

# 一种颗粒底部压力不趋向饱和的粮仓系统

蒋亦民<sup>1)†</sup> 郑鹤鹏<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> 中南大学物理科学与技术学院, 长沙 410083)

<sup>2)</sup> 中南大学粉末冶金国家重点实验室, 长沙 410083)

(2007 年 4 月 23 日收到, 2008 年 4 月 2 日收到修改稿)

随着深度的增加, 竖直圆筒容器中的颗粒物质会把自己的重量逐渐转移到容器的侧墙壁上, 使容器底部的压力出现不随筒中颗粒材料高度的增加而增加的饱和现象. 但值得注意的是, 圆筒中的颗粒柱体并不总是表现为这个称为粮仓效应的力学状态. 例如当改变侧墙壁的力学环境使其无法承担颗粒的重量时, 柱底部的压力显然将随其高度的增加而线性地增加. 本文分析讨论了 Janssen 模型假设对这类处于静力平衡下, 但违反粮仓效应的颗粒系统的行为预测.

关键词: 颗粒物质, 粮仓, 静摩擦, 应力

PACC: 8270, 4630P, 4610

## 1. 引 言

当我们缓慢地往一圆筒里倒入水那样的液体时, 筒底受到的压力  $F_0$  会随液体的高度线性增加. 但如果倒入的是像沙子那样的颗粒物体, 筒底压力  $F_0$  的变化可能会严重偏离上述线性行为, 并达到一不再随颗粒体高度的增加而增加的饱和值  $F_{\text{sat}}$  (见图 1(c) 的曲线). 这一称作粮仓效应的有趣现象, 被公认为是颗粒物体有别与普通液体的一个重要特性<sup>[1, 2]</sup>. 其原因是颗粒体中出现了一定的剪切应力, 它能使颗粒的重量, 通过颗粒体与圆筒侧面墙壁的静摩擦行为, 转移到墙壁, 从而减轻了筒底的受力负担. 由于静止液体中没有剪切应力, 液体的重量只能被筒底承载, 墙壁无法分担, 普通液体因此不可能有粮仓效应出现.

早在一百多年前, 土木工程师就知道了颗粒体的粮仓效应. 其定量分析模型最早由德国工程师 Janssen 给出<sup>[3]</sup> (文献 4 是该文的英文翻译), 并被广泛认可, 至今仍是这类建筑物工程安全分析的标准<sup>[5]</sup>. 但这里我们希望强调的是, 尽管粮仓效应广为人知, 颗粒柱体并不总是处于这个应力状态下. 其理由是侧墙壁与颗粒体之间的静摩擦状态与粮仓效应显然有密切的关系, 而这个摩擦状态不只与颗粒体

有关, 还会受墙壁的力学环境的影响. 如果改变环境, 静止颗粒柱完全有可能处在另一个与粮仓效应很不一样的应力状态下. 具体地, 让我们考虑像文献 [6, 7] 中实验那样的, 由一圆筒和底部活塞构成的“粮仓”, 但不固定圆筒, 让它完全由颗粒材料提住不掉下来 (见图 1(b)). 这时, 侧墙壁不但不能帮助分担颗粒的重量, 反而还要颗粒承担它的全部重量. 对这样的静力平衡系统, 仓底的力  $F_0$  等于颗粒和墙壁的重量之和, 与颗粒高度  $h$  呈线性增加的关系 (图 1(c)). 这表明该筒仓中的应力分布将与粮仓效应所描述的截然不同. 本文中我们把这种与传统粮仓应力违反的现象称作反粮仓效应.

