第 57 卷 第 11 期 2008 年 11 月
1000-3290/2008/57(11)/6736-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57,No.11,November,2008

含时谐振子的动力学演化*

王晓芹† 周立友 逯怀新

(潍坊学院物理与电子科学系,潍坊 261061)

(2007 年 12 月 26 日收到;2008 年 3 月 25 日收到修改稿)

利用含时量子变换理论,由量子变换理论中的变换矩阵,方便地给出了含时谐振子的演化算符,从而求得了含时谐振子的精确解.

关键词:含时谐振子,含时量子变换,动力学演化

PACC:0365,6120L

1.引 言

含时问题[1,2]是量子理论中的一个重要问题.在量子跃迁、辐射的吸收和发射等基本问题中都涉及到含时问题.不仅如此,在量子计算[3]、量子纠缠[4]中也涉及到含时体系问题.因此,对含时问题进行研究,不仅对量子理论本身,而且对量子信息论都具有重要意义.

在量子理论中,随时间变化的谐振子就是一个重要的含时模型,人们通过对这一模型的研究,可以得到它的时间演化算符,从而求得态矢的演化及波函数.文献[5]利用量子变换理论[6],对变频谐振子模型作了详细地研究,文献[7]讨论了含时谐振子的逆问题与压缩态.这些研究都为人们求解这类含时问题提供了一种很有价值的途径.文献[5]所用的方法是先设定时间演化算符,然后由量子变换理论,给出确定演化算符中各系数所满足的微分方程,再通过求解各系数所满足的微分方程,进而得到时间演化算符的表达式.而求解各系数所满足的微分方程,会给问题的求解带来一定的不便,并且微分方程有时不一定能严格求解,所以,用文献[5]给出的结果做进一步的计算难免存在一定的困难,特别是很难给出态矢演化和波函数等表达式的解析形式.本文利用量子变换理论,从其中的正则变换矩阵出发,可方便地得到时间演化算符的解析表达式.而且通过下面的讨论可以看到,本文所给出的结果为进一步的计算,如态矢的演化、波函数、矩阵元及跃迁概率等的计算,带来了很大的方便,并能得到这些结果的解析表达式.

2.变频谐振子的严格解

含时谐振子是一个重要的动力学体系,其 Hamiltonian 为

$$H(t)=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega(t)^2x^2, \tag{1}$$

为利用量子变换理论对(1)式进行求解,先将(1)式无量纲化,设

$$Q_0=\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}x,$$

$$P_0=\sqrt{\frac{1}{m\omega_0\hbar}}p,$$

则(1)式变为

$$H(t)=\frac{1}{2}\omega_0\hbar\left[P_0^2+f(t)Q_0^2\right], \tag{2}$$

其中 $f(t)=\dfrac{\omega^2(t)}{\omega_0^2}$.(2)式可进一步改写为

$$H(t)=\frac{1}{2}\omega_0\hbar\sqrt{f(t)}\times\left[\frac{P_0^2}{\sqrt{f(t)}}+\sqrt{f(t)}Q_0^2\right], \tag{3}$$

记

$$Q(t)=f^{1/4}(t)Q_0,$$
$$P(t)=f^{-1/4}(t)P_0, \tag{4}$$

---

* 山东省自然科学基金(批准号:Y2006A24)和潍坊学院自然科学基金(批准号:2006Z01)资助的课题.

† E-mail:wangxq3267@sohu.com

显然，(4)式可写为

$$(Q(t),P(t)) = (Q_0,P_0) \times \begin{bmatrix} f^{1/4}(t) & 0 \\ 0 & f^{-1/4}(t) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

利用公式

$$(a^+,a) = (Q_0,P_0)N_0 = (Q_0,P_0)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}} & \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

其中

$$N_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}} & \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

于是，我们得到

$$\begin{aligned}(a^+(t),a(t)) &= (Q(t),P(t))N_0 \\ &= (Q_0,P_0)\begin{bmatrix} f^{1/4}(t) & 0 \\ 0 & f^{-1/4}(t) \end{bmatrix} N_0 \\ &= (a^+,a)M, \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$A = f^{1/4}(t) + f^{-1/4}(t) = \frac{\omega(t)+\omega_0}{\sqrt{\omega(t)\omega_0}},$$

$$B = f^{1/4}(t) - f^{-1/4}(t) = \frac{\omega(t)-\omega_0}{\sqrt{\omega(t)\omega_0}}. \quad (9)$$

