

# 基于双谱的脉冲星累积脉冲轮廓时间延迟测量<sup>\*</sup>

谢振华<sup>1)†</sup> 许录平<sup>1)</sup> 倪广仁<sup>2)</sup>

1) 西安电子科技大学电子工程学院, 西安 710071)

2) 中国科学院国家授时中心, 西安 710600)

(2007 年 12 月 5 日收到, 2008 年 2 月 28 日收到修改稿)

为提高脉冲星辐射脉冲到达时间的测量精度, 提出了基于双谱的脉冲星累积脉冲轮廓时间延迟测量算法. 理论上, 双谱可以完全抑制加性高斯白噪声. 通过进行自双谱与互双谱的比对及求解极值点, 推导出时间延迟测量公式. 实验结果表明, 基于双谱的时间延迟测量算法可以有效抑制高斯白噪声, 当累积脉冲轮廓观测值存在噪声项时, 基于双谱的累积脉冲轮廓时间延迟测量精度优于泰勒提出的功率谱算法.

关键词: 脉冲星, 脉冲到达时间, 累积脉冲轮廓时间延迟, 双谱

PACC: 9760G, 9570, 9575M

## 1. 引 言

脉冲星是一种快速自转并具有强磁场的中子星, 其辐射脉冲信号具有稳定的周期性, 其长期稳定度的典型值为  $10^{-15}$ <sup>[1]</sup>, 可与铯原子钟相媲美. 某些毫秒脉冲星(如 PSR B1937 + 21, PSR B1855 + 09, PSR J1643-1224 等)的周期变化率为  $10^{-19}$ — $10^{-21}$ <sup>[2-5]</sup>, 被誉为自然界最稳定的频率基准. 脉冲星辐射脉冲信号到达时间的测量及其时间尺度的研究对于评价、检验原子时尺度具有重大意义. 同时, 毫秒脉冲星辐射脉冲信号的高稳定周期性对天文学、天体物理学、电波传播学、广义相对论等学科的研究以及空间定时、导航、定位技术具有重要意义.

脉冲到达时间测量精度主要取决于脉冲星累积脉冲轮廓时间延迟的测量精度. 目前主要利用 Taylor FFT 算法, 该算法使时间延迟的估计精度不再依赖累积脉冲轮廓的时间分辨率, 而依赖于累积脉冲轮廓的信噪比. 然而, 受脉冲星自转周期的变化、脉冲星位置变化、色散延迟、散射、相对论效应、双星系统的轨道运动、地球运动及其他未知因素等的影响<sup>[6]</sup>, 脉冲星累积脉冲轮廓仍存在噪声项. 本文分析了噪声对基于 Taylor FFT 算法的时间延迟测量精度的影响, 提出了基于双谱的累积脉冲轮廓时间延迟

测量算法. 理论上, 双谱可以完全抑制加性高斯白噪声, 对乘性噪声以及乘性、加性混合噪声也具有较好的抑制效果<sup>[7]</sup>. 三阶累积量的时间延迟导致其双谱出现相位旋转, 通过进行自双谱与互双谱的比对及求解极值点, 可推导出时间延迟量.

## 2. 基于 FFT 的累积脉冲轮廓时间延迟测量

设累积脉冲轮廓模型为  $s(n)$ , 累积脉冲轮廓观测值  $p(n)$  为

$$p(n) = b + l \cdot s(n - \tau) + \eta(n), \quad (1)$$

式中,  $\eta(n)$  为随机噪声,  $l$  为幅度因子,  $b$  为累积脉冲轮廓幅值的偏差量,  $\tau$  为  $s(n)$  与  $p(n)$  间的时间延迟量.

