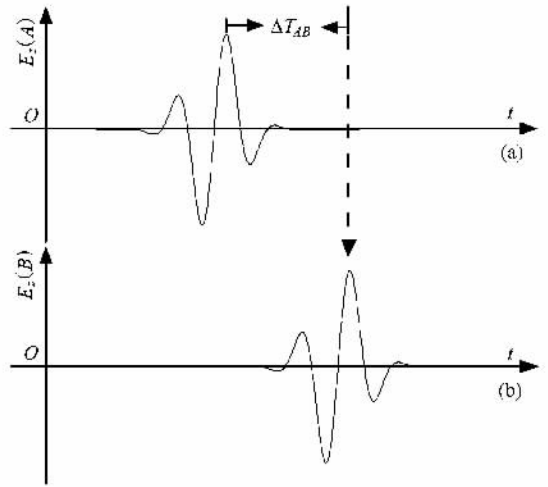


图 3 x 方向总场-散射场上边界不同节点处波动图形

3. 算例及分析

例 1 分析平面波在理想分层介质中的传播:均匀层状光学元件的结构是表面覆盖薄膜的熔石英^[11]模型如图 4 所示.薄膜和熔石英相对介电常数满足 $\epsilon_s = \epsilon_\infty$,分别是 1.69 和 2.25,其他参数与真空相同.熔石英层相对真空入射波的透射系数约为 0.807.光波从真空入射到元件表面时,真空-薄膜和薄膜-熔石英界面的布儒斯特角分别为 $\theta_{B1} \approx 52.43^\circ$ 和 $\theta_{B2} \approx 49.09^\circ$.若满足薄膜-熔石英界面的入射角为 θ_{B2} 时要求 $\theta \approx 79.23^\circ$.空间网格间隔 $\delta = 2.5 \times 10^{-4}$,时间间隔 $\Delta t = 1.35 \times 10^{-17}$ s,满足 Courant 稳定性条件^[2,40].以 δ 为单位,FDTD 模拟空间为 $[-50:50, -80:80]$,薄膜与熔石英以及自由空间分别交界于节点 $j = 18$ 和 $j = 30$ 处,连接边界位于节点 $-45:45, -80:75$ 处.

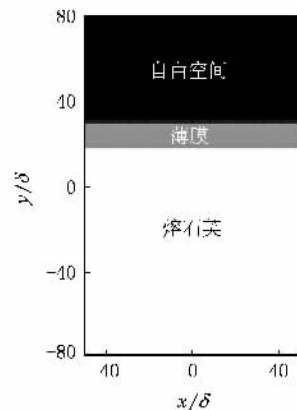


图 4 合格光学元件模型

入射波源为单位振幅的高斯脉冲^[10],脉冲宽度 $\tau = 30\Delta t$,入射方向在 $\theta = 10^\circ$ 和 $\theta = 60^\circ$ 两种情况下,

表面覆盖薄膜的熔石英纯层状模型在 $180\Delta t$ 时刻的 TM 和 TE 两种模式近场分布快照如图 5 所示.