如果将(7)式写为

$$\begin{aligned}\Lambda' &= (a^+(t),a(t)) = U\Lambda U^{-1} \\ &= U(a^+,a)U^{-1} = \Lambda M = (a^+,a)M, \end{aligned} \quad (10)$$

则根据量子变换理论[6]给出的 U 算符的三种表达形式：

$$\begin{aligned} U &= \exp\left[\frac{1}{2}\Lambda N\Sigma_{\mathrm{B}}\tilde{\Lambda}\right] = \exp\left[\frac{1}{2}\Lambda(\ln M)\Sigma_{\mathrm{B}}\tilde{\Lambda}\right] \\ &= U^{(n)} = U^{(a)}, \\ U^{(n)} &= \frac{1}{\sqrt{\det C}} :\exp\left[\frac{1}{2}\Lambda D(M)\Sigma_{\mathrm{B}}\tilde{\Lambda}\right]:, \\ U^{(a)} &= \frac{1}{\sqrt{\det A}} \vdots\exp\left[-\frac{1}{2}\Lambda D(M^{-1})\Sigma_{\mathrm{B}}\tilde{\Lambda}\right]\vdots, \end{aligned} \quad (11)$$

我们很容易写出(10)式中演化算符 $U(t)$ 的一般指数型、正规乘积型和反正规乘积型形式，分别为

$$U = \mathrm{e}^{\frac{\lambda(t)}{2}(a^2 - a^{+2})}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} U^{(n)} &= \sqrt{\mathrm{sech}\lambda(t)} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\delta(t)a^{+2}\right) \\ &\times \exp[\ln(\mathrm{sech}\lambda(t))a^+ a] \\ &\times \exp\left(\frac{1}{2}\delta(t)a^2\right), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} U^{(a)} &= \sqrt{\cosh\lambda(t)} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\delta(t)a^2\right) \\ &\times \exp[\ln(\cosh\lambda(t))a^+ a] \\ &\times \exp\left(\frac{1}{2}\delta(t)a^{+2}\right), \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $\lambda(t)$ 由下式决定：

$$\tanh\lambda(t) = \delta(t) = \frac{\omega(t)-\omega_0}{\omega(t)+\omega_0},$$

$$\mathrm{sech}\lambda(t) = \frac{2\sqrt{\omega(t)\omega_0}}{\omega(t)+\omega_0}. \quad (15)$$

从而，最后得(1)式的严格解为

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= U(t)|\Psi(0)\rangle \\ &= U^{(n)}(t)|\Psi(0)\rangle \\ &= U^{(a)}(t)|\Psi(0)\rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

3. 初态演化

设初态为真空态，将 $|\Psi(0)\rangle = |0\rangle$ 代入(16)式，并利用时间演化算符的正规乘积(13)式，经过简单计算得到

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= U^{(n)}(t)|0\rangle = U^{(n)}|0\rangle \\ &= \sqrt{\mathrm{sech}\lambda(t)} \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2}\delta(t)a^{+2}\right)|0\rangle. \end{aligned} \quad (17)$$

(17)式正是真空压缩态. 由此我们可以清楚地看出，支配由(1)式所描述的动力学演化的 Hamiltonian 是由压缩变换而来的.

再设初态为相干态，将 $|\Psi(0)\rangle = |z\rangle$ 代入(16)式，并利用时间演化算符的正规乘积(13)式，可得

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \sqrt{\mathrm{sech}\lambda(t)}\exp\left(-\frac{1}{2}\delta(t)a^{+2}\right) \\ &\times \exp[\ln(\mathrm{sech}\lambda(t))a^+ a] \\ &\times \exp\left(\frac{1}{2}\delta(t)a^2\right)|z\rangle \\ &= \sqrt{\mathrm{sech}\lambda(t)}\exp\left(-\frac{1}{2}\delta(t)a^{+2}\right) \\ &\times \exp[\ln(\mathrm{sech}\lambda(t))a^+ a] \\ &\times \exp\left(\frac{1}{2}\delta(t)z^2\right)|z\rangle \\ &= \sqrt{\mathrm{sech}\lambda(t)}\exp\left(\frac{1}{2}\delta(t)z^2\right) \end{aligned}$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2+\frac{1}{2}|z(t)|^2\right)$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2}\delta(t)a^{+2}\right)|z(t)\rangle, \qquad (18)$$

其中，$z(t)=z\mathrm{sech}\lambda(t)$.

