第 57 卷 第 11 期 2008 年 11 月
1000-3290/2008/57(11)/6709-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57,No.11,November,2008

广义 Hamilton 系统的共形不变性与 Hojman 守恒量*

刘 畅[1)2)] 刘世兴[1)] 梅凤翔[2)] 郭永新[1)†]

1)(辽宁大学物理学院,沈阳 110036)

2)(北京理工大学理学院力学系,北京 100081)

(2007 年 12 月 23 日收到;2008 年 3 月 25 日收到修改稿)

研究了广义 Hamilton 系统在无限小变换下的共形不变性,推导出共形不变性的确定方程,找到在无限小变换下的共形不变性并且是 Lie 对称性的共形因子,最后导出广义 Hamilton 系统的运动微分方程共形不变时的 Hojman 守恒量,并给出应用算例.

关键词:广义 Hamilton 系统,共形不变性,Hojman 守恒量,确定方程

PACC:0320

1. 引 言

广义 Hamilton 力学的基本思想是构造一个 Hamilton 系统,在这个系统中,正则的共轭变量被非正则变量来替代,而这些非正则变量通常是系统的物理变量[1,2]. 20 世纪 50 年代以来,广义 Hamilton 力学取得了重要进展.利用对称性理论来研究力学系统的守恒量是数学物理科学中的一个近代发展方向[3—7],主要存在 Noether 对称性和非 Noether 对称性,对这两种对称性和守恒量的研究也取得了丰硕的理论成果[8—32].近年来文献[33]利用几何方法研究了 Hamilton 系统的共形不变性,讨论了系统共形不变性的几何结构及其与一般对称性的区别.文献[34]研究了 Birkhoff 系统的共形不变性与 Lie 对称性的关系,并导出了系统的 Noether 守恒量.本文讨论奇数维的广义 Hamilton 系统的共形不变性,找到在无限小变换下系统是共形不变的并且是 Lie 对称性的共形因子,通过特殊无限小变换得到广义 Hamilton 系统共形不变时非平凡的 Hojman 守恒量.

2. 广义 Hamilton 系统的共形不变性

广义 Hamilton 系统的微分方程为

$$\dot{x}_i = J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (i,j = 1,\cdots,m), \tag{1}$$

其中 J_{ij} 满足

$$J_{ij}(\boldsymbol{x}) = -J_{ij}(\boldsymbol{x}),$$
$$J_{ij}\frac{\partial J_{ij}}{\partial x_l} + J_{jl}\frac{\partial J_{ki}}{\partial x_l} + J_{kl}\frac{\partial J_{ij}}{\partial x_l} = 0, \tag{2}$$

$H = H(t,\boldsymbol{x})$ 为 Hamilton 函数.广义 Hamilton 系统的维数可以是奇数的,如刚体定点运动,三种群 Volterra 方程,Lorenz 方程的 Robbins 模型等,都是三维广义 Hamilton 系统[1,2].

令

$$F_i = \dot{x}_i + \Gamma_i(t,\boldsymbol{x}), \tag{3}$$

其中

$$\Gamma_i(t,\boldsymbol{x}) = -J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_l}.$$

寻求广义 Hamilton 系统的共形不变性,也就是寻求(3)式共形不变时所对应的独立或非独立变量的变换集.为讨论(3)式的共形不变性,取时间 t 和广义坐标 q_s 的无限小单参数变换群

$$t^* = t + \Delta t,\quad x_s^*(t^*) = x_s + \Delta x_s,$$

其展开式为

$$t^* = t + \varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{x}),$$
$$q_s^*(t^*) = q_s + \varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{x}). \tag{4}$$

* 国家自然科学基金(批准号:10472040,10572021,10772025)和辽宁省杰出青年培养基金(批准号:3040005)资助的课题.

† E-mail:guoyongxin@lnu.edu.cn

引入无限小生成元向量

$$X^{(0)}=\xi_s\frac{\partial}{\partial x_s}+\xi_0\frac{\partial}{\partial t},$$

其一次扩展为

$$X^{(1)}=X^{(0)}+(\dot{\xi}_s-\dot{x}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial\dot{x}_s}.$$

定义1 若对于 F_i,在无限小生成元 $\xi_0(t,\boldsymbol{x})$, $\xi_s(t,\boldsymbol{x})$的变换下,若满足

$$X^{(1)}F_i=\ell_i^kF_k, \tag{5}$$

则称一阶微分方程是共形不变的.其中 ℓ_i^k 为共形因子,(5)式为共形不变性的确定方程.