尽管静止的沙堆、谷堆等在日常生活中司空见惯, 如何分析其中的应力分布至今仍然是一个活跃的研究前沿问题<sup>[1, 2]</sup>. 在这种情形下, 提出和考虑一些以前文献中不太常见又可实验测量的新系统和新应力状态, 无疑对颗粒理论的建立以及理论的实验检验都是很有益的. 本文将试用 Janssen 所总结的粮仓效应的一些基本性质<sup>[3, 4]</sup>, 对上述反粮仓问题作一简单初步的分析. 这样做的理由是它们都是沿重力方向的轴对称系统, 除颗粒与墙壁的摩擦力的大小、方向有所不同外, 其他方面都是一样的, 因此应该有许多类似的性质. 当然这只是我们目前的一个假设, 是否成立还要看其预言的结果能否与今后的实验符

† E-mail: jiangyimin@yahoo.cn

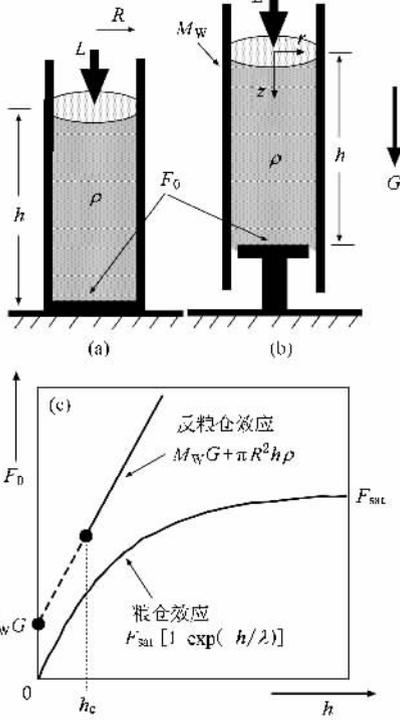


图 1 粮仓效应 (a) 与反粮仓效应 (b) 示意图, 以及它们底部的压力随颗粒高度的变化曲线 (c) (取颗粒柱顶的附加力  $L=0$ )

合。值得指出的是, 为能提供足够的静摩擦力把圆筒拉住不掉下, 图 1(b) 所示的反粮仓系统的颗粒柱高  $h$  必须大于一临界值  $h_c$ 。这是一个很容易实验测量的大小, 本文将详细计算和讨论这个临界高度  $h_c$  随筒壁质量  $M_w$  和颗粒顶部加载  $L$  的变化关系。

Janssen 模型可归纳为下面的三个假设<sup>[3,4]</sup>：

1) 认为颗粒柱中水平方向和竖直方向的应力比  $\sigma_r/\sigma_z = J$  可以很好地当作只与颗粒材料有关, 与位置  $r, z$  无关的常数; 2) 认为圆筒侧墙壁受到的切向和法向应力之比  $\sigma_{rz}^w/\sigma_r^w = \mu$  可以很好地当作与竖向位置  $z$  无关的常数; 3) 竖向应力  $\sigma_z$  不随  $r$  变化。这时由假设 1) 可知水平应力  $\sigma_r$  也如此 ( $r, z$  是柱坐标, 见图 1)。由于不好测量颗粒物体内部的应力, 而筒壁受力情况的测量就我们所知也未见报道, Janssen 的这些假设目前还没有直接的实验验证。最近的颗粒弹性理论计算结果显示这些假设的确相当精确<sup>[8]</sup>, 但对它们的实验支持一般是间接的, 来自其对颗粒底部压力  $F_0$  随高度  $z$  变化的预测与实验有较好地符合。显然, 利用反粮仓装置使我们有可能从测量临界数据这一不同的角度, 开展有关 Janssen 假设的实验研究。值得提到的是, 文献 7) 的作者仔细测

量了  $F_0$  与 Janssen 预测的偏差, 同时强调这个偏差能用一种双曲型的应力传播方程来解释。Janssen 模型与实际的偏差一直是有关建筑工程长期关心的问题, 至今仍有研究报道<sup>[9,10]</sup>。由于诸多复杂因素, 如颗粒物密度不均匀, 有内禀各向异性等都可能致这个偏差, 我们认为其原因目前尚不能定论。另外, 文献 6, 7) 中的实验所使用的容器直径与单个颗粒的尺寸比只有 20 左右, 其样品的介观行为可能还不能完全避免, 他们所观察到的与 Janssen 预测的偏差是否与此有关, 也是一个需要仔细分析的问题。就目前的情形来看, 我们相信发展像反粮仓装置这样的新实验手段会有助于这些问题的澄清。

