

水珠滴落的最小二乘粒子有限元方法模拟^{*}

汤 波 李俊峰 王天舒[†]

(清华大学航天航空学院, 北京 100084)

(2007 年 12 月 17 日收到, 2008 年 4 月 10 日收到修改稿)

提出了一种最小二乘粒子有限元方法, 用其模拟了二维水珠滴落水面并飞溅散开的过程. 该法基于拉格朗日描述, 在每个时间步上使用扩展的 Delaunay 划分更新计算网格, 并应用 α 形方法识别自由面形状; 用最小二乘有限元方法离散流体运动的 Navier-Stokes 方程, 并推导了一种自适应时间步长方案以提高计算效率和鲁棒性; 引入网格拉伸技术修正减小流体质量误差. 对水滴飞溅进行仿真, 得到了与商用软件 Flow-3d 比较符合的结果, 且具有更清晰锐利的自由面.

关键词: 滴落, 网格划分, α 形, 最小二乘有限元

PACC: 0340G, 4710, 4755K, 9530L

1. 引 言

液珠撞击水面, 反弹并散开, 溅起漂亮水花, 这种复杂而美丽的图景是自然界以及工业进程中的一种基本现象^[1], 譬如雨滴滴落到池塘里, 空气中的水滴溅落在结冰的机翼上. 此问题可以归结为带自由面的不可压缩流体运动问题, 它在计算上存在如下两个困难.

困难之一是不可压缩 Navier-Stokes 方程的求解. 方程中出现的强非线性的对流项, 和作为拉格朗日乘子引入的压力项, 都给计算带来很大的挑战^[2]. 第二个困难是自由面的跟踪或捕捉^[3]. 界面捕捉在欧拉描述下的固定网格内, 通过 VOF 或者 Level Set 等方法的辅助辨识出界面位置^[4], 这是当前最流行的自由面求解方案. 但辅助方程的精确求解是困难所在, 需要额外的处理和反复初始化^[5]. 界面跟踪针对拉格朗日描述下的移动网格, 自由面与计算网格边界重合, 在初始时刻指定并在计算过程中保持不变, 用它可以得到精确的界面位置. 近些年来, 跟踪方法重新引起人们的重视, 工作集中在引入特殊处理来避免网格的畸变和自由面的拓扑变化, 譬如 ALE、无网格方法、粒子有限元方法等. ALE^[6]方法和 Perot 等^[7]提出的网格翻转算法能避免网格的畸变,

但都不能用来处理自由面的拓扑变化. 无网格方法^[8]由数据点直接计算插值函数, 通过配点法^[9]或背景网格积分来离散方程得到数据结点的速度, 通过拉格朗日描述直接进行结点更新. 由于它没有网格也就不存在网格的畸变, 它的难点是如何施加强制边界条件以及进行精确积分^[10]. Gonzalez 等^[11]使用无网格自然元方法, 通过 α 形算法识别边界来引入强制边界条件, 成功计算了坝溃等自由面问题, 它解决了边界条件的问题, 但仍不能精确积分. Idelsohn 和 Onate 提出的粒子有限元方法 (PFEM)^[12-14]在使用 α 形算法识别边界的基础上, 引入了网格重新划分技术得到计算网格, 以克服精确数值积分的困难. 由于方法较新, 现阶段对 PFEM 的研究以 Idelsohn 和 Onate 的小组为主, 他们用其计算了坝溃、晃动等一大类自由面问题. 但 PFEM 文献中, 时间步长的选取比较简单, 可能造成流体穿透固壁, 所以作者在固壁外定义了一层额外的网格来阻止液体的穿透^[12]. 本文推导了一种自适应时间步长格式, 不再需要这层额外的网格, 同时也提高了计算的效率和鲁棒性; 针对现有 PFEM 文献中没有关于流体质量误差的说明, 本文应用一种网格拉伸^[15]技术减小了系统质量的误差; 另外, 引入最小二乘有限元 (LSFEM)^[16]提高流体计算的稳定性. 综合以上数值方案提出的最小二乘粒子有限元方法 (LSPFEM),

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10302013, 10572022)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: tswang@tsinghua.edu.cn

通过用于求解水珠滴落飞溅问题,并和商用软件 Flow-3d 的结果进行比较和分析,验证了它在模拟自由面流动问题中的有效性.