为进一步计算，在(18)式中插入相干态的完备关系

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 z'}{\pi}|z'\rangle\langle z'| = I, \qquad (19)$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\exp\left(-\frac{1}{2}\delta(t)a^{+2}\right)|z(t)\rangle\\
&=\int \frac{\mathrm{d}^2 z'}{\pi}|z'\rangle\langle z'|\exp\left(-\frac{1}{2}\delta(t)a^{+2}\right)|z(t)\rangle\\
&=\int \frac{\mathrm{d}^2 z'}{\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}\delta(t)z'^{*2}\right)|z'\rangle\langle z'||z(t)\rangle\\
&=\int \frac{\mathrm{d}^2 z'}{\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}\delta(t)z'^{*2}-\frac{1}{2}|z'|^2\right.\\
&\quad\left.-\frac{1}{2}|z(t)|^2+z'^{*}z(t)\right)|z'\rangle\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\int \frac{\mathrm{d}^2 z'}{\pi}\frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\right)^n\\
&\quad\times\exp\left(-\frac{1}{2}\delta(t)z'^{*2}-|z'|^2\right.\\
&\quad\left.-\frac{1}{2}|z(t)|^2+z'^{*}z(t)+\xi z'\right)\Big|_{\xi=0}|n\rangle. \qquad (20)
\end{aligned}$$

利用高斯积分公式[8]

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}(z^*,z)Q\begin{pmatrix}z^*\\ z\end{pmatrix}+(u,\nu)\begin{pmatrix}z^*\\ z\end{pmatrix}\right\}$$

$$=[-\det Q]^{-1/2}\exp\left\{\frac{1}{2}(u,\nu)Q^{-1}\begin{pmatrix}u\\ \nu\end{pmatrix}\right\}, \qquad (21)$$

式中 $Q=\tilde{Q}$ 是非奇异矩阵，u 和 ν 是任意复数.将(21)式代入(20)式，得

$$\begin{aligned}
&\exp\left(-\frac{1}{2}\delta(t)a^{+2}\right)|z(t)\rangle\\
&=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|z(t)|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{n!}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\right)^n\\
&\quad\times\mathrm{e}^{-\delta(t)\xi^2+2\xi z(t)}\Big|_{\xi=0}|n\rangle. \qquad (22)
\end{aligned}$$

利用厄米多项式的生成函数公式

$$\mathrm{e}^{-y^2+2yx}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{y^n}{n!}, \qquad (23)$$

计算(22)式

$$\begin{aligned}
&\exp\left(-\frac{1}{2}\delta(t)a^{+2}\right)|z(t)\rangle\\
&=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|z(t)|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{n!}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\right)^n\mathrm{e}^{-\delta(t)\xi^2+2\xi z(t)}\Big|_{\xi=0}|n\rangle\\
&=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|z(t)|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{n!}}\delta^{n/2}(t)H_n\left(\frac{z(t)}{\sqrt{\delta(t)}}\right)|n\rangle. \qquad (24)
\end{aligned}$$

最后，将(24)式代入(18)式，得初态是相干态的态矢演化为

$$\begin{aligned}
|\Psi(t)\rangle &=\sqrt{\mathrm{sech}\lambda(t)}\exp\left(\frac{1}{2}\delta(t)z^2\right)\\
&\quad\times\exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{n!}}\delta^{n/2}(t)\\
&\quad\times H_n\left(\frac{z(t)}{\sqrt{\delta(t)}}\right)|n\rangle. \qquad (25)
\end{aligned}$$

这也是文献[7]给出的结果.