## 2. 单圆筒装置的临界高度

考虑图 1(b) 所示的系统, 并假设有圆柱对称性, 颗粒体内的应力因此只是半径  $r$  和深度  $z$  的函数。在柱坐标下, 应力需要满足的一个力平衡方程是

$$\frac{\alpha(\sigma_{rz})}{\partial r} + \frac{\alpha(\sigma_{zz})}{\partial z} = \rho Gr, \quad (1)$$

这里  $G$  是重力加速度。在本文中, 我们将假设颗粒物体处于均匀状态, 密度  $\rho$  因此是一个常数。将 (1) 式对  $r$  从 0 到  $R$  积分, 得

$$R\sigma_{rz}^w + \frac{1}{2\pi} \frac{dF}{dz} = \frac{GM_G}{2\pi h}, \quad (2)$$

其中  $M_G = \rho\pi hR^2$  是颗粒体的质量,  $\sigma_{rz}^w$  是应力分量  $\sigma_{rz}$  在侧墙壁  $r=R$  上的值,  $F$  是

$$F = \int_0^R 2\pi r \sigma_{zz} dr, \quad (3)$$

即颗粒柱截面上沿竖直方向的力。显然,  $F$  和  $\sigma_{rz}^w$  都只是  $z$  的函数。记  $\sigma_{rz}^w$  和颗粒截面上的平均压强  $F/(\pi R^2)$  的比值为  $\kappa$ , 即

$$\sigma_{rz}^w / \left( \frac{F}{\pi R^2} \right) = \kappa. \quad (4)$$

我们可将 (2) 式写成

$$2\kappa F + R \frac{dF}{dz} = \frac{RGM_G}{h}. \quad (5)$$

将方程 (5) 对  $F$  求解, 得

$$F = e^{-z/\lambda} \left[ L + \frac{GM_G}{h} \int_0^z e^{\tau/\lambda_1} d\tau \right], \quad (6a)$$

其中

$$\lambda(z) = \left[ \frac{2}{Rz} \int_0^z \kappa(z_1) dz_1 \right]^{-1}, \quad (6b)$$

这里  $L$  是颗粒圆柱顶端  $z = 0$  处的外加荷载,  $\lambda_1 = \lambda$  ( $z_1$ ). 如果已知函数  $\kappa(z)$ , 我们能用 (6) 式计算出颗粒柱中的压力随  $z$  的变化. 但需要注意的是, 由于墙壁完全被颗粒提起, 底端压力  $F_0 = F(z = h)$  必须等于墙壁和颗粒体的重力, 以及加载  $L$  的总和. 因此函数  $\kappa(z)$  或  $\lambda(z)$  必须满足约束条件

$$e^{-h/\lambda_0} \left( L + \frac{GM_G}{h} \int_0^h e^{z/\lambda} dz \right) = (M_G + M_W)G + L, \quad (7)$$

其中  $\lambda_0 = \lambda(z = h)$ . 不难验证这时筒壁的静力平衡条件

$$2\pi R \int_0^h \sigma_{rz}^W dz = -GM_W \quad (8)$$

将自动满足. 另外如果  $h \rightarrow 0$ , 条件 (7) 不可能满足 (注意  $M_G/h = \pi R^2 \rho$  是常数). 因此反粮仓现象的颗粒柱高  $h$  必须大于某一临界值  $h_c$ . 其大小可用 (7) 式计算.

值得注意的是 (1)–(8) 式是完全严格的, 不含任何近似或假设. 这里唯一未知的内容是  $\kappa$  随  $z$  的函数关系. 如果 Janssen 的三个假设成立, 我们有  $\sigma_{rz}^W = \mu \sigma_{rr}^W = \mu J \sigma_{zz}$  和  $F = \pi R^2 \sigma_{zz}$ . 将它们代入方程 (4), 得  $\kappa = \mu J$  是个常数. 另外由 (6b) 式可得  $\lambda = R(2\kappa) = R(2\mu J)$  也是常数. 因此我们有竖向力

$$F = \frac{GM_G \lambda}{h} + \left( L - \frac{GM_G \lambda}{h} \right) e^{-z/\lambda}. \quad (9)$$