2. 控制方程

Navier-Stokes 方程在拉格朗日描述下为

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (1)$$

连续方程,即不可压限制条件为

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

上述方程中, \mathbf{u} 是速度场, p 为压力, ρ 是流体密度, \mathbf{f} 表示体力, ν 是流体运动黏性系数, t 为时间. 方程的初始条件为初始速度场 \mathbf{u}_0 . 边界条件有

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= 0 \quad \text{在 } \Gamma_u, \\ p &= 0 \quad \text{在 } \Gamma_p. \end{aligned} \quad (3)$$

3. 数值求解方案

3.1. 有限元离散

不可压缩流体方程中,压力项事实上是作为拉

格朗日乘子引入的. 采用伽辽金有限元方法,会对插值函数的选取提出一定的要求,即必须满足 LBB 相容性条件. 本文采用 LSFEM^[16]避免了此相容性条件. 引入辅助变量旋度 $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$, 将方程(1)转化为一阶格式使得插值函数为 C_0 型, 方程(1)(2)转化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla \times \omega &= \mathbf{f}, \\ \omega - \nabla \times \mathbf{u} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

利用有限差分法进行时间离散得到

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \theta \left(\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} + \nu \nabla \times \omega^{n+1} \right) \\ + (1 - \theta) \left(\frac{1}{\rho} \nabla p^n + \nu \nabla \times \omega^n \right) &= \mathbf{f}^{n+1}, \\ \omega^{n+1} - \nabla \times \mathbf{u}^{n+1} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} &= 0. \end{aligned}$$

$\theta = 1/2$ 为 Crank-Nicolson 格式,为二阶时间精度,常用于瞬变问题. 二维情况下写成矩阵的形式,为

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{A}_2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}, \\ \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} u \\ \nu \\ p \\ \omega \end{pmatrix}^{n+1}, \quad \mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\theta}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nu\theta \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \nu\theta \\ 0 & 0 & \frac{\theta}{\rho} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_x^{n+1} + \frac{u^n}{\Delta t} - (1 - \theta) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x} + \nu \frac{\partial \omega^n}{\partial y} \right) \\ f_y^{n+1} + \frac{\nu^n}{\Delta t} - (1 - \theta) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial y} - \nu \frac{\partial \omega^n}{\partial x} \right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

数值求解中,通常 \mathbf{u} 的选取并不能使方程(5)得到精确满足,而是有一个余量

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{f}. \quad (6)$$

LSFEM 即使余量(6)在最小二乘意义上达到最小值,即使泛函

$$\mathcal{K}(\mathbf{u}) = \|\mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{f}\|_0^2 = (\mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{f}, \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{f}) \quad (7)$$

取最小值,其必要条件为对于任意的 \mathbf{v}

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \mathcal{K}(\mathbf{u} + t\mathbf{v}) &= 2(\mathbf{A} \mathbf{v}, \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{f}) \\ &= 0 \Rightarrow (\mathbf{A} \mathbf{u}, \mathbf{A} \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{A} \mathbf{v}) \quad (8) \end{aligned}$$

给定单元插值函数 φ_i , 则近似函数可以表示为

$$u_h^e(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_n} \varphi_j(\mathbf{x}) (u \quad v \quad p \quad \omega)_j^e, \quad (9)$$

其中 N_n 为单元结点数. 于是方程 (8) 的离散形式为

$$KU = F. \quad (10)$$

对应的单元刚度矩阵和载荷矩阵分别为

$$K_e = \int_{\Omega_e} (A\varphi_1 \quad A\varphi_2 \quad \dots \quad A\varphi_{N_n})^T \times (A\varphi_1 \quad A\varphi_2 \quad \dots \quad A\varphi_{N_n}) d\Omega, \quad (11)$$

$$F_e = \int_{\Omega_e} (A\varphi_1 \quad A\varphi_2 \quad \dots \quad A\varphi_{N_n})^T f d\Omega, \quad (12)$$

其中

$$A\varphi_i = A_0\varphi_i + A_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}.$$

容易证明, 刚度矩阵 K 对称正定^[16], 可以使用预处理共轭梯度法或 Cholesky 分解高效求解.

3.2. 网格生成

水珠撞击水面飞溅, 网格会产生很大的变形. 在拉格朗日描述下, 需要保证整个计算过程中网格没有扭曲. 此处采用一种网格重新划分算法. Bowyer^[17] 使用了 $n \lg n$ 时间复杂度的算法进行了网格的重新划分. 为了避免网格的蜕化, Calvo^[18] 将 Bowyer 的方法进行了扩展, 主要思想是把邻接的三角形单元合并成一个多边形单元. Calvo 验证了其在大规模数据点云生成网格的有效性.