设脉冲星累积脉冲轮廓的采样时间间隔为  $\Delta t$ , 采样点数为  $N$ , 时间长度  $T = (N - 1) \cdot \Delta t$ , 且  $(2 \cdot \Delta t)^{-1} \geq f_e$ ,  $f_e$  为累积脉冲轮廓的最高频率. 设  $P(k)$ ,  $\alpha(k)$  分别为累积脉冲轮廓  $p(n)$  经过傅里叶变换的幅值与相位,  $S(k)$ ,  $\phi(k)$  分别为累积脉冲轮廓模型  $s(n)$  经过傅里叶变换的幅值与相位. 即

$$P(k) \exp[i\alpha(k)] = \sum_{n=0}^{N-1} p(n) e^{-i2\pi nk/N}, \quad (2)$$

$$S(k) \exp[i\phi(k)] = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{-i2\pi nk/N}, \quad (3)$$

<sup>\*</sup> 国家高技术研究发展计划(863)批准号 2007AA12Z323 和国家自然科学基金(批准号 60472085, 60772139)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: zhxie@mail.xidian.edu.cn

式中  $k \in [0, N-1]$  为频率. 又

$$P(k) = \sum_{n=0}^{N-1} [b + lS(n-\tau) + \eta(n)] e^{-i2\pi kn/N}$$

$$= b \cdot N + lS(k) \exp[-i2\pi k\tau/N] + H(k) \quad (4)$$

$$x^2(l, \tau) = \sum_{k=1}^{N/2} \left| \frac{P(k) - lS(k) \exp[-i(\phi(k) - \theta(k) + 2\pi k\tau/N)]}{\delta_k} \right|^2 \quad (6)$$

计算 式中  $\delta_k$  是噪声在频率  $k$  处的均方根幅度.  $P(k)$  与  $S(k)$  随频率衰减得比噪声快, 因此, 在实际处理中, 一般将  $\delta_k$  看作常数.

将 (6) 式中的指数项替换为三角函数, 可以获得  $x^2(l, \tau)$  的简洁表达式, 即

$$x^2 = \delta^{-2} \sum (P_k^2 + l^2 S_k^2) + 2l\delta^{-2} \sum P_k S_k \times \cos(\phi_k - \theta_k + 2\pi k\tau/N), \quad (7)$$

式中  $x^2 = x^2(l, \tau)$ ,  $\delta = \delta_k$ ,  $P_k = P(k)$ ,  $S_k = S(k)$ ,  $\phi_k = \phi(k)$ ,  $\theta_k = \theta(k)$ .

当 (7) 式取最小值时, 可通过计算偏导数求解  $\tau$  与  $l$ .

$$\frac{\partial x^2}{\partial \tau} = -\frac{2l}{\delta^2} \cdot \frac{2\pi}{N} \sum k P_k S_k \sin(\phi_k - \theta_k + 2\pi k\tau/N)$$

$$= 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial x^2}{\partial l} = \frac{2l}{\delta^2} \sum S_k^2 + \frac{2}{\delta^2} \sum P_k S_k \cos(\phi_k - \theta_k + 2\pi k\tau/N)$$

$$= 0. \quad (9)$$

可通过迭代算法由 (8) 式计算时间延迟  $\tau$ .

基于 FFT 的累积脉冲轮廓时间延迟测量精度不依赖累积脉冲轮廓的时间分辨率, 而依赖于累积脉冲轮廓的信噪比 (SNR).

### 3. 基于双谱的时间延迟测量

累积脉冲轮廓模型  $s(n)$  的三阶累积量<sup>[9]</sup>为

$$c_{3s}(\tau_1, \tau_2) = E\{s(n)s(n+\tau_1)s(n+\tau_2)\}, \quad (10)$$

式中  $\tau_1, \tau_2$  为  $s(n)$  的时间延迟.

累积脉冲轮廓  $p(n)$  与模型  $s(n)$  之间的互三阶累积量<sup>[9]</sup>为

$$c_{3ps}(\tau_1, \tau_2) = E\{s(n)p(n+\tau_1)s(n+\tau_2)\}$$

$$= c_{3s}(\tau_1 - \tau, \tau_2), \quad (11)$$

式中  $\tau$  为累积脉冲轮廓  $p(n)$  与模型  $s(n)$  之间的时间延迟量.

设  $P_{3s}(w_1, w_2)$  为模型函数  $s(n)$  的双谱,  $P_{3ps}$

式中  $H(k)$  为随机噪声  $\eta(n)$  的傅里叶变换在频率  $k$  处的值. 在零频率处可推导出

$$b = [P(0) - l \cdot S(0)]/N, \quad (5)$$

时间延迟  $\tau$  和增益  $l$  可通过<sup>[8]</sup>

( $w_1, w_2$ ) 为累积脉冲轮廓  $p(n)$  与模型  $s(n)$  的互双谱<sup>[9]</sup> 则

$$P_{3ps}(w_1, w_2) = P_{3s}(w_1, w_2) e^{iw_1\tau}, \quad (12)$$

式中  $w_1, w_2$  分别为双谱的两个频率参数,  $w_1 \in [0, N/2]$ ,  $w_2 \in [0, N/2]$ ,  $N$  为采样点数.