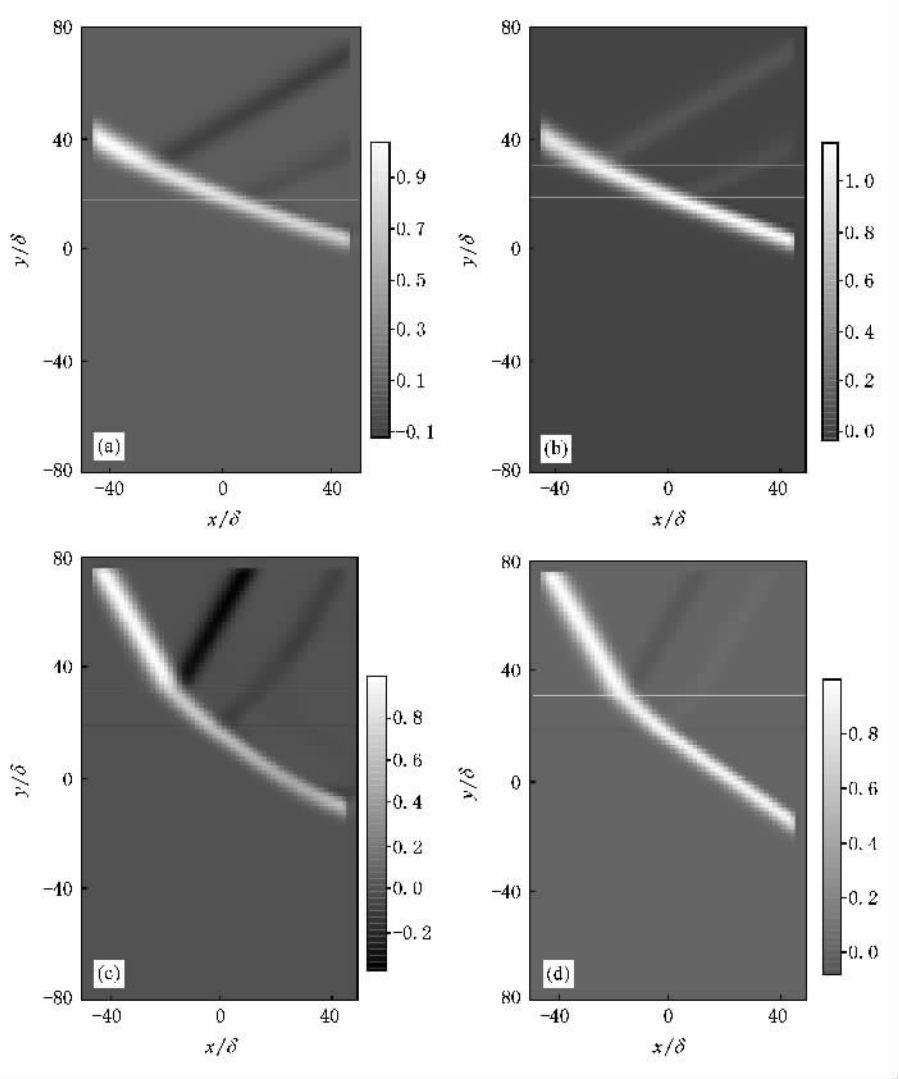


图 5 纯层状元件 TM 和 TE 模式近场分布 (a)TM 30° (b)TE 30° (c)TM 60° (d)TE 60°

由图 5 可见,电磁波在分层介质中的传播形成完好的平面波透射和反射.入射波由光疏媒质进入光密媒质,在入射波小于布儒斯特角的情况下,遵循 TM 模式的反射波发生相位反转和 TE 模式发生同相位的反射规律^[12].在 $\theta = 60^\circ$ 大于 θ_{B1} 的情况下,波在真空-薄膜界面突变为反相位的反射,但薄膜中的透射角依然小于 θ_{B1} ,薄膜-熔石英界面处反射波依然为同相位的反射.

例 2 对 TF-SF 下边界设置效果检验.这里仅以图 4 所示模型的 TM 模式斜入射为例进行分析.单位振幅的高斯脉冲以 $\theta = 5^\circ$ 斜入射,脉冲宽度 $\tau = 60\Delta t$,经过折射到达最下层的实际入射角度 $\theta \approx 2.56^\circ$,其他参数与例 1 相同.入射波在 $460\Delta t$ 时刻

的波形如图 6(a)所示.设定最下层介质内的检测点 $(0,0)$ (如图 6(a)中白点处),此处振动波形如图 6(b)所示,峰值为 0.806,与例 1 中的透射系数一致.在层状介质最下层内仅存在向下单向传播的透射波,这与图 6(b)检测结果吻合.可以看出,TF-SF 下边界的设置和处理是有效的.

例 3 多层生物组织^[13]模型.中部为非磁性色散生物组织层,厚度为 0.01 m,上下两层均为自由空间,与自由空间分别交界于 $y = \pm 0.005$ m 处,取网格间隔 $\delta = 2.5 \times 10^{-4}$ m.在生物组织层内节点 $(0,10)$ 处存在网格半径为 3δ 的癌瘤囊肿.连接边界位于 $[-45:45,-50:45]$;FDTD 计算区域是 $[-50:50,-50:50]$.介电系数如(1)式,所有介质相对磁导率