因为扩展划分可能生成多边形网格, 常用的面积插值方法不再适用. 本文采用 Non-Sibson 插值方案计算插值函数^[19]. 值得注意的是, 此插值方案中插值的过程和自然元方法中使用的过程类似, 但有着本质的不同. 无网格中, 变量在有重合的离散域上插值, 所以难以找到精确的积分方案. 而本文的插值是在划分后的单元上进行的, 因此可以使用精确的积分方案. 多边形上的积分通过在其子三角形上进行高斯积分然后求和得到^[20].

3.3. 边界识别

水珠滴落后自由面会发生拓扑变化, 如液面的破碎和撞击. 此时需要识别出新的边界. 本文采用一种 α 形算法^[21], 它可在第 4 节描述的网格划分算法上进行构造:

对于生成的网格单元的外接圆, 如果其半径大于 αh 此单元为失效单元, 单元上所有结点是边界点.

这里 h 为单元的特征尺度, α 是一个调节参

数. 通常取 $\alpha = 1.2$.

通过扫描失效单元, 不仅可以识别出边界, 还能识别出飞出流体区域的独立的点. 推导表明这些点的 LSFEM 离散方程直接退化为牛顿第二定律方程, 因此对于这些独立点不需要特别处理. 这也是 LSFEM 和 PFEM 结合的优点.

图 1 显示了给定点集的网格划分和边界识别后的结果. 其中所有线段(实线和虚线)表示三角划分生成的网格, 虚线表示失效的单元, 实线为有效单元. 粗实线组成了边界识别后的网格形状. 可以看出, 三角划分只能给出所有点的凸包, 但是结合 α 形算法后, 不仅识别出了外部边界和内部边界, 甚至能捕捉到飞溅出来的流体.

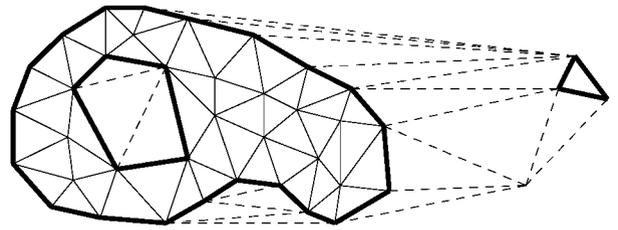


图 1 网格划分以及边界识别

边界识别出来后, 可以在 LSFEM 的离散方程上直接施加本质边界条件.

3.4. 自适应时间步长

为了得到合适的时间步长, 本文考虑了三种自适应时间步长算法:

1) 假设结点 j 速度为 u_j , 距其最近的结点与其距离为 h_j . 取

$$\Delta t < \min_j (|u_j|/h_j),$$

如

$$\Delta t = 1/5 \min_j (|u_j|/h_j).$$

这种方法很容易实现, 也是 PFEM^[12-14] 使用的方法. 但在某些情况, 如存在刚体运动时会造成 Δt 过小; 流体有可能会越过固壁边界, 如图 2(b) 所示, 其中 x_1 和 x_2 表示固壁边界, 流体质点 x 将越过固壁边界到新的位置 x' . 所以 PFEM 文献中在固壁外定义了一层额外的网格来阻止液体的穿透, 事实上这层网格是没有必要的.

2) 如图 2(a) 所示, 位置 x 的流体质点在 Δt 时间后运动到新的位置 $x' = x + \Delta t u$. 选择的时间步长的临界值使得单元面积为 0,