借鉴 (6) 式, 定义当  $p(n)$  与  $s(n)$  之间的时间延迟估计值为  $\tau$  时,  $P_{3ps}(w_1, w_2)$  与  $P_{3s}(w_1, w_2)$  之间的平方累积误差为

$$X^2(\tau) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} \left| |P_{3ps}(k_1, k_2)| - |P_{3s}(k_1, k_2)| \right|$$

$$\times e^{i(\theta(k_1, k_2) - \phi(k_1, k_2) - 2\pi k_1 \tau/N)} \Big|^2$$

$$= \sum_{k_1} \sum_{k_2} \left| |P_{3ps}(k_1, k_2)|^2 + |P_{3s}(k_1, k_2)|^2 \right.$$

$$- 2 \cdot |P_{3ps}(k_1, k_2)| \cdot |P_{3s}(k_1, k_2)|$$

$$\times e^{i(\theta(k_1, k_2) - \phi(k_1, k_2) - 2\pi k_1 \tau/N)} \Big|, \quad (13)$$

式中  $k_1 = w_1, k_2 = w_2, \theta(k_1, k_2), \phi(k_1, k_2)$  分别为  $P_{3ps}(w_1, w_2), P_{3s}(w_1, w_2)$  的相位函数.

若  $D$  为时间延迟真值, 由于

$$e^{i(\theta(k_1, k_2) - \phi(k_1, k_2) - 2\pi k_1 \tau/N)}$$

$$= \cos(\theta(k_1, k_2) - \phi(k_1, k_2) - 2\pi k_1 \tau/N)$$

$$+ i \cdot \sin(\theta(k_1, k_2) - \phi(k_1, k_2) - 2\pi k_1 \tau/N), \quad (14)$$

则

$$\sin(\theta(k_1, k_2) - \phi(k_1, k_2) - 2\pi k_1 \tau/N) \xrightarrow{\tau \rightarrow D} 0, \quad (15)$$

且

$$\frac{\partial X^2(\tau)}{\partial \tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow D} 0, \quad (16)$$

即当时间延迟估计值  $\tau$  趋向于真值  $D$  时,  $X^2(\tau)$  趋向于最小值. 因此

$$X^2(\tau) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} \left[ |P_{3ps}(k_1, k_2)|^2 \right.$$

$$\left. + |P_{3s}(k_1, k_2)|^2 \right]$$

$$- 2 \cdot | P_{sps}(k_1, k_2) | \cdot | P_{3s}(k_1, k_2) | \times \cos(\theta(k_1, k_2) - \phi(k_1, k_2) - 2\pi k_1 \tau / N) \quad (17)$$

$$\frac{\partial X^2(\tau)}{\partial \tau} = - 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{k_1} \left\{ k_1 \cdot \sum_{k_2} \left[ | P_{sps}(k_1, k_2) | \times | P_{3s}(k_1, k_2) | \cdot \sin(\theta(k_1, k_2) - \phi(k_1, k_2) - 2\pi k_1 \tau / N) \right] \right\} \quad (18)$$

通过 (16) (18) 式可计算时间延迟  $\tau$ 。

### 4. 实验与分析

#### 4.1. Taylor FFT 算法实验

由 (8) 式定义

$$\Delta_1 = \sum k P_k S_k \sin(\phi_k - \theta_k + 2\pi k \tau / N). \quad (19)$$

式中  $\Delta_1$  为自定义参数, 当  $\Delta_1 = 0$  时, 时间延迟估计值  $\tau$  等于真值  $D$ .  $P_k, \theta_k, S_k, \phi_k, k$  的定义同 (8) 式.

