第 57 卷 第 11 期 2008 年 11 月
1000-3290/2008/57(11)/6718-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.57, No.11, November, 2008

Nambu 力学系统的 Lie 对称性及其守恒量

张 凯[1)2)†] 王 策[3)] 周利斌[3)]
1)(西安工业大学数理系,西安 710032)
2)(西北大学现代物理研究所,西安 710069)
3)(西北大学物理系,西安 710069)
(2007 年 9 月 24 日收到;2008 年 3 月 10 日收到修改稿)

讨论了 Nambu 力学系统的 Lie 对称性,建立了系统 Lie 对称性的确定方程,得到了该对称性引起的守恒量,研究了 Lie 对称性逆问题. 并以 Euler 方程为例说明了本文的主要结果.

关键词:Nambu 力学系统, Lie 对称性, 守恒量
PACC:0320, 0420M

1. 引 言

1973 年,Nambu 以 Liouville 定理为基础,提出了后来被称为 Nambu 力学的经典 Hamilton 力学对 3 维相空间的一种可能推广[1],用 3 元线性全反对称的 Nambu 括号代替 Hamilton 力学中的 Poisson 括号,来表征力学量的时间演化,并给出了其第一个应用——Euler 方程.

Nambu 力学与 Hamilton 力学之间有着密切的联系[2—4],能够推广到任意维相空间. 可以像 Hamilton 系统[5]一样,构造了其基于不变几何形式的基本原理[6,7]. 它在理论上可以描述 Dirac 力学不能描述的物理[8]. 由于 Nambu 力学在保有了 Hamilton 力学优点的基础上,又具备了一些良好的性质,所以在可积系统[9—11],粒子物理[11,12],宇宙学[13],弦论[14—16],流体力学[17],数学物理[18,19],计算数学[20]等方面有着广泛的应用. 但是,其彻底量子化存在多方面的困难[7,19,21—24],还需要进行深入地研究.

本文首先简介了 Nambu 系统,接下来在 3,4,5 节分别讨论了系统的 Lie 对称性,守恒量及其逆问题,最后以 Euler 方程为例,给出了其与 Lie 对称性相关的结果.

2. Nambu 力学系统

定义 Nambu 括号[7]为

$$
\{A_1(q), A_2(q), \cdots, A_n(q)\} \equiv \det\begin{pmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial q_1} & \frac{\partial A_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial A_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial A_2}{\partial q_1} & \frac{\partial A_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial A_2}{\partial q_n} \\ & & \ddots & \\ \frac{\partial A_n}{\partial q_1} & \frac{\partial A_n}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial A_n}{\partial q_n} \end{pmatrix}. \tag{1}
$$

Nambu 力学系统的运动方程[7]可以表示为

$$
\dot{q}_i = \{q_i, H_1(q), \cdots, H_{n-1}(q)\}, \tag{2}
$$

其中 $H_1, H_2, \cdots, H_{n-1}$ 称为系统的 Nambu-Hamilton 量,q_i 是系统的广义坐标. 它的拉氏量[6,7]为

$$
A(C_{n-1}) = \int_{C_{n-1}} \omega^{(n-1)}, \tag{3}
$$

其中

$$
\omega^{(n-1)} = q_1 \mathrm{d}q_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q_n - H_1 \mathrm{d}H_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}H_{n-1} \wedge \mathrm{d}t. \tag{4}
$$

3. Nambu 力学系统的 Lie 对称性

取时间 t 和广义坐标 q_i 的无穷小单参数变换

$$
t^* = t + \Delta t, \quad q_i^*(t^*) = q_i(t) + \Delta q_i, \tag{5}
$$

或其展开式

$$
t^* = t + \varepsilon\xi_0(t, q), \quad q_i^*(t^*) = q_i(t) + \varepsilon\xi_i(t, q), \tag{6}
$$

其中 ε 为无穷小参数,ξ_0,ξ_i 称为无穷小变换的生

† E-mail: kzhang@xatu.edu.cn

成元，或生成函数.引入无穷小生成元向量

$$X^{(0)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \sum_i \xi_i \frac{\partial}{\partial q_i}. \tag{7}$$

由微分方程的不变性理论知，方程(2)不变的条件为

$$\begin{aligned}&\dot{\xi}_i - \dot{q}_i \dot{\xi}_0 \\ &= X^{(0)}(\{q_i, H_1(q), \cdots, H_{n-1}(q)\}),\end{aligned} \tag{8}$$

方程(8)称为 Lie 对称性的确定方程.如果无穷小变换的生成元 ξ_0, ξ_i 满足确定方程(8)，则称相应的变换是 Nambu 力学系统的 Lie 对称变换.显然，当 $n = 2$ 时，上述方程退化到 Hamilton 系统 Lie 对称性的确定方程[25—27].