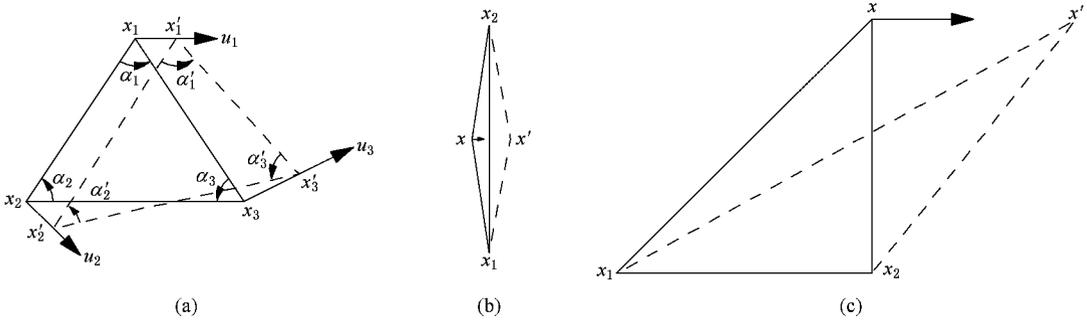


图 2 自适应时间步长示意图

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 + u_1 \Delta t & y_1 + \nu_1 \Delta t \\ 1 & x_2 + u_2 \Delta t & y_2 + \nu_2 \Delta t \\ 1 & x_3 + u_3 \Delta t & y_3 + \nu_3 \Delta t \end{pmatrix} = a \Delta t^2 + b \Delta t + c = 0, \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} a &= u_2 \nu_3 - u_2 u_3 - u_1 \nu_3 \\ &\quad u_1 u_3 + u_1 \nu_2 - \nu_1 u_2, \\ b &= x_2 \nu_3 + u_2 y_3 - y_2 u_3 - \nu_2 x_3 - x_1 \nu_3 - u_1 y_3 \\ &\quad + y_1 u_3 + \nu_1 x_3 + x_1 \nu_2 + u_1 y_2 - y_1 u_2 - \nu_1 x_2, \\ c &= x_2 y_3 - y_2 x_3 - x_1 y_3 + y_1 x_3 + x_1 y_2 - y_1 x_2. \end{aligned}$$

可从上述二次方程解出 t . 如果解为负值, 则对时间步长无限制, 如果为正, 则取此值的 $1/2$ 为时间步长. 这种方法能有效地防止流体穿过固壁, 但在图 2(c) 所示的情况下, 可能会得到较大的不合适的时间步长.

3) 如图 2(a) 所示, 变形后所有角度大于原角度的 $1/2$. 以 α_1 为例, 初始的角度

$$\alpha_1 = \arctan\left(\frac{|\mathbf{r}_{21} \times \mathbf{r}_{31}|}{\mathbf{r}_{21} \cdot \mathbf{r}_{31}}\right),$$

变形后 $\alpha'_1 = 1/2\alpha$. 得到和 (13) 式类似的二次方程, 求解便可得到时间步长.

本文联合使用了 2) 和 3) 2) 用在失效单元内来阻止流体穿透固壁, 3) 用在有效单元内来得到合适的时间步长.

3.5. 质量修正

在拉格朗日描述下更新网格结点位置会给流体的总体积带来很小的误差. 这个误差在每个时间步很小, 但会在整个计算过程中累积, 最终影响流体总质量的守恒性. 粒子有限元文献中对质量误差没有进行说明. 本文使用 Yamamoto^[15] 提出的一种网格拉伸修正方案. 自由面结点位置由如下公式修正:

$$x_k = \mathbf{x} + 10^{-6} kh n_x \quad \text{on } \Gamma_p, \quad (14)$$

其中 n_x 是界面的法向, h 是结点的特征尺度, $k \in [-100, 100]$ 为调节参数. 因为只有一个参数, 可以通过扫描 -100 到 100 之间的所有值得到. 最后扫描得到的 k 使得 $|m_k - m_{\text{origin}}|$ 达到最小. 其中 m_k 是修正后质量, m_{origin} 为最初的质量.

这个修正非物理的, 但在数值上完全可以接受, 因为每一步的最大误差仅为 10^{-4} . 但修正后, 在整个计算过程中, 流体的质量误差都在 10^{-6} 之内.

3.6. LSPFEM 求解步骤

综上所述可以得到 LSPFEM 的整个求解步骤. 由于采用了拉格朗日描述, 流体方程中没有了非线性的对流项. 但问题的非线性没有消失, 它体现在网格移动造成的插值函数的变化. 所以在每个时间步需要采用如下的迭代步骤:

$$1) \text{ 从 (10) 式计算得到 } (\mathbf{u}, p, \omega)^{n+1},$$

$$B_{\alpha\beta}^{n+1,j} B_{\beta\gamma}^{n+1,j} U_{\gamma i}^{n+1,j+1} = B_{\alpha\beta}^n A_{1\beta} + B_{\alpha\beta}^{n+1,j} A_{2\beta}^{n+1,j}, \quad (15)$$

其中

$$B_j = \int_V \phi_j A_0 + \frac{\partial \phi_j}{\partial x} A_1 + \frac{\partial \phi_j}{\partial y} A_2 dV,$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{N_n}),$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{u}{\Delta t} - (1 - \theta) \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \\ \frac{\nu}{\Delta t} - (1 - \theta) \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \nu \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ f_x \\ f_y \\ 0 \end{pmatrix},$$

($n+1, j$) 是指第 $n+1$ 时间步的第 j 次迭代 ($n+1, 0$) 即第 n 时间步的结果. 值得注意的是 (15) 式中 $n+1$ 和 n 步所用的插值函数分别基于新网格和旧

网格 因此是不同的,不同迭代步 j 的插值函数也是不同的.