采用 PSR B0329 + 54 累积脉冲轮廓数据进行 Taylor FFT 时延测量实验, 脉冲星累积脉冲轮廓数据来自于 EPN 数据库<sup>[10]</sup>. 设时间延迟真值  $D = 0.0558$  s, 噪声服从高斯分布. 图 1 为 PSR B0329 + 54 的累积脉冲轮廓, 其中, 实线为累积脉冲标准轮廓, 虚线为 SNR = 6.02 dB 时的累积脉冲轮廓. 图 2 显示了 SNR 为 6.02 dB 的噪声对基于 Taylor FFT 算法的累积脉冲轮廓时间延迟测量精度的影响, 其中横坐标为时间延迟  $\tau$ , 纵坐标为  $10 \lg(\Delta_1)$ . 实线表示无噪声时  $10 \lg(\Delta_1)$  随  $\tau$  的变化, 虚线表示 SNR 为 6.02 dB 时  $10 \lg(\Delta_1)$  随  $\tau$  的变化, 分别取使  $10 \lg(\Delta_1)$  达到最小值时的  $\tau$  值为时间延迟估计值, 即  $\tau = 0.0558$  s (SNR 为无限制) 和  $\tau = 0.0504$  s (SNR = 6.02 dB). 图 3 显示了不同 SNR 的噪声对基于 Taylor FFT 算法的累积脉冲轮廓时间延迟测量精度的影响 (对计算过程中的多解情况, 本实验未进行特别处理), 图中横坐标为信噪比, 纵坐标为时间延迟  $\tau$ . 图 3 中, 实线表示时间延迟测量误差的标准差, 虚线表示时间延迟测量值的最大值. 在本实验中, 时间延迟  $\tau$  存在有效范围 ( $0 \leq \tau \leq 0.1005$  s), 即当时间延迟的测量值在有效范围内时, 相应信噪比对应的实线很好地反映出时间延迟量  $\tau$  的测量误差, 当时间延迟量  $\tau$  的最大值接近或等于 0.1005 s 时, 相应信噪比

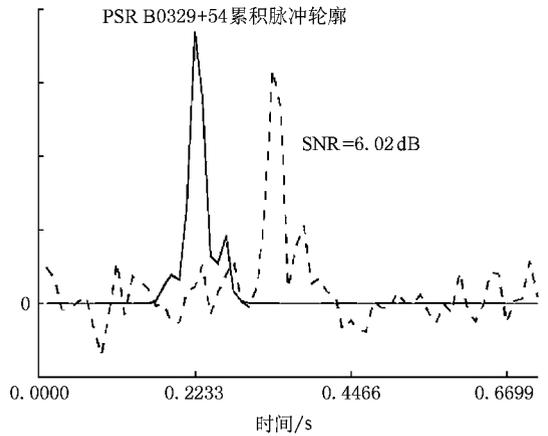


图 1 PSR B0329 + 54 累积脉冲轮廓模型及其加噪波形

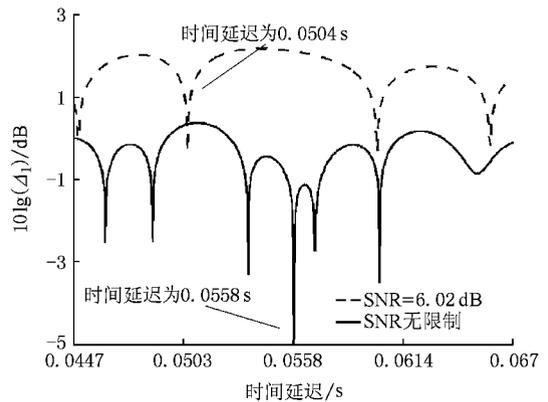


图 2 噪声对基于 FFT 的 PSR B0329 + 54 累积脉冲轮廓时间延迟测量精度的影响 (信噪比 SNR = 6.02 dB)

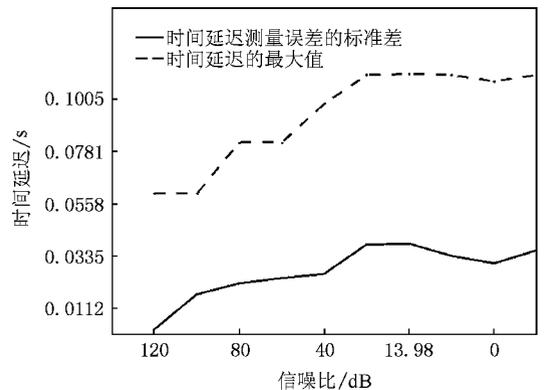


图 3 不同信噪比的噪声对基于 Taylor FFT 的累积脉冲轮廓时间延迟测量精度的影响

对应的测量误差的标准差小于实际值. 实验结果表明, 累积脉冲轮廓时间延迟的 Taylor FFT 测量算法对噪声比较敏感, 且时间延迟测量误差随信噪比的

降低而迅速增大.

