

一种处理色散介质问题的通用时域有限差分方法*

魏 兵[†] 葛德彪 王 飞

(西安电子科技大学物理系, 西安 710071)

(2007 年 12 月 17 日收到 2008 年 4 月 11 日收到修改稿)

色散介质的介电系数是频率的函数,使本构关系在时域成为卷积关系.这就给用时域有限差分方法计算色散介质中波的散射和传播带来了困难.现有算法往往要针对不同色散介质模型推导相应的递推公式,算法的通用性较差.本文完善和发展了移位算子-时域有限差分方法,使之成为一种处理色散介质电磁问题的通用方法.首先,证明了常见的三种色散介质模型(德拜模型、洛伦兹模型和德鲁模型)的介电系数均可以写成适于移位算子法计算的有理分式函数形式.然后,用 $\partial/\partial t$ 代替 $j\omega$,过渡到时域,再引入时域移位算子 z_t 代替时间微分算子来处理有理分式函数形式的介电系数,给出离散时域本构关系的表示式,进而导出时域有限差分方法当中电位移矢量和电场强度之间的关系.最后,计算了几种色散介质的电磁散射,数值结果表明了本文方法和程序的通用性和正确有效性.

关键词:时域有限差分方法,色散介质,移位算子

PACC: 4110H, 5170, 5210

1. 引 言

近十几年来,随着国内外对时域有限差分(finite difference time domain, FDTD)方法研究的深入,将该方法用于处理色散介质电磁问题引起人们的关注.1990年, Luebbers 等人^[1]提出了适用于 Debye 模型的递归卷积 FDTD 方法(recursive convolution FDTD, RC-FDTD),然后将该方法推广到等离子体介质^[2]和 N 阶色散介质^[3,4]. Hunsberger 等人^[5]将 RC-FDTD 方法推广用于磁化等离子体介质. Luebbers 等人^[6]研究了色散介质的电磁散射问题. Kelley 等人^[7]用电场的分段线性(piecewise linear)近似(PLRC-FDTD 方法改善了 RC-FDTD 方法)的计算精度. Siushansian 等人^[8]采用离散的梯形递归卷积(TRC-FDTD)方法改善了 RC-FDTD 方法的计算精度.此外,处理色散介质电磁问题的 FDTD 方法还有辅助方程(ADE)法^[9-11], Z 变换法^[12-14], 电流密度卷积(JEC)法^[15], Young 氏直接积分法^[16-18], 分段线性电流密度卷积(PLJERC)算法^[19,20]等.近年来,对色散介质的研究已逐步深入到各向异性介质的情形^[21-24].

上述几种方法中, RC 法将电位移矢量写成电场

强度的卷积,离散该卷积成迭代求和式,再联立电场强度和磁场强度的迭代式,实现时域迭代计算. JEC 法将极化电流密度表示为电场强度的卷积并离散得到迭代方程,再联立电场强度和磁场强度的迭代式,实现时域迭代计算. PLRC 法和 PLJERC 法分别在 RC 法和 JEC 法的基础上引进分段线性近似以改善计算精度. ADE 法将 Maxwell 方程和介质所满足的相关方程直接差分,得到一个包含多个量的差分方程组,从而实现场量的时域迭代计算. Z 变换法把频域本构关系变换到 Z 域,然后再通过 Z 域得到时域递推式. RC 法, PLRC 法, JEC 法和 PLJERC 法等需进行复杂卷积计算. ADE 法和 Z 变换法的数学过程也比较繁琐.总的来讲,现有方法往往需要对不同的色散介质推导相应的递推公式,并编制相应计算程序,算法和程序的通用性较差.

2002 年,葛德彪等人^[25]提出了处理色散介质电磁问题的移位算子-时域有限差分(shift operator finite difference time domain, SO-FDTD)方法并讨论了该算法在非磁性等离子体中的应用.本文完善和发展了文献[25]所提出的 SO-FDTD 方法,使之成为色散介质电磁问题处理的通用算法.首先,证明了常见的三种色散介质模型(德拜模型、洛伦兹模型和德鲁模

* 国家自然科学基金(批准号 60871070)和国家博士后科学基金(批准号 20070421109)资助的课题.

[†] E-mail: bwei@xidian.edu.cn

型)的介电系数均可以写成适于移位算子法计算的有理分式函数形式。然后,用 $\partial/\partial t$ 代替 $j\omega$, 过渡到时域,再引入时域移位算子代替时间微分算子来处理有理分式函数形式的介电系数,给出了用移位算子表达式代替对时间偏微分时从低阶到高阶的严格证明,推导了适应于三种色散介质模型的通用 FDTD 递推表达式。最后,给出了本文方法的计算结果和文献结果以及解析解的比较。本文中时谐因子取 $\exp(j\omega t)$ 。

2. 常见色散介质模型及其介电系数表达式

常见的三种线性、各向同性色散介质模型的介电常数表达式^[26]如下:

1) 德拜模型(Debye model)

$$\begin{aligned} \epsilon(\omega) &= \epsilon_\infty + \sum_{p=1}^p \frac{\epsilon_{s,p} - \epsilon_\infty}{1 + j\omega\tau_p} \\ &\equiv \epsilon_\infty + \sum_{p=1}^p \frac{\Delta\epsilon_p}{1 + j\omega\tau_p}, \end{aligned} \quad (1)$$