4. Nambu 力学系统的守恒量

定理 1　对于满足确定方程(8)的无穷小变换的生成元 ξ_0, ξ_i，如果存在规范函数 $G(t, q)$ 满足如下结构方程：

$$\begin{aligned}&H_{i-1}\dot{\xi}_0 + \xi_0 \frac{\partial H_{i-1}}{\partial t} \\ &+ \xi_i \{q_i, H_1(q), H_2(q), \cdots, H_{n-1}(q)\} + \dot{\xi}_i q_i \\ &+ \sum_j (\xi_j - \xi_0 \dot{q}_j) \frac{\partial}{\partial q_j} \\ &\times \{q_i, H_1(q), H_2(q), \cdots, H_{n-1}(q)\} \dot{G}_i = 0,\end{aligned} \tag{9}$$

则 Nambu 系统存在如下形式的守恒量：

$$\begin{aligned}I_i &= H_{i-1}\xi_0 + \xi_i q_i + \xi_i \\ &\quad - \xi_0 \{q_i, H_1(q), H_2(q), \cdots, H_{n-1}(q)\} \\ &\quad + G_i,\end{aligned} \tag{10}$$

其中可以取 $H_0 = 1$.

证明

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_i &= \dot{H}_{i-1}\xi_0 + H_{i-1}\dot{\xi}_0 + \dot{\xi}_i q_i + \xi_i \dot{q}_i + \dot{\xi}_i \\ &\quad - \dot{\xi}_0 \{q_i, H_1(q), H_2(q), \cdots, H_{n-1}(q)\} \\ &\quad - \xi_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \{q_i, H_1(q), H_2(q), \cdots, H_{n-1}(q)\} + \dot{G}_i \\ &= \left(\dot{H}_{i-1}\xi_0 - \xi_0 \frac{\partial H_{i-1}}{\partial t}\right) \\ &\quad + \xi_i (\dot{q}_i - \{q_i, H_1(q), H_2(q), \cdots, H_{n-1}(q)\}) \\ &\quad + (\dot{\xi}_i - \dot{\xi}_0 \dot{q}_i - X^{(0)} \\ &\quad \times (\{q_i, H_1(q), H_2(q), \cdots, H_{n-1}(q)\})) \\ &= 0,\end{aligned}$$

式中第二个等号结构方程(9)式，最后一个等号用到了运动方程(2)式以及 Lie 对称性的确定方程(8)式.

显然，我们构造的守恒量与 Hamilton 系统 Lie 对称性守恒量[25—27]是有所区别的，这种区别的产生是由于对 Nambu 系统，我们不能像 Hamilton 系统那样区分广义坐标和其共轭动量.

将(9)式展开，分解为含 $\dot{q}_i$ 的项和不含 $\dot{q}_i$ 的项，并令其分别为零，结构方程(9)归结为如下广义 Killing 方程：

$$\begin{aligned}&H_{i-1}\frac{\partial \xi_0}{\partial q_j} + q_i \frac{\partial \xi_i}{\partial q_j} - \xi_0 \frac{\partial}{\partial q_j} \\ &\times \{q_i, H_1(q), H_2(q), \cdots, H_{n-1}(q)\} + \frac{\partial G_i}{\partial q_j} = 0, \\ &H_{i-1}\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \xi_0 \frac{\partial H_{i-1}}{\partial t} + \xi_i \\ &\times \{q_i, H_1(q), H_2(q), \cdots, H_{n-1}(q)\} + q_i \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \\ &+ \sum_j \xi_j \frac{\partial}{\partial q_j} \{q_i, H_1(q), H_2(q), \cdots, H_{n-1}(q)\} \\ &+ \frac{\partial G_i}{\partial t} = 0.\end{aligned} \tag{11}$$