特别要注意的是对反粮仓效应, 侧面边界上的法向力与切向力之比  $\mu < 0$  不是材料系数, 而是一个与筒重量等有关的系统常数. 由条件 (7), 也就是 (记  $L^* = L/GM_G$  和  $M_W^* = M_W/M_G$ )

$$\left( L^* + \frac{R}{2|\mu|Jh} \right) \left( e^{\frac{2|\mu|Jh}{R}} - 1 \right) = M_W^* + 1 \quad (10)$$

我们能确定这个系统参数. 这点不难理解, 因为  $\mu$  反映的只是静摩擦力情况, 不是最大静摩擦系数. 后者的确是一个仅由颗粒材料, 墙壁等决定的材料系数, 但前者却是一个与系统几何, 质量, 加载等有关的量.

按照静摩擦定律我们有: 存在一个最大静摩擦系数  $|\mu_{\max}|$ , 当  $|\mu|$  达到它时系统开始滑动. 显然, 如果筒壁足够光滑, 它应该是颗粒与墙壁的最大静摩擦系数. 如果筒壁足够粗糙, 滑动将发生在 (靠近墙壁) 颗粒体的内部, 它应该取颗粒体的内摩擦系数. 总之  $|\mu_{\max}|$  应等于这两个系数当中最小的那一

个. 将它代入 (10) 式我们得到下面的决定临界高度  $h_c(M, L)$  的隐含公式:

$$e^{\frac{2|\mu_{\max}|Jh_c}{R}} = \frac{\chi(M_W^* + 1)|\mu_{\max}|Jh_c}{R + 2L^*|\mu_{\max}|Jh_c} + 1. \quad (11)$$

图 2 是用它绘出的临界高度随墙重变化的曲线.

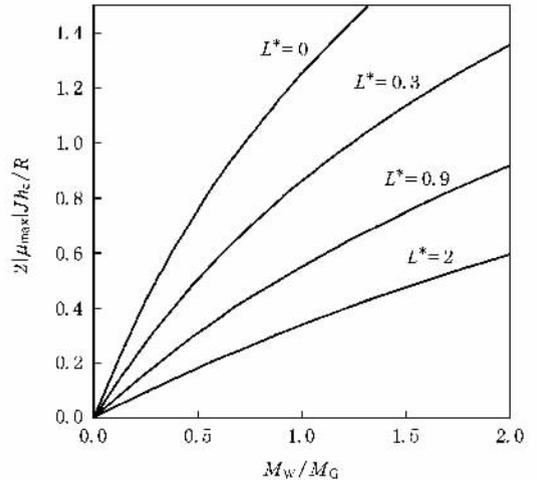


图 2 颗粒临界高度  $h_c$  与墙壁质量  $M_W$  和顶端压力  $L$  的关系

如果测量不同墙壁质量和柱顶压力时的临界高度, 并 (11) 式作拟合, 能得到  $|\mu_{\max}|J$ . 从拟合结果的好坏, 可以判断 Janssen 假设的适用性 (与理论的偏差还可能来自颗粒柱出现了密度不均匀). 特别是, 如果用粗糙筒壁做这个实验, 我们能从库仑角  $\varphi$  得知  $|\mu_{\max}|$  的值, 进而得到在设计粮仓建筑时需要的一个重要参数  $J$  的大小. 目前人们对这个数据尚有分歧. 对库仑角大约为  $30^\circ$  的颗粒材料, 用库仑屈服条件只能推知  $J$  在  $1/3$  和  $3$  之间, 不能得到比较确切的值. 在建筑工程规范里大都规定用 Jaky 的经验公式  $J = 1 - \sin \varphi$  来计算, 即  $0.5$  左右. 值得提到的是, 文献 [8] 给出了一个 Jaky 公式的非线弹理论验证. 但是文献 [7] 的作者建议取  $J = 0.74$ , 这明显地违反 Jaky 的经验公式. 显然反粮仓效应的实验数据将有助于解决这些分歧.

### 3. 双圆筒装置的临界高度

反粮仓效应还可以用图 3 所示的, 由两个共轴圆筒构成的装置来研究. 两筒都由夹在它们之间的颗粒材料提供的静摩擦力拉住不往下掉. 调整筒的重量, 颗粒的高度和上面的加载, 我们能得到外筒开

始下落,或内筒开始下落,或两筒同时开始下落等多种临界状态.因此双筒装置能提供更多的数据.