式中 $\Delta\epsilon_p = \epsilon_{s,p} - \epsilon_\infty$, 其中 $\epsilon_{s,p}$ 为静态或零频时的相对介电系数, ϵ_∞ 为无穷大频率时的相对介电系数, τ_p 为极点弛豫时间。

2) 洛伦兹模型(Lorentz model)

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_\infty + \sum_{p=1}^p \frac{\Delta\epsilon_p \omega_p^2}{\omega_p^2 + 2j\omega\delta_p - \omega^2}, \quad (2)$$

式中 $\Delta\epsilon_p$ 含义同(1)式, ω_p 为极点频率, δ_p 为阻尼系数。

3) 德鲁模型(Drude model)

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_\infty - \sum_{p=1}^p \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - j\omega\gamma_p}, \quad (3)$$

式中 ω_p 为德鲁极点频率, γ_p 为极点弛豫时间的倒数。

可以证明(见附录 A),上述几种色散介质模型中的相对介电系数 $\epsilon_r(\omega)$ 均可以写成以下有理分式函数形式,即

$$\epsilon_r(\omega) = \left[\sum_{n=0}^N p_n(j\omega)^n \right] / \left[\sum_{n=0}^N q_n(j\omega)^n \right]. \quad (4)$$

3. 各向同性色散介质 FDTD 递推式

设各向同性色散介质频域中本构关系为

$$D(\omega) = \epsilon(\omega)E(\omega), \quad (5)$$

式中 $\epsilon(\omega)$ 为复数介电系数。色散介质中麦克斯韦

旋度方程在无源情况为

$$\begin{aligned} \nabla \times E &= -\partial B/\partial t = -\mu \partial H/\partial t, \\ \nabla \times H &= \partial D/\partial t. \end{aligned} \quad (6)$$

(6)式中设导磁系数与频率无关,即 $B = \mu H$ 。

按照 Yee 元胞由(6)式第一式可得到磁场强度 H 各分量随时间推进的计算公式^[27]。另外,将(6)式第二式在 $t = (n + 1/2)\Delta t$ 时刻作差分离散可得

$$(\nabla \times H)^{n+1/2} = [D^{n+1} - D^n] \Delta t, \quad (7)$$

即

$$D^{n+1} = D^n + \Delta t (\nabla \times H)^{n+1/2}. \quad (8)$$

取电位移矢量 D 的采样点与电场强度 E 的采样点相同,离散(8)式可得 D 各分量随时间推进计算公式为(以 x 分量为例)

$$\begin{aligned} D_x^{n+1}(i + 1/2, j, k) &= D_x^n(i + 1/2, j, k) \\ &+ \Delta t \cdot \{ [H_z^{n+1/2}(i + 1/2, j + 1/2, k) \\ &- H_z^{n+1/2}(i + 1/2, j - 1/2, k)] \Delta y \\ &- [H_y^{n+1/2}(i + 1/2, j, k + 1/2) \\ &- H_y^{n+1/2}(i + 1/2, j, k - 1/2)] \Delta z \}. \end{aligned} \quad (9)$$

(9)式是从 H 到 D 的递推式,要使 FDTD 计算进行下去,还需要知道从 D 到 E 的递推式。下面用移位算子法得到从 D 到 E 的递推式。

4. 用移位算子法处理色散介质的本构关系

下面用移位算子法得到色散介质时域本构关系表达式,进而得到 FDTD 所需的时域递推计算式。

4.1. 含移位算子的本构关系

设频域中介质的本构关系为(以 x 分量为例)

$$D_x = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) E_x. \quad (10)$$

若介电系数 $\epsilon_r(\omega)$ 可以写成以 $j\omega$ 为自变量的分式多项式,即(4)式的形式,利用频域到时域的算子转换关系 $j\omega \rightarrow \partial/\partial t$, 将(4)式代入(10)式得到时域本构关系为

$$D_x(t) = \epsilon_0 \epsilon_r(\partial/\partial t) E_x(t), \quad (11)$$

式中 $\epsilon_r(\partial/\partial t)$ 为相对介电系数的时域算子形式,表示为

$$\begin{aligned} \epsilon_r(\partial/\partial t) &= \left[\sum_{n=0}^N p_n(\partial/\partial t)^n \right] \\ &\left[\sum_{n=0}^N q_n(\partial/\partial t)^n \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

将(12)式代入(11)式,并将分母上的求导运算移到等式左边可得

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{n=0}^N q_n (\partial/\partial t)^n \right] D_x(t) \\ &= \epsilon_0 \left[\sum_{n=0}^N p_n (\partial/\partial t)^n \right] E_x(t). \end{aligned} \quad (13)$$

(13)式是时域中含时间导数算子的本构关系,这是一个微分方程.