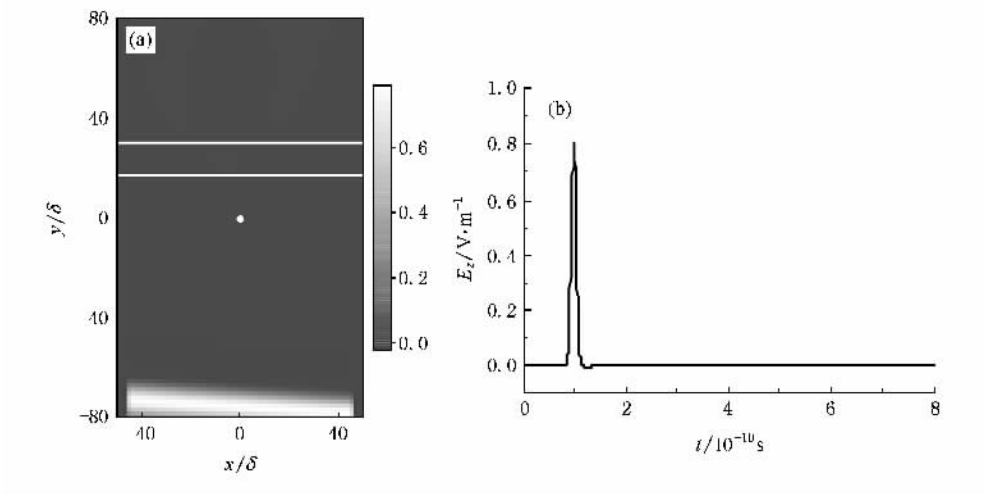


图6 总场-散射场下边界设置效果检验 (a)TM 模式 $460\Delta t$ 时刻 $\theta = 5^\circ$ 斜入射理想层状元件 E_z 快照 (b)最下层内检测点 $(0,0)$ 处 E_z 振动波形

均为 $1^{[9]}$,其他详细参数如表 1 所示.添加波源为高斯脉冲 $\Delta t = 4.17 \times 10^{-13} \text{ s}$, $\tau = 40\Delta t$,采用平面波沿

表 1 分层生物组织模型的介质参数^[14]

介质	ϵ_∞	ϵ_s	$\sigma/(\text{S/m})$	$\tau/10^{-12} \text{ s}$
自由空间	1.00	1.00	0.00	1.00
乳腺组织	7.00	10.00	0.15	7.00
癌 瘤	3.99	54.00	0.70	7.00

$\theta = 30^\circ$ 斜入射于层状空间中 ,用于癌瘤检测.TM 模式 E_z 和 TE 模式 H_z 分量快照如图 7 和图 8 所示 ,“○”处为癌瘤所在位置.

从自由空间入射于非磁性色散介质中时 ,波长变小 ,波在自由空间中的速度大于在色散介质中的情况 ,透射波在生物组织中传播 ,由于生物组织是电损耗的 ,电磁波振幅逐渐减小.第二层是色散介质 ,不同频率的透射波的传播速度不同 ,随着时间的推