3. 共形不变性并且是 Lie 对称性的共形因子

为得到共形不变性的共形因子表达式,要求(3)式在无限小生成元向量的作用下既是共形不变的又要是 Lie 对称的.因此

需计算差值

$$X^{(1)}F_i-X^{(1)}F_i|_{F_i=0}. \tag{6}$$

当微分方程(3)是 Lie 对称的时,则

$$X^{(1)}F_i|_{F_i=0}=0\quad(i=1,\cdots,m). \tag{7}$$

无限小生成元向量 $X^{(1)}$对(3)式的作用可表示为

$$\begin{aligned}X^{(1)}F_i&=X^{(1)}(\dot{x}_i+\Gamma_i)\\&=(\dot{\xi}_i-\dot{x}_i\dot{\xi}_0)+X^{(0)}\Gamma_i\\&=\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial t}+\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}\dot{x}_j\right)-\dot{x}_i\dot{\xi}_0+X^{(0)}\Gamma_i\\&\quad(i,j=1,\cdots,m).\end{aligned} \tag{8}$$

同样利用无限小生成元向量 $X^{(1)}$对(7)式作用可得

$$X^{(1)}F_i|_{F_i=0}=\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial t}+\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}\alpha_j\right)-\alpha_i\dot{\xi}_0+X^{(0)}\Gamma_i$$
$$(i,j=1,\cdots,m), \tag{9}$$

其中 $\alpha_j=-\Gamma_j$.把(8)式和(9) 式,代入(6)式得

$$\begin{aligned}&X^{(1)}F_i-X^{(1)}F_i|_{F_i=0}\\&=\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}(\dot{x}_j-\alpha_j)-(\dot{x}_i-\alpha_i)\dot{\xi}_0.\end{aligned} \tag{10}$$

由于

$$\dot{x}_j-\alpha_j=\dot{x}_j+\Gamma_j=F_j,$$

所以(10)式可变为

$$\begin{aligned}&X^{(1)}F_i-X^{(1)}F_i|_{F_i=0}\\&=\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}F_j-F_i\dot{\xi}_0=\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}-\delta_j^i\dot{\xi}_0\right)F_j\\&\quad(i,j=1,\cdots,m).\end{aligned} \tag{11}$$

令

$$\beta_j^i=\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}-\delta_j^i\dot{\xi}_0\right),$$

则

$$X^{(1)}F_i-X^{(1)}F_i|_{F_i=0}=\beta_j^iF_j$$
$$(i,j=1,\cdots,m). \tag{12}$$

当(3)式在无限小变换(4)作用下是共形不变的,并且是 Lie 对称的,由定义 1 和(7)式可得

$$(\ell_j^i-\beta_j^i)F_j=X^{(1)}F_i|_{F_i=0},$$

所以当(3)式在无限小变换(4)作用下是共形不变的同时是 Lie 对称的,可得到共形因子

$$\ell_j^i=\beta_j^i. \tag{13}$$

因此我们有以下命题.

命题1 对于广义 Hamilton 系统在无限小单参变换数群(4)作用下,当微分方程(3)是共形不变的,同时还是 Lie 对称的充分必要条件为存在共形因子

$$\ell_j^i=\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}-\delta_j^i\dot{\xi}_0\quad(i,j=1,\cdots,m). \tag{14}$$

4. 广义 Hamilton 系统的共形不变性与 Hojman 守恒量

当无限小单参数变换群(4)退化为特殊无限小变换时,即当

$$t^*=t,\quad q_i^*(t^*)=q_i+\varepsilon\xi_i(t,\boldsymbol{x}). \tag{15}$$

如果生成元 ξ_i 满足方程

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_i=\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_j}\xi_j, \tag{16}$$

其中

$$\alpha_i=J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j},$$

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\alpha_j\frac{\partial}{\partial x_j},$$

则微分方程(1)是 Lie 对称的.

命题2 对于广义 Hamilton 系统(1)在特殊无限小变换(15)作用下是共形不变的同时还是 Lie 对称的,且存在函数 $\mu=\mu(t,\boldsymbol{x})$,满足条件

$$\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_i}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu=0, \tag{17}$$

则广义 Hamilton 系统存在如下形式的守恒量:

$$I_{\mathrm{H}}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial(\mu\xi_i)}{\partial x_i}=\mathrm{const}. \tag{18}$$

证明参考文献[2]和[32].