### 4.2. 双谱算法实验

由(18)式定义

$$\Delta_2 = \sum_{k_1} \left\{ k_1 \cdot \sum_{k_2} \left[ |P_{sps}(k_1, k_2)| \cdot |P_{3s}(k_1, k_2)| \times \sin(\theta(k_1, k_2) - \phi(k_1, k_2) - 2\pi k_1 \tau / N) \right] \right\}, \quad (20)$$

式中  $\Delta_2$  为自定义参数,当  $\Delta_2 = 0$  时,时间延迟估计值  $\tau$  等于真值  $D$ .  $P_{sps}, P_{3s}, \theta, \phi, k_1, k_2$  的定义同(18)式.

仍采用 PSR B0329 + 54 累积脉冲轮廓数据,波形如图 1. 设时间延迟真值  $D = 0.1116$  s, 噪声服从正态分布. 图 4 为 PSR B0329 + 54 累积脉冲轮廓的双谱图. 图 5 显示了信噪比为 6.02 dB 的噪声对基于双谱的累积脉冲轮廓时间延迟测量精度的影响, 其中横坐标为时间延迟  $\tau$ , 纵坐标为  $10 \lg(\Delta_2)$ . 实线表示无噪声时  $10 \lg(\Delta_2)$  随  $\tau$  的变化, 虚线表示信噪比为 6.02 dB 时  $10 \lg(\Delta_2)$  随  $\tau$  的变化, 分别取使  $10 \lg(\Delta_2)$  达到最小值时  $\tau$  的值为时间延迟估计值, 即  $\tau = 0.1116$  s (SNR 为无限制) 和  $\tau = 0.1117$  s (SNR = 6.02 dB). 与图 2 相比, 可以发现双谱算法可以有效抑制加性高斯白噪声, 测量精度优于 Taylor FFT 算法. 图 6 显示了基于双谱的时间延迟测量算法的多解情况, 其中实线为单解模式, 虚线为多解模式, 两种模式随机出现. 当信噪比较大时, 多解模式中的解的数目较少, 相互间距离较远, 且有一解相对稳定, 因此可以通过多次测量进行有效解的辨识. 随着信噪比的降低, 解的数目增多, 难以辨识, 如图 7. 图 8 比较了噪声对双谱与 Taylor FFT 时延测量算法的测量精度的影响, 图中横坐标为信噪比, 纵坐标为时间延迟测量误差的标准差. 图中实线表示双谱算法的测量结果, 虚线表示 Taylor FFT 算法的测量结果, 可以看出, 基于双谱的时间延迟测量结果受噪声的影响较小, 相比较, Taylor FFT 算法的测量误差随信噪比的降低不断增大.

分别采用 Taylor FFT 算法和双谱算法对 PSR J0437-4715, PSR J1919 + 0021, PSR J2145-0750, PSR B2111 + 46 和 PSR B1451-68 五颗脉冲星的累积脉冲轮廓进行了时间延迟测量实验, 计算时间延迟测量误差的标准差, 如表 1. 对计算过程中的多解情况, 本实验以使  $10 \lg(\Delta_2)$  达到最小值的  $\tau$  值作为唯一