为得到方程(13)在时域的递推计算式,下面讨论时间导数算子在离散时域中的形式.设函数

$$y(t) = \partial f(t) / \partial t, \quad (14)$$

(14)式在 $(n + 1/2)\Delta t$ 的中心差分近似为

$$(y^{n+1} + y^n) / 2 = (f^{n+1} - f^n) / \Delta t, \quad (15)$$

其中(15)式左端取平均值近似.引进离散时域的移位算子 z_t ,定义为

$$z_t f^n = f^{n+1}, \quad (16)$$

即移位算子的作用相当于使离散时域数列的 n 时刻值移位到函数在 $n + 1$ 时刻的值.合并(15)和(16)式可得

$$y^n = (2/\Delta t) \mathbf{I}(z_t - 1)(z_t + 1) f^n, \quad (17)$$

比较(14)和(17)式有

$$\partial/\partial t \rightarrow (2/\Delta t) \mathbf{I}(z_t - 1)(z_t + 1). \quad (18)$$

可以证明,高阶时间导数的移位算子形式为(见附录B)

$$(\partial/\partial t)^n \rightarrow \mathbf{I} \{ [2/\Delta t \mathbf{I}(z_t - 1)(z_t + 1)]^n \}. \quad (19)$$

将(19)式代入(13)式并整理得到以下离散时域的本构关系(为简化,以下令 $h = 2/\Delta t$):

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{l=0}^N q_l \{ h^l \mathbf{I}(z_t - 1)(z_t + 1) \}^l \right] D_x^n \\ &= \epsilon_0 \left[\sum_{l=0}^N p_l \{ h^l \mathbf{I}(z_t - 1)(z_t + 1) \}^l \right] E_x^n. \end{aligned} \quad (20)$$

将(20)式两边乘以 $(z_t + 1)^N$ 得

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{l=0}^N q_l h^l (z_t + 1)^{N-l} (z_t - 1)^l \right] D_x^n \\ &= \epsilon_0 \left[\sum_{l=0}^N p_l h^l (z_t + 1)^{N-l} (z_t - 1)^l \right] E_x^n. \end{aligned} \quad (21)$$

(21)式称为离散时域含移位算子的本构关系.

4.2. 离散时域的递推关系

首先考虑(2)式中有理分式表示中的最高幂次 $N = 1$ 和 $N = 2$ 的情形.

情形1 令 $N = 1$,将 N 代入(21)式整理得

$$[(q_0 + q_1 h)z_t + (q_0 - q_1 h)]D_x^n$$

$$= \epsilon_0 [(p_0 + p_1 h)z_t + (p_0 - p_1 h)]E_x^n. \quad (22)$$

根据(16)式,可将(22)式写为

$$\begin{aligned} E_x^{n+1} &= [a_0(D_x^{n+1}/\epsilon_0) \\ &+ a_1(D_x^n/\epsilon_0) - b_1 E_x^n] b_0. \end{aligned} \quad (23)$$

(23)式给出了从 D 到 E 的递推计算公式,其中

$$\begin{aligned} a_0 &= q_0 + q_1 h, a_1 = q_0 - q_1 h, \\ b_0 &= p_0 + p_1 h, b_1 = p_0 - p_1 h. \end{aligned} \quad (24)$$

情形2 令 $N = 2$,将 N 代入(21)式整理得

$$\begin{aligned} & \mathbf{I} \{ [q_0 + q_1 h + q_2 h^2] z_t^2 + [2q_0 - 2q_2 h^2] z_t \\ &+ [q_0 - q_1 h + q_2 h^2] \} D_x^n \\ &= \mathbf{I} \{ [p_0 + p_1 h + p_2 h^2] z_t^2 + [2p_0 - 2p_2 h^2] z_t \\ &+ [p_0 - p_1 h + p_2 h^2] \} \epsilon_0 E_x^n. \end{aligned} \quad (25)$$

根据(16)和(21)式,(25)式可写为

$$\begin{aligned} E_x^{n+1} &= [a_0(D_x^{n+1}/\epsilon_0) + a_1(D_x^n/\epsilon_0) \\ &+ a_2(D_x^{n-1}/\epsilon_0) - b_1 E_x^n - b_2 E_x^{n-1}] b_0. \end{aligned} \quad (26)$$

(26)式给出了从 D 到 E 的递推计算公式,其中

$$\begin{aligned} a_0 &= q_0 + q_1 h + q_2 h^2, \\ a_1 &= 2q_0 - 2q_2 h^2, \\ a_2 &= q_0 - q_1 h + q_2 h^2, \\ b_0 &= p_0 + p_1 h + p_2 h^2, \\ b_1 &= 2p_0 - 2p_2 h^2, \\ b_2 &= p_0 - p_1 h + p_2 h^2. \end{aligned} \quad (27)$$

对于 $N \geq 3$ 的一般情况,(21)式可写为

$$E_x^{n+1} = \frac{1}{b_0} \left[\sum_{l=0}^N a_l (D_x^{n+1-l}/\epsilon_0) - \sum_{l=1}^N b_l E_x^{n+1-l} \right]. \quad (28)$$

式中 a_l, b_l 可由 $q_0, q_1, \dots, q_N, p_0, p_1, \dots, p_N$ 表示.可以看出,当色散介质的相对介电系数的分式有理函数的最高幂次 $N = 1$ 时,只需知道前一时刻的 D 与 E 值和当前时刻的 D 值即可求出当前时刻的 E .而当 $N = 2$ 时,则需要知道前两个时刻的 D, E 值和当前时刻的 D 值才能求出当前时刻的 E .