5. 算　　例

下面举例说明上述结论的应用. 某三维广义 Hamilton 系统的微分方程为

$$\dot{x}_1 = -g(x_2),$$
$$\dot{x}_2 = f(x_1),$$
$$\dot{x}_3 = f(x_1) + g(x_2), \tag{19}$$

其中 f, g 是可微函数.

令

$$F = \begin{pmatrix} F_1 = \dot{x}_1 + g(x_2) \\ F_2 = \dot{x}_2 - f(x_1) \\ F_3 = \dot{x}_3 - f(x_1) - g(x_2) \end{pmatrix}, \tag{20}$$

当特殊无限小变换的生成元为

$$\xi_1 = \xi_2 = 0,$$
$$\xi_3 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3)^2 \tag{21}$$

时, 则

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= (\dot{\xi}_j - \dot{x}_j\xi_0)\frac{\partial}{\partial \dot{x}_j} + \xi_j\frac{\partial}{\partial x_j} + \xi_0\frac{\partial}{\partial t} \\ &= \dot{\xi}_3\frac{\partial}{\partial \dot{x}_3} + \xi_3\frac{\partial}{\partial x_3} \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)(\dot{x}_1 - \dot{x}_2 + \dot{x}_3)\frac{\partial}{\partial \dot{x}_3} \\ &\quad + (x_1 - x_2 + x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} X^{(1)}F &= \left[(x_1 - x_2 + x_3)(\dot{x}_1 - \dot{x}_2 + \dot{x}_3)\frac{\partial}{\partial \dot{x}_3} + (x_1 - x_2 + x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}\right]\begin{pmatrix} F_1 = \dot{x}_1 + g(x_2) \\ F_2 = \dot{x}_2 - f(x_1) \\ F_3 = \dot{x}_3 - f(x_1) - g(x_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ (x_1 - x_2 + x_3) & -(x_1 - x_2 + x_3) & (x_1 - x_2 + x_3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_1 = \dot{x}_1 + g(x_2) \\ F_2 = \dot{x}_2 - f(x_1) \\ F_3 = \dot{x}_3 - f(x_1) - g(x_2) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{22}$$

所以可得共形因子

$$\ell_j^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ (x_1 - x_2 + x_3) & -(x_1 - x_2 + x_3) & (x_1 - x_2 + x_3) \end{pmatrix}. \tag{23}$$

利用命题 1 也可直接计算出共形因子

$$\ell_j^i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} - \xi_j^i\dot{\xi}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ (x_1 - x_2 + x_3) & -(x_1 - x_2 + x_3) & (x_1 - x_2 + x_3) \end{pmatrix}. \tag{24}$$

显然其结果与(23)式相同, 所以广义 Hamilton 系统(19)在特殊无限小变换下共形不变性的确定方程为

$$X^{(1)}F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ (x_1 - x_2 + x_3) & -(x_1 - x_2 + x_3) & (x_1 - x_2 + x_3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_1 = \dot{x}_1 + g(x_2) \\ F_2 = \dot{x}_2 - f(x_1) \\ F_3 = \dot{x}_3 - f(x_1) - g(x_2) \end{pmatrix}, \tag{25}$$

此时微分方程(19)在特殊无限小变换(21)变换下是共形不变的同时还是 Lie 对称的. 利用命题 2, 当

$$\mu = 1$$

时, 由(18)式, 可得 Hojman 守恒量

$$I_H = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3}$$

$$= x_1 - x_2 + x_3 = \text{const}. \tag{26}$$

6. 结　　论

本文研究了广义 Hamilton 系统在无限小单参数群变换下的共形不变性, 给出了这类力学系统的共形

不变性的定义和确定方程，最后得到了在特殊无限小变换下系统的 Hojman 守恒量，并给出应用算例.