4. 波函数

现在计算(1)式的波函数.由(16)式得

$$\begin{aligned}
\Psi(x,t)&=\langle x||\Psi(t)\rangle\\
&=\langle x|U^{(n)}(t)|\Psi(0)\rangle\\
&=\iint\frac{\mathrm{d}^2 z\mathrm{d}^2 z'}{\pi^2}\langle x||z\rangle\\
&\quad\times\langle z|U^{(n)}(t)|z'\rangle\langle z'||\Psi(0)\rangle. \qquad (26)
\end{aligned}$$

容易计算下面的结果：

$$\begin{aligned}
\langle x|z\rangle &=\left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left[-\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{2}|z|^2\right.\\
&\quad\left.-\frac{1}{2}\alpha^2x^2+\sqrt{2}\alpha xz\right],\left(\alpha=\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}\right), \qquad (27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\langle z|U^{(n)}(t)|z'\rangle\\
&=\sqrt{\mathrm{sech}\lambda(t)}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\delta(t)(z'^2-z^{*2})}\langle z|\mathrm{e}^{\ln\mathrm{sech}\lambda(t)a^+a}|z'\rangle\\
&=\sqrt{\mathrm{sech}\lambda(t)}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\delta(t)(z'^2-z^{*2})}\\
&\quad\times\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(|z'|^2+|z|^2-2\mathrm{sech}\lambda(t)z'z^*)}, \qquad (28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\langle z'|\Psi(0)\rangle\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}\Psi_n\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\right)^n\\
&\quad\times\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|z'|^2+\beta z'^*}\Big|_{\beta=0},\\
\Psi_n&=\langle n|\Psi(0)\rangle. \qquad (29)
\end{aligned}$$

将(27)—(29)式代入(26)式，得

$$\begin{aligned}
\Psi(x,t)&=\left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\sqrt{\mathrm{sech}\lambda(t)}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2}\\
&\quad\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Psi_n}{\sqrt{n!}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\right)^n\\
&\quad\times\iint\frac{\mathrm{d}^2 z\mathrm{d}^2 z'}{\pi^2}\exp\left[-|z|^2-\frac{1}{2}z^2\right.
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\delta(t)z^{*2}+\sqrt{2}\alpha xz+\operatorname{sech}\lambda(t)z'z^{*}\Big]$$

$$\times\exp\left[-|z'|^2+\frac{1}{2}\delta(t)z'^2+\beta z'^{*}\right]\Bigg|_{\beta=0}. \quad (30)$$

利用(21)式，分别对 z 和 z' 积分，考虑(23)式，最后得到

$$\Psi(x,t)=\left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\sqrt{\operatorname{sech}\lambda(t)}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2}\mathrm{e}^{\frac{\delta}{\delta-1}\alpha^2x^2}$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{\delta-1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Psi_n}{\sqrt{n!}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\right)^n$$
$$\times\exp\left[\frac{1}{2}\left(\delta+\frac{\operatorname{sech}^2\lambda(t)}{(\delta-1)}\right)\beta^2\right.$$
$$\left.-\frac{\sqrt{2}\alpha\operatorname{sech}\lambda(t)}{(\delta-1)}x\beta\right]\Bigg|_{\beta=0}$$
$$=\left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\sqrt{\operatorname{sech}\lambda(t)}\,\mathrm{e}^{\left(\frac{\delta}{\delta-1}-\frac{1}{2}\right)\alpha^2x^2}$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{\delta-1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Psi_n}{\sqrt{2^nn!}}$$
$$\times\Gamma^n(t)H_n[\alpha(t)x], \quad (31)$$

其中

$$\alpha(t)=\frac{\operatorname{sech}\lambda(t)\alpha}{(1-\delta)\sqrt{\frac{\operatorname{sech}^2\lambda(t)}{1-\delta}-\delta}},$$

$$\Gamma(t)=\sqrt{\left(\frac{\operatorname{sech}^2\lambda(t)}{1-\delta}-\delta\right)}. \quad (32)$$