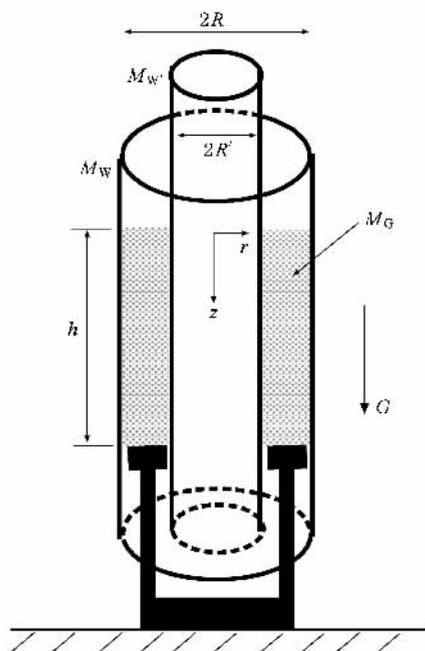


图3 处于两个圆筒之间,且违反粮仓效应的应力状态下的颗粒系统

双筒装置也可以用前面的方法来分析.首先我们定义截面压力  $F$  为

$$F = \int_{R'}^R 2\pi r \sigma_z dr, \quad (12)$$

然后将(1)式对  $r$  从  $R'$  到  $R$  积分,得

$$R\sigma_z^w - R'\sigma_z^w + \frac{1}{2\pi} \frac{dF}{dz} = \frac{GM_G}{2\pi h}, \quad (13)$$

这里  $M_G = \pi h \rho (R^2 - R'^2)$  是颗粒质量,  $\sigma_z^w$  是应力分量  $\sigma_z$  在内墙壁  $r = R'$  上的值.与上一节的单筒情形类似,我们记  $\kappa'$  和  $\kappa$  分别为  $-\sigma_z^w$  和  $\sigma_z^w$  与平均压强  $F/\pi(R^2 - R'^2)$  的比值:

$$\sigma_z^w / \left( \frac{F/\pi}{R^2 - R'^2} \right) = -\kappa', \quad (14a)$$

$$\sigma_z^w / \left( \frac{F/\pi}{R^2 - R'^2} \right) = \kappa, \quad (14b)$$

这里的负号是颗粒体的外法线方向在内外筒壁处相反的缘故.将(14)式代入(13)式并求解方程,可得  $F$  仍由(6a)式给出,只是

$$\lambda^{-1} = \frac{2}{z} \int_0^z \frac{R\kappa(z_1) + R'\kappa'(z_1)}{R^2 - R'^2} dz_1. \quad (15)$$

利用系统的所有重量都压在了底部这个事实,我们

可得到一个  $\kappa$  和  $\kappa'$  必须满足的,与(7)类似的约束条件

$$e^{-h/\lambda_0} \left( L + \frac{GM_G}{h} \int_0^h e^{z/\lambda} dz \right) = (M_G + M_W + M_W^*)G + L. \quad (16)$$

双圆筒情形的另一个约束可从外筒静力平衡条件得到.一旦外筒力平衡条件成立,内筒的静力平衡条件将自动满足.把  $F$  的表达式(6a)代入到(14b)式,可得到  $\sigma_z^w$  的表达式,再把它代入到(8)式中,可得到

$$\int_0^h \kappa e^{-z/\lambda} \left( L^* + \int_0^z e^{z_1/\lambda} \frac{dz_1}{h} \right) dz = -\frac{R^2 - R'^2}{2R} M_W^*. \quad (17)$$

在密度均匀的前提下,这些公式都是严格的.