---

[1] Li J B, Zhao X H, Liu Z R 1994 *Theory and Application of Generalized Hamiltonian Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [李继彬、赵晓华、刘正荣 1994 广义哈密顿系统理论及其应用(北京 科学出版社)]
[2] Mei F X 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1048 (in Chinese) [梅凤翔 2003 物理学报 **52** 1048]
[3] Olver P J 1986 *Applications of Lie Groups to Differential Equations* (New York: Springer 2 Verlag)
[4] Marsden J E, Ratiu T S 1994 *Introduction to Mechanics and Symmetry* (New York: Springer 2 Verlag)
[5] Li Z P 1993 *Classical and Quantal Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetrical Properties* (Beijing: Beijing Polytechnic Univ. Press) (in Chinese) [李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质(北京 北京工业大学出版社)]
[6] Krupkova O 1997 *J*. *Math*. *Phys*. **38** 5098
[7] Jalnapurkar S M, Leok M, Marsden J E, West M 2006 *J*. *Phys*. A: *Math*. *Gen*. **39** 5521
[8] Zhang R C, Chen X W, Mei F X 2000 *Chin*. *Phys*. **9** 801
[9] Qiao Y F, Zhao S H 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 1 (in Chinese) [乔永芬、赵淑红 2001 物理学报 **50** 1]
[10] Zhang H B 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 1837 (in Chinese) [张宏彬 2001 物理学报 **50** 1837]
[11] Djukié D D, Vujanovié B 1975 *Acta Mechanica* **23** 17
[12] Hojman S A 1992 *J*. *Phys*. A: *Math*. *Gen*. **25** 1291
[13] Guo Y X, Jiang L Y, Yu Y 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 181
[14] Guo Y X, Yu Y, Huang H J 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 1
[15] Mei F X 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 177
[16] Chen X W, Wang X M, Wang M Q 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 2003
[17] Fu J L, Chen L Q, B J H 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 6
[18] Liu R W, Zhang H B, Chen L Q 2006 *Chin*. *Phys*. **15** 249
[19] Xu X J, Mei F X, Zhang Y F 2006 *Chin*. *Phys*. **15** 19
[20] Zhang Y 2006 *Chin*. *Phys*. **15** 1935
[22] Jia L Q, Zheng S W 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 3829 (in Chinese) [贾利群、郑世旺 2006 物理学报 **55** 3829]
[23] Mei F X, Wu H B, Zhang Y F 2006 *Chin*. *Phys*. **15** 1932
[24] Shang M, Chen X W 2006 *Chin*. *Phys*. **15** 2788
[25] Shang M, Guo Y X, Mei F X 2007 *Chin*. *Phys*. **16** 292
[26] Liu H J, Fu J L, Tang Y F 2007 *Chin*. *Phys*. **16** 599
[27] Luo S K, Chen X W, Guo Y X 2007 *Chin*. *Phys*. **16** 3176
[28] Luo S K 2007 *Chin*. *Phys*. **16** 3182
[29] Jia L Q, Zhang Y Y, Zheng S W 2007 *Acta Phys*. *Sin*. **56** 649 (in Chinese) [贾利群、张耀宇、郑世旺 2007 物理学报 **56** 649]
[30] Chen X W, Li Y M 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 936
[31] Chen X W, Li Y M 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 663
[32] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) p168—197 (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量(北京 北京理工大学出版社)第 168—197 页]
[33] McLachlan R, Perlmutter M 2001 *J*. *Geom*. *Phys*. **39** 276
[34] Galiullin A S, Gafarov G G, Malaishka R P *et al* 1997 *Analytical Dynamics of Helmholtz Birkhoff and Nambu Systems* (Moscow: UFN) p183 (in Russian)

Conformal invariance and Hojman conserved quantities of generalized Hamilton systems *

Liu Chang[1)2)]　Liu Shi-Xing[1)]　Mei Feng-Xiang[2)]　Guo Yong-Xin[1)†]

1)(*College of Physics, Liaoning University, Shenyang* 110036, *China*)

2)(*Department of Applied Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081, *China*)

(Received 23 December 2007; revised manuscript received 25 March 2008)

Abstract

In this paper the conformal invariance under infinitesimal transformations of generalized Hamilton systems is studied. The necessary and sufficient conditions for the conformal invariance under infinitesimal transformations which has Lie symmetry are given. Then we get the Hojman conserved quantities from conformal invariance of generalized Hamilton systems. Finally, an illustrative example is given to verify the result.

Keywords: generalized Hamilton systems, conformal invariance, Hojman conserved quantities, determining equation

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10472040, 10572021, 10772025) and the Outstanding Young Talents Training Found of Liaoning Province of China (Grant No. 3040005).

† E-mail: guoyongxin@lnu.edu.cn