2) 在拉格朗日描述下更新结点位置,从 $u = dx/dt$ 可以得到

$$x_i^{n+1j} = x_i^n + 1/2(x_i^n + x_i^{n+1j})\Delta t. \quad (16)$$

3) 生成网格并识别边界.

4) 检查速度场是否收敛,

$$\frac{|u^{j+1} - u^j|}{1 + |u^{j+1}|} < 10^{-6}.$$

如果收敛转第 5 步,否则转第 1) 步直至迭代收敛.

5) 修正质量并进行下一个时间步的计算.

4. 数值算例

本文计算了二维水珠滴落水面的时间历程.

一个高 0.7 m,直径 0.15 m 的水珠滴入 2 m × 1 m 的水池里,水池的自由面位于 $y = 0$ 处.图 5 给出了不同时刻的自由面形状.

在初始时刻,水珠在重力加速度的作用下开始下落; $t = \sqrt{2h/g} = 0.335$ s 时,流体撞上液面如图 3(a)所示;图 3(b)所在时刻,流体向两侧飞溅;图 3(c)时刻,流体被溅起直至撞到左右壁面,水面被砸出一个大坑;在图 3(d)时刻,被砸出的流体开始慢慢聚拢,这也是水珠撞击深水面和撞击固体不同的地方^[1];在聚拢到最高点时,如图 3(e)所示,中间部分的流体开始下落并把两侧的流体推开;形成如图 3(f)所示的两个峰;图 3(g)时刻,流体贴到左右壁面;图 3(h)时刻,由于中部流体减速较快,两边减速较慢,形成了帽子的形状;之后流体在初速度和重力的作用下,经历几次类似于呼吸的上下运动,随着运