5. 数值结果

算例中入射波均取高斯脉冲

$$E(t) = \exp[-4\pi(t - t_0)^2/\tau^2], \quad (29)$$

式中 τ 为脉冲宽度.以下 δ 均表示 FDTD 计算时的元胞尺度, Δt 表示时间步长.取 $\Delta t = \delta/(2c)$,其中 c 为真空光速.

算例1 吸波介质的散射

吸波介质球半径为 0.25 米,非磁性介质($\mu_r =$

1.0, $\sigma_m = 0$). 其复相对介电常数可以表示为

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_\infty + (\epsilon_s - \epsilon_\infty) \frac{1}{1 + j\omega t_0} - j\sigma/\omega\epsilon_0, \quad (30)$$

式中, ω 为入射波频率; j 为虚数单位; $\epsilon_s = 1.16$ 为频率为零时的相对介电常数, $\epsilon_\infty = 1.01$ 为频率为无穷大时的相对介电常数, 电导率 $\sigma = 2.95 \times 10^{-4} \Omega$, $t_0 = 4.497 \times 10^{-10} \text{ s}$. 图 1 是该介质球的后向雷达散射截面 (RCS), 图中实线是考虑色散现象后用色散介质 FDTD 程序的计算结果. 圆点是 Mie 级数的计算结果. 可以看出, 色散介质 FDTD 的计算结果与 Mie 级数的结果符合的很好. 计算中 $\delta = 3.3 \times 10^{-3} \text{ m}$, $\tau = 60\Delta t$.

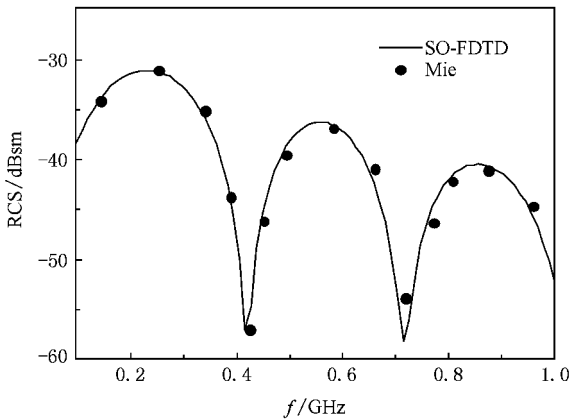


图 1 吸波球的后向 RCS

算例 2 非磁性等离子体球的后向 RCS

非磁化等离子体的相对介电系数^[28]为

$$\epsilon_r(\omega) = [1 + \omega_p^2 / (\omega(j\nu_c - \omega))] / \{ (j\omega)^2 + \nu_c(j\omega) + \omega_p^2 \} / \{ (j\omega)^2 + \nu_c(j\omega) \}, \quad (31)$$

式中, $\omega_p^2 = (Ne^2) / (m\epsilon_0)$ 为等离子体频率 (N, e, m 和 ϵ_0 分别为电子密度、电子电量、电子质量和真空介电常数), ν_c 为电子平均碰撞频率. 等离子体球半径为 3.75 mm, 非磁性等离子体的相对介电常数可以表示为 (31) 式. 取 $\nu_c = 2.0 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}$, $\omega_p = 1.8 \times 10^{11} \text{ Hz}$, $\delta = 5.0 \times 10^{-2} \text{ mm}$, $\tau = 60\Delta t$. 图 2 和图 3 分别为等离子体后向散射场的时域波形和后向 RCS. 图中圆圈表示由 Mie 级数所得的结果, 实线表示本文方法的计算结果, 可以看出两者相符.

算例 3 等离子体覆盖导体圆柱的宽频后向散射特性

覆盖等离子体的导体圆柱的截面如图 4 所示.