下面引入 Janssen 的三个假设(注意由于外法线方向的原因,内筒壁处的第2个 Janssen 假设应为  $\sigma_z^w / \sigma_r^w = -\mu'$ ).与前面单筒情形类似我们有  $\kappa = \mu J$ ,  $\kappa' = \mu' J$  和

$$\lambda = \frac{R^2 - R'^2}{2J(R\mu + R'\mu')} \quad (18)$$

都是常数.这里  $\mu$  和  $\mu'$  分别是外和内筒壁的切向应力与法向应力比,并且在反粮仓状态时,都是负的.相应地  $\lambda$  也是负的.竖向力  $F(z)$  的表达式仍由(9)式给出.两个约束条件(16)(17)式为

$$\left( e^{-\frac{h}{\lambda}} - 1 \right) \left( L^* - \frac{\lambda}{h} \right) = 1 + M_W^* + M_W^*, \quad (19)$$

$$\mu = \frac{R^2 - R'^2}{2R\lambda J (M_W^* + M_W^*)} M_W^*, \quad (20)$$

利用(18)式我们还能将(20)式写成

$$\mu' = \frac{R^2 - R'^2}{2R'\lambda J (M_W^* + M_W^*)} M_W^*. \quad (21)$$

如果用(19)式消去(20)(21)式中的  $\lambda$ ,能得到  $\mu$  和  $\mu'$  随墙壁质量和颗粒高度的变化情况.特别地,当  $|\mu|$  或  $|\mu'|$  达到它们的最大允许值  $|\mu_{\max}|$  或  $|\mu'_{\max}|$  时,内筒或外筒开始下滑.一有趣的情况是内外筒同时开始下滑,即切向和法向的应力比(20)(21)式同时达到它们的最大.这时有

$$\frac{|\mu'_{\max}|}{|\mu_{\max}|} = \frac{RM_W^*}{R'M_W^*}, \quad (22)$$

它表明通过实现同时开始下滑的实验状态,我们就能测出两筒壁处最大静摩擦系数的相对值.

例如,考虑内筒和外筒材料相同,半径相差一倍的

情形 即  $|\mu_{\max}| = |\mu'_{\max}|$  和  $R = 2R'$ . 这时我们有当

$$\frac{2|\mu_{\max}|Jh}{R} = \frac{-3M_W^*}{4(M_W^* + M_W^*)\lambda} h \quad (23)$$

时, 外筒开始下滑(这时的  $h = h_c$ ). 如果没有加载  $L$ , 并且高度  $h$  给定, 出现这一临界状态的圆筒质量将落在图 4 的曲线  $AC$  段上. 类似地, 当

$$\frac{2|\mu_{\max}|Jh}{R} = \frac{-3M_W^*}{2(M_W^* + M_W^*)\lambda} h \quad (24)$$

时内筒开始下滑. 与其对应的圆筒质量将落在图 4 的曲线  $BC$  段上. 在两曲线的交点  $C$ , 内外筒同时开始下滑.

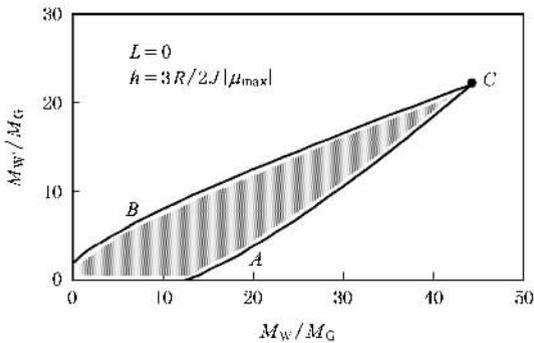


图 4 当墙壁质量处于阴影部分时, 两个圆筒在静止稳定状态. 在曲线  $AC$  上外筒开始向下滑动, 曲线  $BC$  上内筒开始向下滑动. 在它们的交点  $C$  上两筒同时开始向下滑动

用同样的方法我们还可研究施加外力将外筒向上提的实验情形. 设提拉力与外筒重量的差, 也就是净提拉力为  $T_W$ . 显然在提拉力比筒重小时, 它只起一减小外筒重量的效果. 因此这里只需讨论净提拉力为正, 也就是提拉力大于外筒重力的情况. 这时  $\mu > 0$  和  $\mu' < 0$ . 记  $T_W^* = T_W/GM_G$ , 我们有

$$\left(e^{\frac{-h}{\lambda}} - 1\right) \left(L^* - \frac{\lambda}{h}\right) = 1 + M_W^* - T_W^*, \quad (25)$$