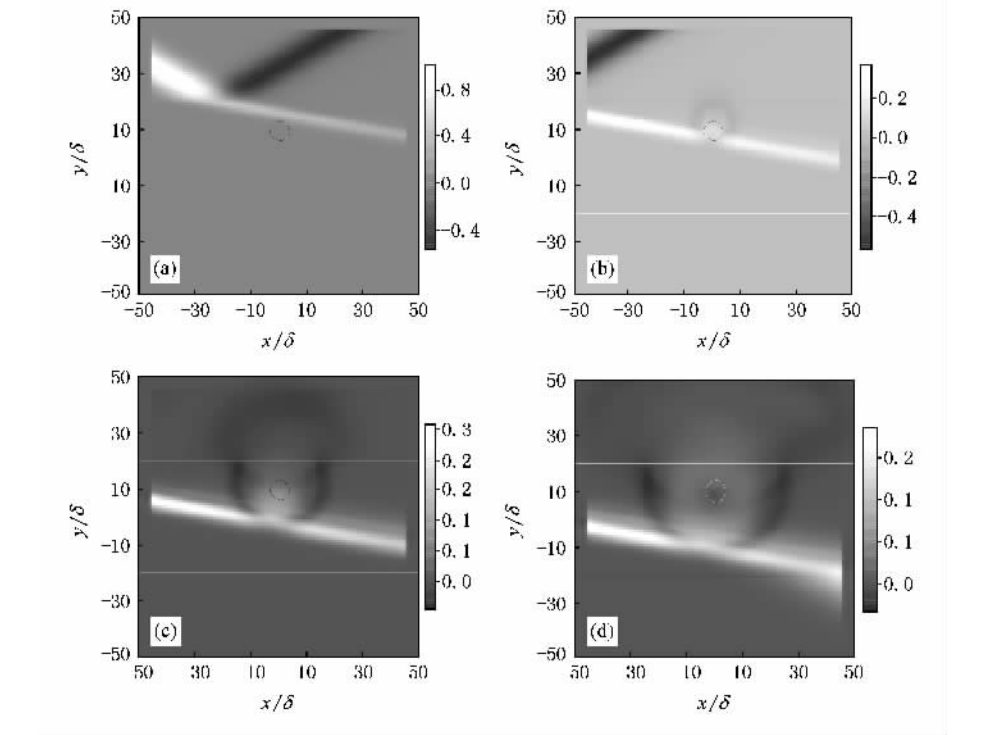


图7 分层生物组织模型 TM 模式 E_z 快照 (a)62.5 ps (b)83.4 ps (c)104.2 ps (d)125 ps

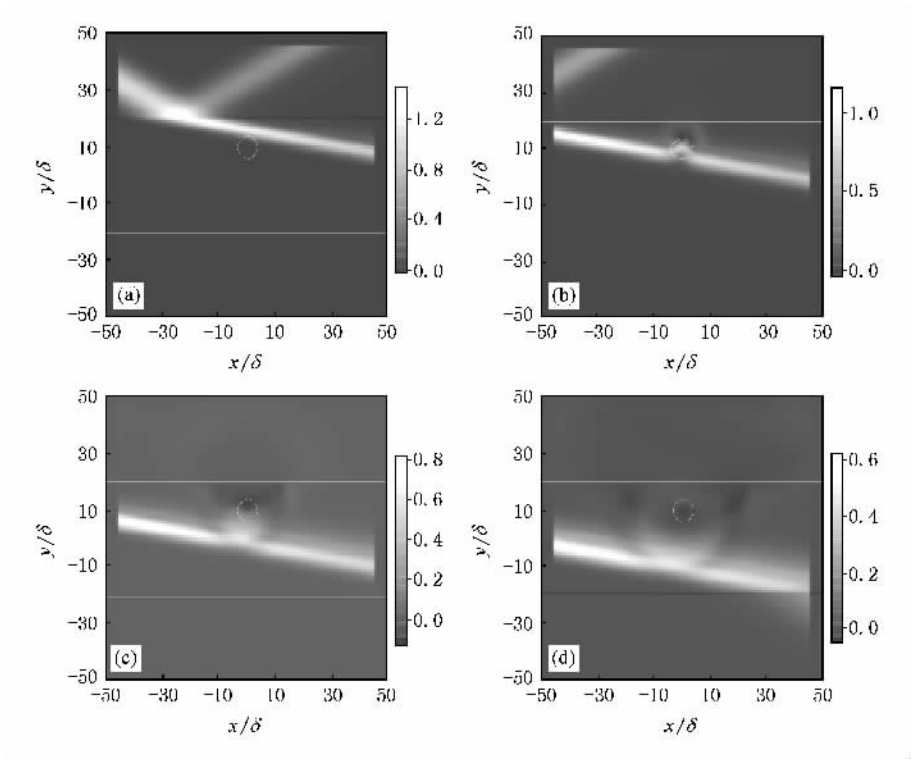


图 8 分层生物组织模型 TE 模式 H_z 快照 (a) 62.5 ps (b) 83.4 ps (c) 104.2 ps (d) 125 ps

进,透射波存在频散效应.透射波作用到癌瘤时,其电磁响应逐步得到体现.对比图 7 和图 8 所示的 TE 模式 H_z 快照,差异主要体现在从光疏介质到光密介质传播时,反射波是否存在半波损失.

况下(0.47)处近区散射时域波形.波从自由空间入射到层状生物组织,发生了较强的层间反射,透射波到达癌瘤时,癌瘤对透射波形成散射,对近区散射场的影响差异主要在 0.05—0.3 ns 之间.

4. 结 论

本文在 TF-SF 边界两个正交方向上,分别用投影后插值和修正一维 FDTD 推进的混合方式模拟二维分层介质的入射平面波.算例说明该方式处理 TF-SF 边界是有效的,可以很好地在分层背景空间引入斜入射平面波源.这一入射波引入方法可用于有耗、色散分层介质在平面波入射情况下电磁散射问题的分析中,例如光学元件无损探测、生物体检测以及电磁遥感.应当指出,本文所讨论的是分层介质背景中总场边界上入射波的加入方法,对于位于总场区域内的散射目标并没有非磁性的要求.