如果取初态为真空态，将 $\Psi_n=\delta_{n,0}$ 代入(31)式，则得到真空压缩态的波函数为

$$\Psi(x,t)=\left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{1-\delta}}$$
$$\times\sqrt{\operatorname{sech}\lambda(t)}\,\mathrm{e}^{\left(\frac{\delta}{\delta-1}-\frac{1}{2}\right)\alpha^2x^2}. \quad (33)$$

若初态为粒子数态，将 $\Psi_n=\delta_{n,m}$ 代入(31)式，则得到粒子数压缩态的波函数为

$$\Psi(x,t)=\left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$$
$$\times\sqrt{\operatorname{sech}\lambda(t)}\,\mathrm{e}^{\left(\frac{\delta}{\delta-1}-\frac{1}{2}\right)\alpha^2x^2}$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{n!}\sqrt{1-\delta}}\Gamma^n(t)H_n[\alpha(t)x]. \quad (34)$$

若 $\omega(t)=\omega_0$，则(31)式变为自由谐振子的波函数，即

$$\Psi(x)=\left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/4}(2^nn!)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2}H_n(\alpha x). \quad (35)$$

5. 结　论

通过上面的计算可以清楚地看出，本文所用的方法简单易行，并能直接给出时间演化算符的简洁表达式. 利用本文给出的演化算符，对于任意给定的初态，可以非常方便地计算态矢的演化、波函数以及矩阵元等，得到它们清晰的解析表达式. 同时，这一方法也为量子信息处理[9]中的量子纠缠、非定域性动力学等提供了方便的途径，这再一次说明了量子变换理论的普适性和优越性.

感谢张永德教授对本文的指导和有益讨论.

[1] Kleber M 1994 *Phys. Rep.* **6** 236

[2] Louisell William H 1973 *Quantum Statistical Properties of Radiation* (New York: Wiley) p203—207

[3] Lloyd S 1993 *Science* **261** 1569
Bennett C H, DiVincenzo D P *Nature* **377** 389

[4] Bennet C H, Herbert H J, Popescu S, Schumacher B 1996 *Phys. Rev.* A **53** 2046
Popescu S, Rohrlich D 1997 *Phys. Rev.* A **56** R3319

[5] Xu X W, Liu S D, Ren T Q, Zhang Y D 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1601 (in Chinese) [徐秀玮、柳盛典、任廷琦、张永德 1999 物理学报 **48** 1601]

[6] Zhang Y D, Tang Z 1993 *J. Math Phys.* **34** 5639
Wang X B, Yu S X, Zhang Y D 1994 *J. Phys.* A: *Math. Gen.* **27** 6563
Zhang Y D, Tang Z 1994 *Nuovo Cimento* B **109** 387
Yu S X, Zhang Y D 1995 *Commun. Theor. Phys.* **24** 185

[7] Fan H Y 2001 *Entangled state Representations in Quantum Mechanics and Their Applications* (Shanghai: Shanghai Jiaotong University Press) p202—205 (in Chinese) [范洪义 2001 量子力学纠缠态表象及应用(上海:上海交通大学出版社)第 202—205 页]

[8] Pan J W, Zhang Y D, Siu G G 1997 *Chin. Phys. Lett.* **14** 241

[9] Bouwmeester D, Ekert A, Zeilinger A (eds) 2000 *The Physics of Quantum Information* (Berlin: Springer-Verlag) p49—91]

Dynamical evolution for time-dependent qscillators*

Wang Xiao-Qin† Zhou Li-You Lu Huai-Xin

(*Department of Physics and Electronic Science*, *Weifang University*, *Weifang* 261061, *China*)

(Received 26 December 2007; revised manuscript received 25 March 2008)

Abstract

Based on the matrix of the time-dependent quantum transformation theory, we derive the analytic expression of the evolution operator for the time-dependent oscillators by using the time-dependent quantum transformation theory. Then the exact solution of the time-dependent oscillators is obtained.

Keywords: time-dependent oscillators, time-dependent quantum transformation theory, dynamic evolution

PACC: 0365, 6120L

* Project supported by the Natural Science Foundation of Shandong Province (Grant No. 2006A24) and the Natural Science Foundation of Weifang University (Grant No. 2006Z01).

† E-mail: wangxq3267@sohu.com