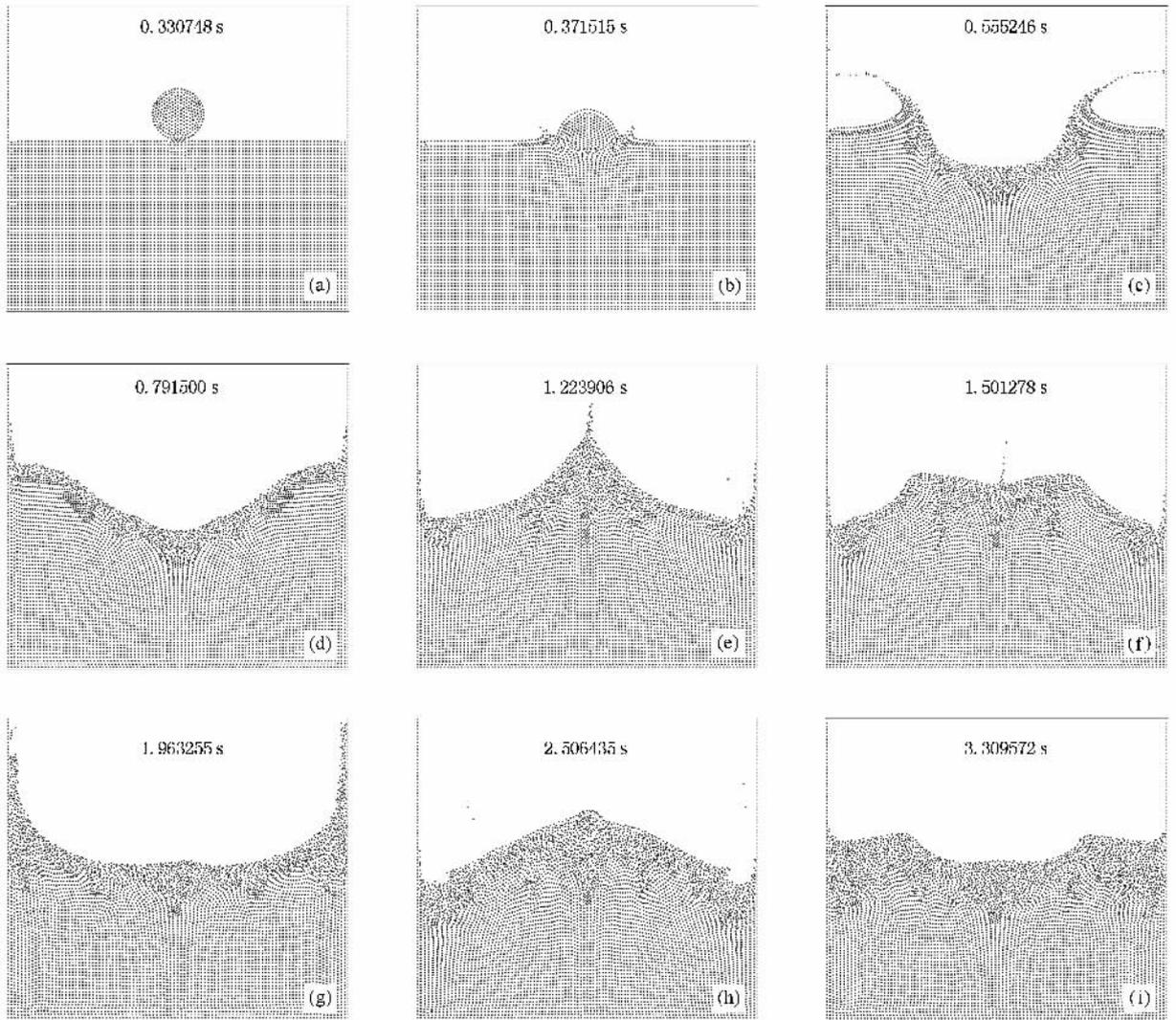


图 3 不同时刻自由面的形状

动幅度的减小,还会出现如图 3(i)所示的两个行波的相撞.最后流动在黏性的作用归于静止.

图 4 给出了 $t = 2.5$ s 时识别出来的网格和边界形状.

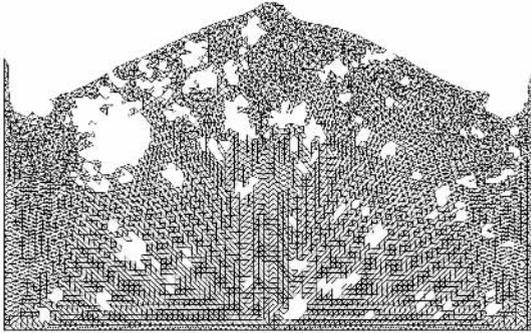


图 4 $t = 2.5$ s 时的网格形状

将整个计算结果与商用软件 Flow-3d 的结果进行比较. Flow-3d 的网格大小为 300×300 , LSPFEM 结点数目为 6088.

图 5 为初始几个时刻 Flow-3d 计算的自由液面形状, LSPFEM 的结果与之符合.

图 6 为另几个时刻 Flow-3d 得到的自由面形状. 水珠在没有碰撞水面之前, 理论上和 LSPFEM 得到的都是圆形, 而 Flow-3d 结果中水珠底部已经变形, 这是欧拉描述和 VOF 方法在界面捕捉和构造上的不精确性造成的. LSPFEM 在每一时刻都能得到清晰锐利的自由面形状. 这也是拉格朗日描述比欧拉描述的优点.

图 6 中, 2.5 s 时 Flow-3d 的结果也呈帽子的形状, 但比 LSPFEM 的结果稍宽. 在 3.3 s, LSPFEM 的结果是两个相撞的行波, 但 Flow-3d 的结果已经表现出明显的不对称. 为了进行进一步比较, 取 $(0, -0.5)$ 这个固定位置, 将 LSPFEM 和 Flow-3d 得到的速度以及压力值比较如图 7 所示.