5. Lie 对称性逆问题

假设 Nambu 系统有第一积分

$$I_i = I_i(t, q) = \text{const}, \tag{12}$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}I_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial I_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial I_i}{\partial q_j}\dot{q}_j = 0. \tag{13}$$

将 Nambu 方程乘以 $\xi_i - \dot{q}_i \xi_0$，有

$$\begin{aligned}0 &= (\xi_i - \{q_i, H_1(q), H_2(q), \cdots, H_{n-1}(q)\}\xi_0) \\ &\quad \times (\dot{q}_i - \{q_i, H_1(q), H_2(q), \cdots, H_{n-1}(q)\}).\end{aligned} \tag{14}$$

比较(13)和(14)式中含 $\dot{q}_i$ 的项，得到

$$\begin{aligned}\xi_i &= \{q_i, H_1(q), H_2(q), \cdots, H_{n-1}(q)\}\xi_0 \\ &\quad + \frac{\partial I_i}{\partial q_i}.\end{aligned} \tag{15}$$

令(12)式为 Lie 对称性的守恒量(10)，这样由方程(10)和(15)就可以求得无限小生成元 ξ_0, ξ_i，所以有

定理 2　如果由方程(15)确定的生成元满足方程(8)，则无限小变换(6)是 Lie 对称变换.

6. 算　　例

为了能说明文中结果而又不陷入复杂的计算，

我们考虑 $I_2 = I_3$ 的 Euler 方程,并在计算过程中选取能够使计算简化的积分常数,它是 $n = 3$ 的 Nambu 力学系统,具有 Nambu-Hamilton 量

$$
\begin{aligned}
H_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{J_1^2}{I_1} + \frac{J_2^2}{I_2} + \frac{J_3^2}{I_3}\right),\\
H_2 &= -\frac{1}{2}\left(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2\right).
\end{aligned} \tag{16}
$$

运动方程为

$$
\begin{aligned}
\dot{J}_1 &= 0,\\
\dot{J}_2 &= \kappa J_3 J_1,\\
\dot{J}_3 &= -\kappa J_1 J_2,
\end{aligned} \tag{17}
$$

其中

$$
\kappa = \frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1} = -\frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2},
$$

考虑无穷小变换(6),带入 Lie 对称性的确定方程(8)得

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= 0,\\
\dot{\xi}_2 - \dot{J}_2 \dot{\xi}_0 &= \kappa \xi_3 J_1 + \kappa \xi_1 J_3,\\
\dot{\xi}_3 - \dot{J}_3 \dot{\xi}_0 &= -\kappa \xi_1 J_2 - \kappa \xi_2 J_1.
\end{aligned} \tag{18}
$$

令 $\xi_0 = 1$,取 $\xi_1 = J_1$,方程(18)的一个解为

$$
\begin{aligned}
\xi_2 &= \kappa J_1 J_3 t,\\
\xi_3 &= -\kappa J_1 J_2 t,
\end{aligned} \tag{19}
$$

代入方程(9),有

$$
\begin{aligned}
G_1 &= 0,\\
G_2 &= -\xi_2 J_2 - \kappa J_1 J_3 t + \dot{J}_2,\\
G_3 &= -\xi_3 J_3 + \kappa J_1 J_2 t + \dot{J}_3.
\end{aligned} \tag{20}
$$

代入方程(10)得

$$
\begin{aligned}
I_1 &= 1 + J_1 + J_1^2,\\
I_2 &= H_1,\\
I_3 &= H_2.
\end{aligned} \tag{21}
$$

下面我们研究守恒量

$$
H_1' = \frac{1}{2}\left(\frac{J_2^2}{I_2} + \frac{J_3^2}{I_3}\right)
$$

是否可以由 Lie 对称性生成.将 H_1' 代入(15)式有

$$
\begin{aligned}
\xi_1 &= 0,\\
\xi_2 &= \kappa J_1 J_3 \xi_0 + \frac{J_2}{I_2},\\
\xi_3 &= -\kappa J_1 J_2 \xi_0 + \frac{J_3}{I_3}.
\end{aligned} \tag{22}
$$

生成元(22)满足方程(18),H_1' 是由 Lie 对称性生成的守恒量.