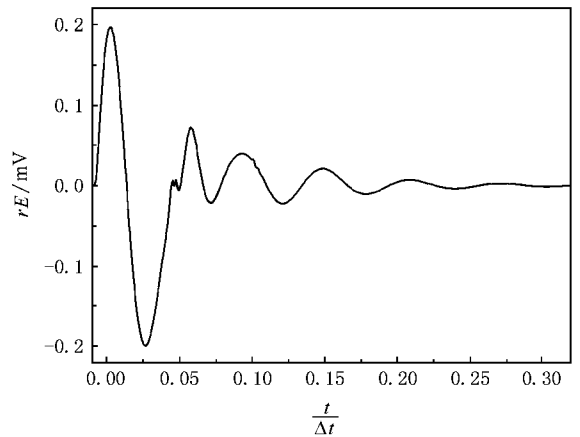


图 2 等离子体球后向散射场时域波形

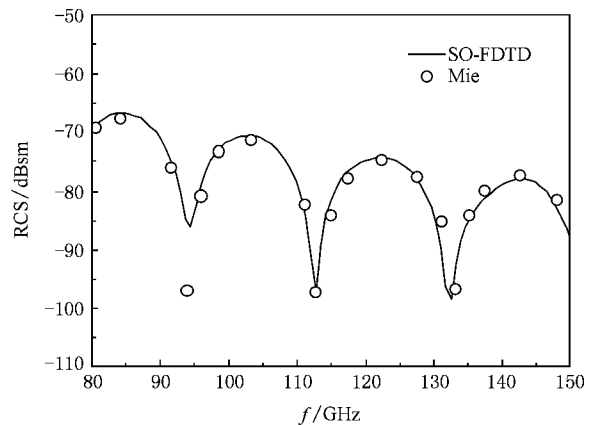


图 3 等离子体球的后向 RCS

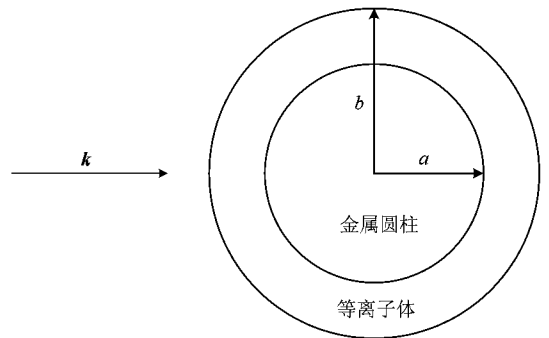


图 4 等离子体覆盖导体圆柱的示意图

导体圆柱半径为 $a = 0.2 \text{ m}$, $d = b - a$ 表示等离子体包层厚度. 入射方向如图, 后向散射. 计算中取 $d = 0.1 \text{ m}$, $\delta = 0.5 \text{ mm}$. TM 波入射时柱体的散射宽度如图 5 所示. 图 5(a) 中实线为本文方法的计算结果, \circ 和 \star 是文献 [29] 的结果, 两者符合很好. 等离子体的浓度为 $N = 5.0 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}$. 由图可见, 等离子体对

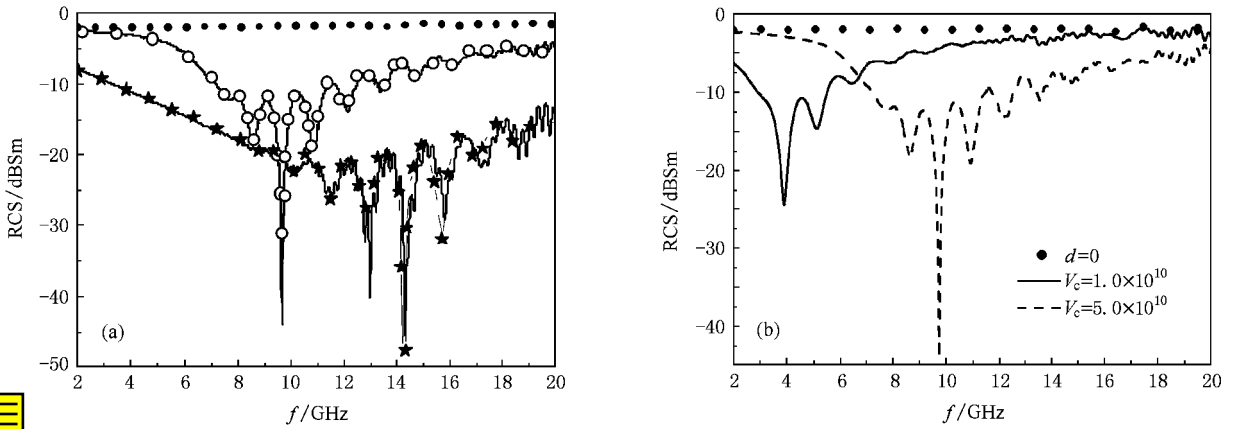


图5 二维覆盖等离子体的金属圆柱的散射宽度 (a)TM情形 (b)TE情形

电磁波的吸收效果明显,且具有很宽的吸收频带。

6. 结 论

本文的推证和计算结果说明,SO-FDTD 是一种

普遍适用于三种常见色散介质模型的通用计算方法.该方法数学推证过程清晰明了,便于编制通用程序处理不同类型色散介质的电磁散射问题,且具有较小的内存需求量.本文的数值结果说明了移位算子 FDTD 方法的正确性和通用性.

附录 A 三种色散介质模型的有理分式函数形式

SO-FDTD 方法要求,色散介质的相对介电系数可以写成以 $j\omega$ 为自变量的有理分式函数形式.由于介电系数和相对介电系数只差一个常量 ϵ_0 ,下面用归纳法证明三种常见色散介质模型的介电系数可以写成以 $j\omega$ 为自变量的有理分式函数形式,即

$$\epsilon(\omega) = \left[\sum_{n=0}^N p_n(j\omega)^n \right] / \left[\sum_{n=0}^N q_n(j\omega)^n \right]. \quad (\text{A1})$$

1) 德拜模型(Debye model)

$$\begin{aligned} \epsilon_{n+1}(\omega) = & \frac{(p_0 b + q_0 a \mathfrak{I} j\omega) + (p_1 b + p_0 c + q_1 a \mathfrak{I} j\omega)}{q_0 b(j\omega)^0 + (q_1 b + q_0 \mathfrak{I} j\omega) + (q_2 b + q_1 \mathfrak{I} j\omega)^2 + \dots} \\ & \times \frac{(p_2 b + p_1 c + q_2 a \mathfrak{I} j\omega) + \dots + (p_m b + p_{m-1} c + q_m a \mathfrak{I} j\omega)^m + p_m(j\omega)^{m+1}}{(q_m b + q_{m-1} c \mathfrak{I} j\omega)^m + q_m(j\omega)^{m+1}}, \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

上式中 $a = \Delta\epsilon_{n+1}(j\omega)/\epsilon_0$, $b = (j\omega)^0$, $c = \tau_{n+1}$.故 $\epsilon_{n+1}(\omega)$ 也可以写成

$$\left[\sum_{n=0}^{m+1} p_n(j\omega)^n \right] / \left[\sum_{n=0}^{m+1} q_n(j\omega)^n \right]$$

的形式.