并且当

$$\frac{2|\mu_{\max}|Jh}{R} = \frac{-3T_W^*}{4(M_W^* - T_W^*)\lambda} h \quad (26)$$

时, 外筒开始上滑, 这时  $h = h_c$ . 如果没有加载  $L$ , 并且高度  $h$  给定, 出现这一临界状态的净提拉力和内筒质量将落在图 5 的曲线  $A'C'$  段上. 类似地,

$$\frac{2|\mu_{\max}|Jh}{R} = \frac{-3M_W^*}{2(M_W^* - T_W^*)\lambda} h \quad (27)$$

时内筒开始下滑. 与其对应的净提拉力和内筒质量将落在图 5 的曲线  $B'C'$  段上. 在  $C'$  点将同时出现外筒向上滑和内筒向下滑的现象. 类似地, 还可分析

对内筒施加向上提力, 或对内筒同时施加向上提力的情形.

注意图 5 的坐标刻度比图 4 小一个量级, 表明提拉外筒使它上滑要比加载外筒使它下滑容易得多. 其原因是因为提拉外筒时, 竖向应力  $\sigma_z$  和水平应力  $\sigma_r$  都比下压外筒时小, 外筒壁的最大静摩擦力  $\propto \sigma_{rz}^{\max} = |\mu_{\max} \sigma_r^W|$  也相应地减小了. 另外使系统达到临界所需要的提拉力或圆筒重量应该与颗粒重量相当(图 5), 或远大于颗粒重量(图 4).

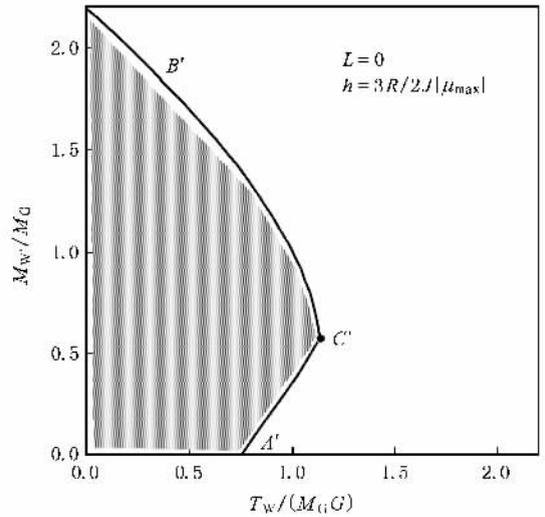


图 5 与图 4 类似, 只是外筒受到的是大小为  $T_W$  的净上提力. 当  $T_W$  和内筒质量处于阴影部分时, 两个圆筒在静止稳定状态. 在曲线  $A'C'$  上外筒开始向上滑动, 在曲线  $B'C'$  上内筒开始向下滑动. 在它们的交点  $C'$  上内筒和外筒同时开始向下和上滑动

双筒装置的力学现象显然比单筒装置丰富不少. 通过改变装置的几何, 质量和加载, 我们能得到更多的临界数据. 它们能对 Janssen 假设的适用性给出更加苛刻的研判. 因此这是一更好的研究颗粒力学行为, 测量  $J$  和摩擦角的装置.

## 4. 讨 论

从实验角度看反粮仓系统比较容易研究的内容应该是临界时筒壁力、顶部加载力、颗粒柱高之间的关系. 这些量的实验测量都很容易, 而且数据量大, 这是反粮仓类装置优越的地方. 相比之下, 正常粮仓实验大都只测量颗粒柱底的竖向压力与柱高的关系, 数据量要少许多. 另外颗粒物体的边界力的测量难度相对要大些, 受颗粒体微结构涨落的影响也大, 如何获得确切和可重复的测量结果是正常粮仓实验

需要特别注意的地方<sup>[6]</sup>。因此,正、反常装置之间有很强的互补性。反粮仓实验应该能进一步扩大和改善我们对竖直颗粒柱力学行为的认识。它的一个困难可能是临界状态的判断和逼近它的方法。当然与大多颗粒实验一样,这里也有如何保证样品的密度均匀、制备过程对测量结果的影响程度等问题。这些都是有待今后实验研究的内容。