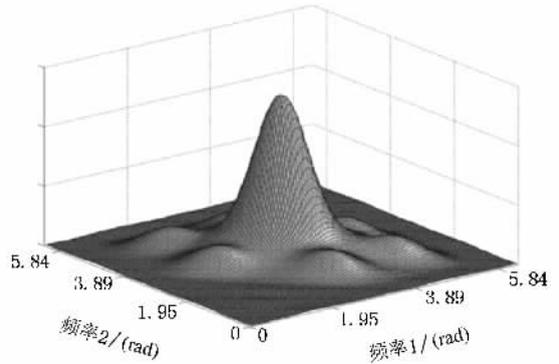


图 4 PSR B0329 + 54 累积脉冲轮廓的双谱图

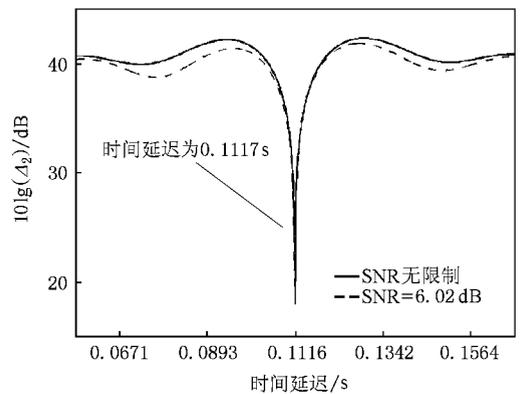


图 5 噪声对基于双谱的 PSR B0329 + 54 累积脉冲轮廓时间延迟测量精度的影响(SNR = 6.02)

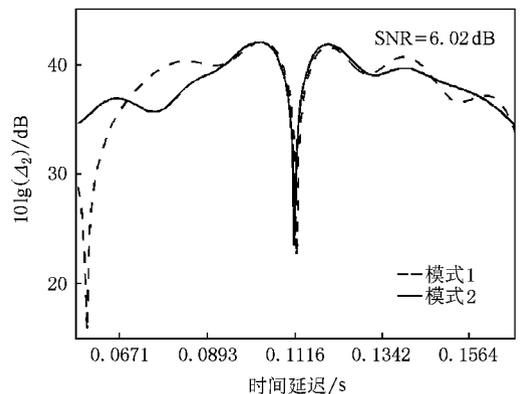


图 6 基于双谱的 PSR B0329 + 54 累积脉冲轮廓时间延迟解的两种模式(SNR = 6.02)

正确解, 而未进行其他特别处理, 但仍能有效反映实验结果. 实验结果表明基于双谱的累积脉冲轮廓时间延迟测量算法对不同脉冲星均有效, 且测量性能不受脉冲星累积脉冲轮廓形状、脉冲宽度所占脉冲周期比值等因素的影响.

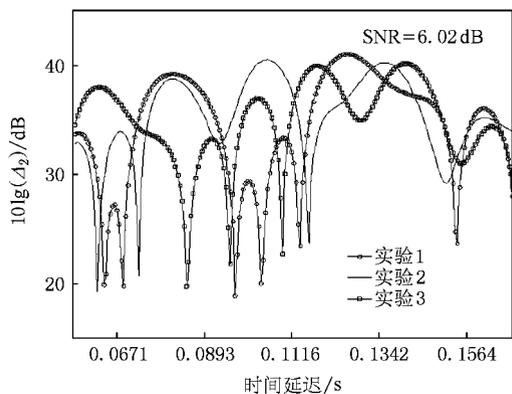


图 7 基于双谱的 PSR B0329 + 54 累积脉冲轮廓时间延迟测量的多解情况 (SNR = 6.02 dB)

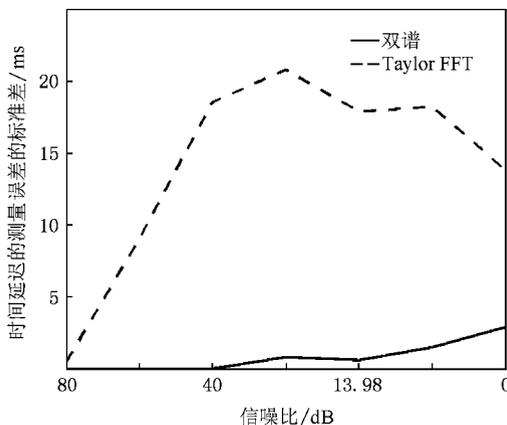


图 8 基于 Taylor FFT 与基于双谱的累积脉冲轮廓时间延迟测量精度受噪声影响的比较

表 1 Taylor FFT 和双谱算法分别对五颗脉冲星的累积脉冲轮廓时间延迟的测量结果

脉冲星	J0437-4715	J1919 + 0021	J2145-0750	B2111 + 46	B1451-68					
时间延迟真值/s	0.00045	0.0994	0.00125	0.0517	0.0206					
测量技术及误差	时间延迟测量误差的标准差/ms									
	FFT	双谱	FFT	双谱	FFT	双谱	FFT	双谱	FFT	双谱
SNR = 60 dB	0	0	0	0	0	0	1.42	0	1.25	0
SNR = 40 dB	0.10	0	1.63	0	0	0	3.33	0	4.36	0
SNR = 20 dB	0.13	0	13.9	0	0.29	0.01	8.34	0.37	5.99	0
SNR = 13.98 dB	0.13	0.005	16.0	0.7	0.41	0.02	7.81	1.97	6.16	0.15
SNR = 6.02 dB	0.12	0.005	28.6	1.99	0.38	0.02	10.4	1.32	5.60	0.46