综上所述,无论 p 取何值(A2)式都可以写成(A1)式的形式.

2) 洛伦兹模型(Lorentz model)

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_\infty + \sum_{p=1}^p \Delta\epsilon_p \omega_p^2 / (\omega_p^2 + 2j\omega\delta_p - \omega^2). \quad (\text{A6})$$



证明 当 $p = 1$ 时

$$\epsilon_1(\omega) = \frac{(\epsilon_\infty \omega_1^2 + \Delta\epsilon_1 \omega_1^2 \chi(j\omega)^0) + 2\epsilon_\infty \delta(j\omega_1)^1 + \epsilon_\infty (j\omega)^2}{\omega_1^2(j\omega)^2 + 2\delta(j\omega)^1 + (j\omega)^2}, \quad (A7)$$

故,当 $p = 1$ 时 (A6) 式可以写成 (A1) 式的形式.

设当 $p = n$ ($n \geq 1$) 时 (A6) 式可以写成 (A1) 式的形式,即

$$\epsilon_n(\omega) = \epsilon_\infty + \sum_{p=1}^n \frac{\Delta\epsilon_p \omega_p^2}{\omega_p^2 + 2j\omega\delta_p - \omega^2} = \left[\sum_{n=0}^m p_n(j\omega)^n \right] / \left[\sum_{n=0}^m q_n(j\omega)^n \right], \quad (A8)$$

则当 $p = n + 1$ 时

$$\begin{aligned} \epsilon_{n+1}(\omega) &= \frac{(p_0 b + q_0 a \chi(j\omega)^0) + (p_1 b + p_0 c + q_1 a \chi(j\omega)^1) + (p_2 b + p_1 c + p_0 d + q_2 a \chi(j\omega)^2) \dots}{q_0 b(j\omega)^0 + (q_1 b + q_0 c \chi(j\omega)^1) + (q_2 b + q_1 c + q_0 d \chi(j\omega)^2) + \dots} \\ &\times \frac{+(p_m b + p_{m-1} c + p_{m-2} d + q_m a \chi(j\omega)^m) + (p_m c + p_{m-1} d \chi(j\omega)^{m+1}) + p_m d(j\omega)^{m+2}}{+(q_m b + q_{m-1} c + q_{m-2} d \chi(j\omega)^m) + (q_m c + q_{m-1} d \chi(j\omega)^{m+1}) + q_m d(j\omega)^{m+2}}, \end{aligned} \quad (A9)$$

上式中 $a = \Delta\epsilon_{n+1} \omega_{n+1}^2 / \epsilon_0$, $b = \omega_{n+1}^2$, $c = 2\delta_{n+1}$, $d = 1$ 故 $\epsilon_{n+1}(\omega)$ 也可以写成

$$\left[\sum_{n=0}^{m+2} p_n(j\omega)^n \right] / \left[\sum_{n=0}^{m+2} q_n(j\omega)^n \right]$$

的形式.

综上所述,无论 p 取何值 (A6) 式都可以写成 (A1) 式的形式.

3 德鲁模型 (Drude model)

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_\infty - \sum_{p=1}^p \omega_p^2 (\omega_p^2 - j\omega\gamma_p). \quad (A10)$$

证明 当 $p = 1$ 时

$$\epsilon_1(\omega) = [(\epsilon_\infty \omega_1^2 - \omega_1^2 \chi(j\omega)^0) - \epsilon_\infty \gamma_1(j\omega)^1] / [\omega_1^2(j\omega)^0 - \gamma_1(j\omega)^1], \quad (A11)$$

显然,当 $p = 1$ 时 (A10) 式可以写成 (A1) 式的形式.

设当 $p = n$ ($n \geq 1$) 时 (A10) 式可以写成 (A1) 式的形式,即

$$\epsilon_n(\omega) = \left[\sum_{n=0}^m p_n(j\omega)^n \right] / \left[\sum_{n=0}^m q_n(j\omega)^n \right], \quad (A12)$$

则当 $p = n + 1$ 时

$$\begin{aligned} \epsilon_{n+1}(\omega) &= \frac{(p_0 b + q_0 a \chi(j\omega)^0) + (p_1 b + p_0 c + q_1 a \chi(j\omega)^1)}{q_0 b(j\omega)^0 + (q_1 b + q_0 c \chi(j\omega)^1) + (q_2 b + q_1 c \chi(j\omega)^2) + \dots} \\ &\times \frac{+(p_2 b + p_1 c + q_2 a \chi(j\omega)^2) + \dots + (p_m b + p_{m-1} c + q_m a \chi(j\omega)^m) + p_m d(j\omega)^{m+1}}{+(q_m b + q_{m-1} c \chi(j\omega)^m) + q_m d(j\omega)^{m+1}}, \end{aligned} \quad (A13)$$