7. 结 论

本文讨论了 Nambu 力学的 Lie 对称性,发现 Nambu 力学与 Hamilton 系统有许多相似之处,但是由于不能像 Hamilton 系统区别广义坐标及其共轭动量,所以它们之间也存在许多区别,所以 $2n$ 维相空间的 Nambu 力学可能与 Hamilton 系统具有更多的共通点.

另外,如何寻找 Nambu-Hamilton 系统的作用量一直是一个很困难的问题,但是通过算例,我们发现 Nambu-Hamilton 量与 Nambu 系统的对称性存在一定的联系.

[1] Nambu Y 1973 *Phys. Rev.* D **7** 2405

[2] Mukunda N, Sudarshan E C G 1976 *Phys. Rev.* D **13** 2846

[3] Bayen F, Flato M 1975 *Phys. Rev.* D **11** 3049

[4] Cohen I 1975 *Int. J. Theor. Phys.* **12** 69

[5] Arnol'd V 1978 *Mathematical methods of classical mechanics* (New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag)

[6] Ogawa T, Sagae T 2000 *Int. J. Theor. Phys.* **39** 2875

[7] Takhtajan L 1994 *Commun. Math. Phys.* **160** 295

[8] Cohen I 1975 *Int. J. Theor. Phys.* **12** 61

[9] Tempesta P, Turbiner A V, Winternitz P 2001 *J. Math. Phys.* **42** 4248

[10] Curtright T L, Zachos C K 2002 *N. J. Phys.* **4** 83 arXiv: math-ph/0211021

[11] Makhaldiani N 2007 *Physics of Atomic Nuclei* **70** 567

[12] Hirayama M 1977 *Phys. Rev.* D **16** 530

[13] Sheikh-Jabbari M M 2006 *Phys. Lett.* B **642** 119

[14] Curtright T L, Zachos C K arXiv: hep-th/0312048

[15] Cederwall M arXiv: hep-th/0410110

[16] Zachos C, Curtright T 2004 *Czech. J. Phys.* **54** 1393

[17] Guha P 2002 *J. Math. Phys.* **43** 4035

[18] Czachor M 1999 *Int. J. Theor. Phys.* **38** 475

[19] Dito G, Flato M 1997 *Lett. Math. Phys.* **39** 107

[20] Wang S H 2006 *J. Comput. Math.* **24** 444

[21] Curtright T, Zachos C 2003 *Phys. Rev.* D **68** 085001

[22] Dito G, Flato M, Sternheimer D, Takhtajan L 1997 *Commun. Math. Phys.* **183** 1

[23] Estabrook F B 1973 *Phys*. *Rev*. D **8** 2740

[24] Sahoo D，Valsakumar M C 1992 *Phys*. *Rev*. A **4** 4410
Sahoo D，Valsakumar M C 1994 *Mod*. *Phys*. *Lett*. A **9** 2727

[25] Mei F X 1999 *Applications of Lie groups and Lie algebras to constrained mechanical systems* （Beijing：Science press）（in Chinese）p319 ［梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用（北京 科学出版社）第 319 页］

[26] Mei F X 2003 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **52** 1048（in Chinese）［梅凤翔 2003 物理学报 **52** 1048］

[27] Luo S K 2003 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **52** 2941（in Chinese）［罗绍凯 2003 物理学报 **52** 2941］

Lie symmetry and conserved quantities of Nambu mechanical systems

Zhang Kai[1)2)†] Wang Ce[3)] Zhou Li-Bin[3)]

1)（*Xi'an Technological University*，*Department of Mathematics and Physics*，*Xi'an* 710032，*China*）

2)（*Northwest University*，*Institute of Modern Physics*，*Xi'an* 710069，*China*）

3)（*Northwest University*，*Department of Physics*，*Xi'an* 710069，*China*）

（Received 24 September 2007；revised manuscript received 10 March 2008）

Abstract

In this article，Lie symmetry of Nambu mechanical systems is discussed and its determining equations are established. Consequently，the structure equation and the associated conserved quantities are obtained. The inverse problem of Lie symmetries of the systems is also studied. As an example，Euler equations are used to illustrate the application of the main results.

Keywords：Nambu mechanical systems，Lie symmetry，conserved quantities

PACC：0320，0420M

† E-mail：kzhang@xatu.edu.cn