在运动的初始阶段, 自由液面的形状十分符合, 从图 7 可以看出两种方法得到的速度也基本一致. 在 3 s 后, 自由面形状以及速度开始有所偏差, 这是

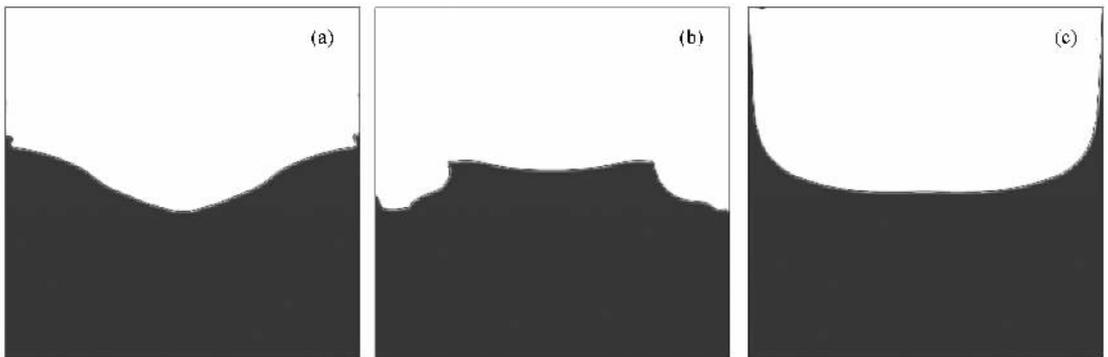


图 5 在 0.8, 1.5 以及 1.95 s 时 Flow-3d 计算结果

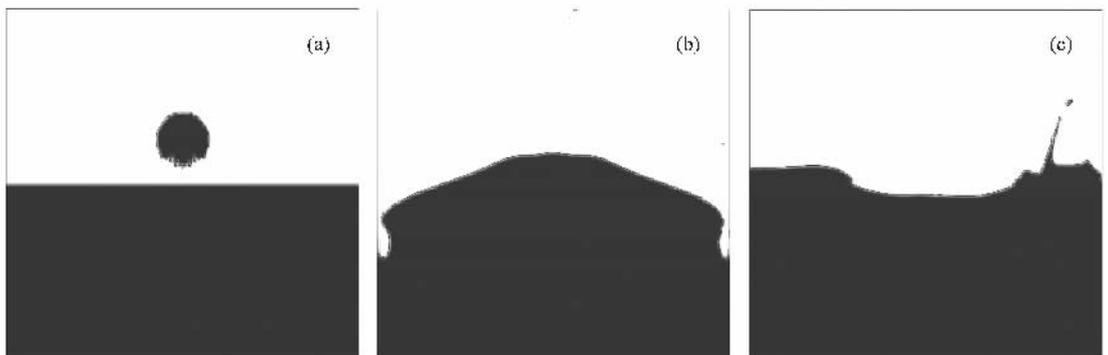


图 6 在 0.3, 2.5 以及 3.3 s 时 Flow-3d 计算结果

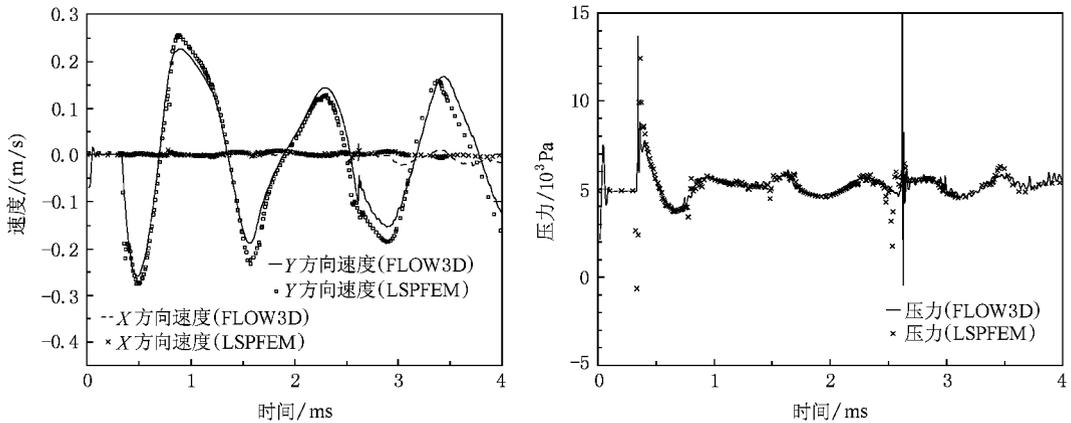


图 7 (0, -0.5)固定点处 LSPFEM 和 Flow-3d 速度和压力比较

因为问题的强非线性,初始结果的不同造成偏差越来越大.从对称性上来说,水平方向速度理论上应为 0, LSPFEM 的速度基本为零,但 Flow-3d 结果中水平方向速度变得越来越大.压力上,两者结果都有几个明显的突变,这是由于碰撞造成的.