## 5. 结 论

脉冲星累积脉冲轮廓时间延迟测量精度是决定脉冲到达时间测量精度的主要因素, Taylor FFT 算法使时间延迟测量精度依赖于累积脉冲轮廓信噪比,

而不是其时间分辨率. 本文分析了累积脉冲轮廓信噪比对 Taylor FFT 算法的影响, 提出了基于双谱的时间延迟测量算法. 实验结果表明, 基于双谱的累积脉冲轮廓时间延迟测量可以有效抑制加性高斯白噪声, 当累积脉冲轮廓观测值存在噪声项时, 基于双谱的累积脉冲轮廓时间延迟测量精度优于 Taylor FFT 算法.

[ 1 ] Smith F G 1977 *Pulsars* ( Cambridge : Cambridge University Press )  
 [ 2 ] Ni G R , Yang T G 2001 *Acta Metr . Sin .* **22** 308 ( in Chinese ) [ 倪广仁、杨廷高 2001 计量学报 **22** 308 ]  
 [ 3 ] Taylor J H 1991 *Proc . IEEE* **79** 1054  
 [ 4 ] Lyne A 1996 *Inter . Con . Euro . Freq . Time* **10** 1  
 [ 5 ] Manchester R N 1994 *Proc . Astron . Aust .* **11** 1  
 [ 6 ] Zhong C X , Yang T G 2007 *Acta Phys . Sin .* **56** 6157 ( in Chinese ) [ 仲崇霞、杨廷高 2007 物理学报 **56** 6157 ]  
 [ 7 ] Xie Z H , Xu L P , Ni G R 2007 *J . Infrared Millim . Waves* **26** 187

( in Chinese ) [ 谢振华、许录平、倪广仁 2007 红外与毫米波学报 **26** 187 ]  
 [ 8 ] Taylor J H 1992 *Phil . Trans R . Soc . Lond . A* **341** 117  
 [ 9 ] Zhang X D 2002 *Modern Signal Processing* ( Beijing : Tsinghua University Press ) ( in Chinese ) [ 张贤达 2002 现代信号处理 ( 北京 : 清华大学出版社 ) ]  
 [ 10 ] EPN <http://www.jb.man.ac.uk/research/pulsar/resources/epn/browser.html>

# Time offset measurement algorithm based on bispectrum for pulsar integrated pulse profiles<sup>\*</sup>

Xie Zhen-Hua<sup>1)†</sup> Xu Lu-Ping<sup>1)</sup> Ni Guang-Ren<sup>2)</sup>

1) ( *School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China* )

2) ( *National Time Service Center, Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710600, China* )

( Received 5 December 2007 ; revised manuscript received 28 February 2008 )

## Abstract

In order to improve time offset measurement precision of pulsar integrated pulse profile and enhance the capability of noise suppression, a time offset measurement algorithm based on bispectrum for pulsar integrated pulse profile was proposed. Theoretically, bispectrum can completely suppress the additive Gaussian white noise, and the time offset in the third-order cumulants will result in phase rotation in the bispectrum. Time offset measurement algorithm based on bispectrum can be deduced by contrasting self-bispectrum and cross-bispectrum and solving the extremum formula. The results of experiments show that time offset measurement algorithm based on bispectrum can suppress the additive Gaussian white noise, and its precision is higher than that based on power spectrum proposed by Taylor.

**Keywords** : pulsars , time of pulse arrival , time offset of integrated pulse profile , bispectrum

**PACC** : 9760G , 9570 , 9575M

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National High Technology Research and Development Program of China ( Grant No. 2007AA12Z323 ) and the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 60472085 , 60772139 ).

<sup>†</sup> E-mail : zhxie@mail.xidian.edu.cn