上式中 $a = -\omega_{n+1}^2(j\omega)^0 / \epsilon_0$, $b = \omega_{n+1}^2(j\omega)^0$, $c = -\gamma_{n+1}$ 所以 $\epsilon_{n+1}(\omega)$ 也可以写成

$$\left[\sum_{n=0}^{m+1} p_n(j\omega)^n \right] / \left[\sum_{n=0}^{m+1} q_n(j\omega)^n \right]$$

的形式.

综上所述,无论 p 取何值 (A10) 式均可以写成 (A1) 式的形式.

附录 B 高阶时间导数移位算子形式的证明

已知

$$\partial/\partial t \rightarrow (2/\Delta t) \mathbb{I}(z_i - 1)(z_i + 1)],$$

以下用归纳法证明

$$(\partial/\partial t)^n \rightarrow \mathbb{I}(2/\Delta t)^n \mathbb{I}(z_i - 1)(z_i + 1)]^n.$$

证明 设函数 y 为函数 f 对时间的二阶导数

$$y(t) = \partial^2 f(t) / \partial t^2, \quad (B1)$$

将上式右端在 $(n + 1/2)\Delta t$ 的中心差分近似为

$$y^n = (f^{n+1} - 2f^n + f^{n-1}) / \Delta t^2, \quad (B2)$$

将 (B2) 式左端函数 y 在 n 时刻的值由 $n + 1$ 时刻, n 时刻和 $n - 1$ 时刻的值平均得到,则 (B2) 式可以改写为

$$\begin{aligned} y^n &= \frac{y^n}{2} + \frac{y^n}{2} = \frac{y^{n+1} + y^{n-1}}{4} + \frac{y^n}{2} \\ &= \frac{y^{n+1} + 2y^n + y^{n-1}}{4} = \frac{f^{n+1} - 2f^n + f^{n-1}}{\Delta t^2}. \end{aligned} \quad (B3)$$

引进离散时域的移位算子 z_i ,即定义为 (16) 式,

由 (16) 和 (B3) 式可得

$$y^{n-1} = \frac{4}{\Delta t^2} \frac{z_t^2 - 2z_t + 1}{z_t^2 + 2z_t + 1} f^{n-1} = \left(\frac{2}{\Delta t} \frac{z_t - 1}{z_t + 1} \right)^2 f^{n-1}. \quad (\text{B4})$$

可见当 $n=2$ 时(19)式成立.

设 $n=k$ 时(19)式成立,即

$$(\partial/\partial t)^k \rightarrow \left[\frac{2}{\Delta t} \frac{z_t - 1}{z_t + 1} \right]^k, \quad (\text{B5})$$

则当 $n=k+1$ 时,设函数 y 是函数 f 对时间的 $k+1$ 阶偏导

$$y(t) = \partial^{k+1} f(t) \partial t^{k+1} = (\partial/\partial t \left[\partial^k f(t) \right]) \partial t^k, \quad (\text{B6})$$

令

$$x(t) = \partial^k f(t) \partial t^k, \quad (\text{B7})$$

(B6)式可以写成

$$y(t) = (\partial/\partial t \left[x(t) \right]). \quad (\text{B8})$$

同样引进离散时域的移位算子 z_t ,即

$$z_t x^n = x^{n+1}, \quad (\text{B9})$$

可得

$$y^n = (2/\Delta t \left[\frac{z_t - 1}{z_t + 1} \right])^n x^n. \quad (\text{B10})$$

综合(B5)(B7)和(B10)式可得

$$y^{k+1} = \left(\frac{2}{\Delta t} \frac{z_t - 1}{z_t + 1} \right) \left(\frac{2}{\Delta t} \frac{z_t - 1}{z_t + 1} \right)^k = \left(\frac{2}{\Delta t} \frac{z_t - 1}{z_t + 1} \right)^{k+1}. \quad (\text{B11})$$

可见当 $n=k+1$ 时(19)式是成立的.

综上所述,无论 k 取任何整数(19)式均成立.