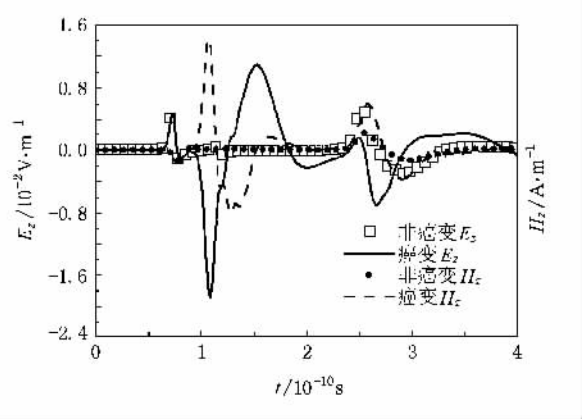


图 9 是否癌变时(0.47)处散射时域波形

图9给出了TM和TE两种模式是否癌变两种情

[1] Wang Y ,Liu X Y ,Sun L ,Zhang X ,Han R Q 2006 *Chin. Phys.* **15** 1081

[2] Taflove A ,Hagness S C 2005 *Computational Electrodynamics : the Finite - Difference Time - Domain Method* (Boston : Artech House)

- p193 p133
- [3] Gurel L ,Oguz U ,Arıkan O 1997 *IEEE Trans . Antennas Propag .* **4** 2164
- [4] Oguz U ,Gurel L ,Arıkan O 1998 *IEEE Trans . Microwave Theory Tech .* **46** 869
- [5] Wong P B ,Tyler G L ,Baron J E ,Gurrola E M ,Simpson R A 1996 *IEEE Trans . Antennas Propag .* **44** 504
- [6] Demarest K ,Plumb R ,Huang Z B 1995 *IEEE Trans . Antennas Propag .* **43** 1164
- [7] Winton S C ,Kosmas P ,Rappaport C M 2005 *IEEE Trans . Antennas Propag .* **53** 1721
- [8] Jiang Y N ,Ge D B 2007 *Chin . J . Radio Sci .* **22** 214 (in Chinese)
[姜彦南、葛德彪 2007 电波科学学报 **22** 214]
- [9] Gao B Q 1995 *FDTD Method* (Beijing : National Defence Industry Press) p247 (in Chinese) [高本庆 1995 时域有限差分方法(北京:国防工业出版社)第 247 页]
- [10] Ge D B ,Yan Y B 2005 *Finite-Difference Time-Domain Method of Electromagnetic Waves* (Xi'an : Xidian University Press) p22 ,37 ,118 (in Chinese) [葛德彪、闫玉波 2005 电磁波时域有限差分法(西安:西安电子科技大学出版社)第 22 ,37 ,118 页]
- [11] Shen J ,Liu S H ,Shen Z C ,Kong W J ,Huang J B ,Shao J D ,Fan X Z 2005 *Acta Phys . Sin .* **54** 4920 (in Chinese) [沈 健、刘守华、沈自才、孔伟金、黄建兵、邵建达、范正修 2005 物理学报 **54** 4920]
- [12] Guo S H 1997 *Electrodynamics* (Beijing : Higher Education Press) p146 (in Chinese) [郭硕鸿 1997 电动力学(北京:高等教育出版社)第 146 页]
- [13] Xu T ,Zhang C P ,Chen G Y ,Tian J G ,Zhang G Y ,Zhao C M 2005 *Chin . Phys .* **14** 1813
- [14] Converse M ,Bond E J ,Hagness S C ,Van Veen B D 2004 *IEEE Trans . Microwave Theory Tech .* **52** 1876

New scheme for introducing an oblique incidence plane wave to layered media in finite-difference time-domain *

Jiang Yan-Nan[†] Ge De-Biao

(Department of Physics ,Xidian University ,Xi'an 710071 ,China)

(Received 29 September 2007 ; revised manuscript received 12 February 2008)

Abstract

In the application of two-dimensional finite-difference time-domain (2D-FDTD) method to the analysis of scattering by an object embedded in layered media ,the obliquely incident wave along the total field-scattered field (TF-SF) contains the incidence pulse and the reflected and multiple-reflected wave ,which can not be introduced by use of the traditional method . To solve this problem ,a hybrid scheme using different ways to treat the four TF-SF boundaries is presented . The modified 1D-FDTD including oblique incidence angle is used to treat the longitudinal side boundaries ,which can produce the reflected and multiple-reflected wave to layered interface automatically . The longitudinal side boundaries are extended downwards ,such that the TF-SF lower boundary is located in the perfectly matched layer (PML) completely ,thus the transmission wave and scattered wave are both outward-going waves in the lowest PML layer and are absorbed by PML . The TF-SF upper boundary is located in free space ; the incidence wave along it is in fact a properly time-delayed duplication of the waveform at the corner of TF-SF upper longitudinal boundary . The computational results show the reliability and applicability of the presented hybrid scheme .

Keywords : finite-difference time-domain , layered media , oblique incidence plane wave , modified one-dimensional Maxwell's equations

PACC : 4110 , 4225B

* Project support by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60871070).

[†] E-mail :sy _ jyn@sina.com