5. 结 论

文中推导了一种自适应时间步长格式,对粒子

PFEM 进行了改进,并引入质量修正方案,减小了质量误差.使用 LSFEM 作为流体计算的空间离散方案,提出了 LSPFEM.它有效地集成了 LSFEM 求解稳定和 PFEM 处理大变形问题的优点.最后用 LSPFEM 模拟了二维水珠滴落水面飞溅直至平静下来的整个时间历程,并与商用软件 Flow-3d 进行了对比,在运动的前段结果十分符合;而与欧拉描述的 Flow-3d 相比, LSPFEM 充分吸收了拉格朗日描述的优点,在整个时间历程上得到了锐利清晰的界面.

- [1] Rein M 1993 *Fluid Dyn. Res.* **12** 61
- [2] Donea J, Huerta A 2003 *Finite element methods for flow problems* (John Wiley & Sons Ltd) p296
- [3] Scardovelli R, Zaleski S 1999 *Annu. Rev. Fluid Mech.* **31** 567
- [4] Wang F, He F 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1005 (in Chinese)
[王 飞、何 枫 2006 物理学报 **55** 1005]
- [5] Enright D, Fedkiw R, Ferziger J, Mitchell I 2002 *J. Comput. Phys.* **183** 83
- [6] Braess H, Wriggers P 2000 *Comput. Method Appl. M.* **190** 95
- [7] Perot B, Nallapati R 2003 *J. Comput. Phys.* **184** 192
- [8] Chen L, Cheng Y M 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1 (in Chinese)
[陈 丽、程玉民 2008 物理学报 **57** 1]
- [9] Cheng R J, Cheng Y M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5569 (in Chinese)
[程荣军、程玉民 2007 物理学报 **56** 5569]
- [10] Gu Y T, Ding H 2005 *Advan. M.* **35** 323 (in Chinese) [顾元通、丁 桦 2005 力学进展 **35** 323]
- [11] Gonzalez D, Cueto E, Chinesta F, Doblare M 2007 *J. Comput. Phys.* **223** 127
- [12] Idelsohn S R, Onate E, Del Pin F, Calvo N 2006 *Comput. Method Appl. M.* **195** 2100
- [13] Idelsohn S R, Onate E, Calvo N, Del Pin F 2003 *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **58** 893
- [14] Idelsohn S R, Onate E, Del Pin F 2003 *Comput. Struct.* **81** 655
- [15] Yamamoto K, Kawahara M 1999 *Comput. Struct.* **71** 435
- [16] Jiang B N 1998 *The Least-Squares Finite Element Method* (Springer-Verlag) p66, 170
- [17] Bowyer A 1981 *Comput. J.* **24** 162
- [18] Calvo N, Idelsohn S R, Onate E 2003 *Eng. Comput.* **20** 583
- [19] Sukumar N, Moran B, Semenov A Y, Belikov V V 2001 *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **50** 1
- [20] Idelsohn S R, Onate E 2006 *Comput. Method Appl. M.* **195** 4681
- [21] Edelsbrunner H, Mücke E P 1994 *ACM Trans. Graph.* **13** 43

Numerical simulation of liquid drop phenomenon by least square particle finite element method^{*}

Tang Bo Li Jun-Feng Wang Tian-Shu[†]

(School of Aerospace , Tsinghua University , Beijing 100084 , China)

(Received 17 December 2007 ; revised manuscript received 10 April 2008)

Abstract

A least square particle finite element method is presented and used to simulate the impact and splash of 2D water droplets on the water surface. This algorithm is based on an upgraded Lagrangian framework. An extended Delaunay triangulation method is used to get the new mesh at every time step. An alpha-shape method is used to deal with the splash and impact of the free surface. The least square finite element method is applied to solve the Navier-Stokes equations. An adaptive time step algorithm is derived to improve the efficiency and the robustness of calculation, and a mesh pulling scheme is introduced to improve the conservation of the total mass. Finally, when compared with the commercial Flow-3d code, the computational results achieve good agreement. Moreover, the free surface is more accurate and more clearcut than that of the Eulerian description based Flow-3d code.

Keywords : water drop , Delaunay triangular , alpha-shape , least square finite element method

PACC : 0340G , 4710 , 4755K , 9530L

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10302013 , 10572022).

[†] Corresponding author. E-mail: tswang@tsinghua.edu.cn