- [1] Luebbers R J ,Hunsberger F ,Kunz K S ,Standler R ,Schneider M 1990 *IEEE Trans . Electromagn . Compat .* **32** 222
- [2] Luebbers R J ,Hunsberger F ,Kunz K S 1991 *IEEE Trans . Antennas Propagat .* **39** 29
- [3] Luebbers R J ,Hunsberger F R 1992 *IEEE Trans . Antennas Propagat .* **40** 1297
- [4] Pontalti R ,Cristoforetti L ,Antonini R ,Cescatti L 1994 *IEEE Trans . Microwave Theory Tech .* **42** 526
- [5] Hunsberger F ,Lubbers R J ,Kunz K S 1992 *IEEE Trans . Antennas Propagat .* **40** 1489
- [6] Luebbers R J ,Steich D ,Kunz K 1993 *IEEE Trans . Antennas Propagat .* **41** 1249
- [7] Kelley D F ,Luebbers R J 1996 *IEEE Trans . Antennas Propagat .* **44** 792
- [8] Siushansian R ,Lovetri J 1995 *IEEE Microwave Guided Wave Lett .* **5** 426
- [9] Nickisch L J ,Franke P M 1992 *IEEE Antennas Propagat . Mag .* **34** 33
- [10] Gandhi O P ,Gao B Q ,Chen T Y 1993 *IEEE Trans . Microwave Tech .* **41** 658
- [11] Takayama Y ,Klaus W 1994 *IEEE Microw . Wireless Compon . Lett .* **12** 102
- [12] Sullivan D M 1992 *IEEE Trans . Antennas Propagat .* **40** 1223
- [13] Sullivan D M 1995 *IEEE Trans . Antennas Propagat .* **43** 676
- [14] Sullivan D M 1996 *IEEE Trans . Antennas Propagat .* **44** 28
- [15] Chen Q ,Katsurai M ,Aoyagi P H 1998 *IEEE Trans . Antennas Propagat .* **46** 1739
- [16] Young J L 1994 *Radio Sci .* **29** 1513
- [17] Young J L 1995 *IEEE Trans . Antennas Propagat .* **43** 422
- [18] Young J L 1996 *IEEE Trans . Antennas Propagat .* **44** 1283
- [19] Xu L J ,Yuan N C 2005 *IEEE microwave and Wireless Components Letters* **15** 277
- [20] Liu S B ,Mo J J ,Yuan N C 2004 *Acta Phys . Sin .* **53** 778 (in Chinese) [刘少斌、莫锦军、袁乃昌 2004 物理学报 **53** 778]
- [21] Yang L X ,Ge D B ,Wei B 2007 *Acta Phys . Sin .* **56** 4509 (in Chinese) [杨利霞、葛德彪、魏 兵 2007 物理学报 **56** 4509]
- [22] Liu S B ,Mo J J ,Yuan N C 2004 *Acta Phys . Sin .* **53** 783 (in Chinese) [刘少斌、莫锦军、袁乃昌 2004 物理学报 **53** 783]
- [23] Liu S B ,Mo J J ,Yuan N C 2004 *Acta Phys . Sin .* **53** 2233 (in Chinese) [刘少斌、莫锦军、袁乃昌 2004 物理学报 **53** 2233]
- [24] Yang L X ,Ge D B 2006 *Acta Phys . Sin .* **55** 1751 (in Chinese) [杨利霞、葛德彪 2006 物理学报 **55** 1751]
- [25] Ge D B ,Wu Y L ,Zhu X Q 2003 *Chin . J . Radio Sci .* **18** 359 (in Chinese) [葛德彪、吴跃丽、朱湘琴 2003 电波科学学报 **18** 359]
- [26] Allen T ,Susan C H 2005 *Computational Electrodynamics-the Finite Difference Time Domain Method* (third edition) (London : Artech House)
- [27] Ge D B ,Yan Y B 2005 *Finite-Difference Time-Domain Method for Electromagnetic Waves (2thed)* (Xi'an : Xidian University Press) (in Chinese) [葛德彪、闫玉波 2005 电磁波时域有限差分方法(第二版) (西安 : 西安电子科技大学出版社)]
- [28] Ginzburg V L 1970 *The Propagation of Electromagnetic Waves in Plasmas (2thed)* (Oxford : Pergamon Press)
- [29] Mo J J ,Liu S B ,Yuan N C 2003 *J . Microwaves* **19** 20 (in Chinese) [莫锦军、刘少斌、袁乃昌 2004 微波学报 **19** 20]

A general method for finite difference time domain modeling of wave propagation in frequency-dispersive media *

Wei Bing[†] Ge De-Biao Wang Fei

(Department of Physics ,Xi'dian University ,Xi'an 710071 ,China)

(Received 17 December 2007 ; revised manuscript received 11 April 2008)

Abstract

The analysis of electromagnetic scattering and propagation in dispersive media is complicated in time domain ,because its dielectric property is frequency-dependent. A disadvantage of the prevailing algorithms is the need to deduce different formulations for each dispersion model. In this paper ,the shift operator finite difference time domain (SO-FDTD) method is developed. First ,we prove that the complex permittivity of three kinds of general dispersive media models i. e. Debye model ,the Lorentz model and the Drude model , may be described by rational polynomial functions in $j\omega$. By introducing a shift operator z_t , the constitutive relation between \mathbf{D} and \mathbf{E} is derived in discretised time domain. The shift operator method is then applied to the general dispersive medium case. The recursive formulation for \mathbf{D} and \mathbf{E} available for FDTD computation is obtained. Finally ,the scatterings by a dispersive sphere and a PEC object covered with dispersive media are computed. The computed results are in good agreement with the literature and the one obtained by Mie's series solution. This illustrates the generality and the feasibility of the presented scheme.

Keywords : FDTD method , dispersive media , shift operator

PACC : 4110H , 5170 , 5210

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60871070) and the National Science Foundation for Post-doctoral Scientists of China (Grant No. 20070421109).

[†] E-mail : bwei@xidian.edu.cn