静止颗粒体的许多物性对样品中的应力情况非常敏感。由于应力状态与正常粮仓有很大的差别,反粮仓中一些物理性质也会表现出相应的区别,如声波的传播行为、导电、导热、光学性质等。轻轻拍打一不是很紧密的竖直颗粒圆柱,它会出现短暂的流动性,并在重力的作用下向下蠕动,密度因此略微增加。拍打实验曾显示,正常粮仓状态的颗粒物质的密度随拍打次数大致按对数规律增加,这是颗粒物质的另一个重要和独特的性质<sup>[11,12]</sup>。由于受拍打激发产生的流动性能和向下蠕动的情况应该与颗粒物体中的应力状态有关(用土力学的习惯讲,就是与拍打前颗粒柱的固结和固结力的情况有关),如果我们用反粮仓装置作拍打实验,可能会看到不太一样的密度增加过程。另外,埋入反粮仓颗粒柱中的圆棒提升实验也有可能和文献<sup>[12,13]</sup>报道的正常粮仓结果不同。重物在颗粒物体中的沉降和穿透<sup>[14,15]</sup>也是一个与颗粒材料的固结情况、即应力分布有关的现象。通过改变颗粒材料与侧墙壁的静摩擦力,我们能得到不同应力状态的颗粒系统,从而研究应力对沉降和穿透的可能影响。这些都是很有意思的实验工作。

从理论或概念角度看首先值得检验和分析的是本文介绍的 Janssen 预测结果与测量的临界关系的符合情况,也就是(间接)考察 Janssen 假设对反粮仓系统的适用性,特别是它的水平与竖向应力比  $J$  的值是否与正常粮仓一致,是否也能较好地遵守 Jaky 经验公式。这些问题都可用颗粒弹性理论(它的一个简单综述见文献<sup>[16]</sup>)分析计算。因此反粮仓系统可从新的角度检验该理论,以及其他颗粒模型的合理性。这会有助于解决颗粒物理领域中的一些分歧。

竖直颗粒柱中应力状态的稳定情况也是一重要和有意思的问题。正常粮仓系统中颗粒与筒壁之间静摩擦力和法向压力的大小、以及它们的稳定程度一直是有关建筑工程关心的问题。工程师早就知道颗粒对筒壁的法向压力会出现异常增大的,严重偏离 Janssen 和 Jaky 预言的现象,特别是在仓库从底部卸料时很容易发生<sup>[9,10]</sup>。该现象肯定与颗粒与筒壁

间静摩擦力的状态不太稳定有关。相比之下,在反粮仓系统中这个摩擦状态完全被圆筒的重量所确定,没有任何发生改变的余地。从这点看来,反粮仓的静力状态似乎要比正常粮仓的更稳定一些。另外正、反粮仓应力状态之间的过渡过程也是一有趣的问题:如果我们小心地将一反粮仓装置的圆筒与地面或底坐用胶或螺丝连接起来,把它变成正常粮仓的话,其中颗粒的应力状态会不会,以及用什么样的方式和速度,发生变化?

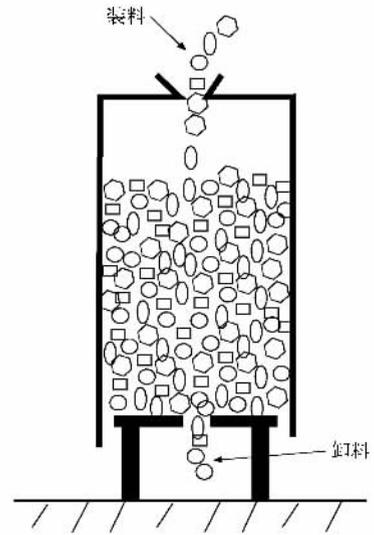


图6 反粮仓应力状态下的储物塔只要求筒壁能抵抗法向压力就够了。筒壁不需承载竖向力,可用轻型材料制造

除上述基础理论方面的意义外,研究反粮仓现象还可能有一些应用方面的意义。的确,粮食、化工、冶金、煤炭、采矿和建材等许多工业部门在存放颗粒物质时普遍使用处于正常粮仓状态下的圆筒形仓库。对比较高大的筒仓,由于颗粒重量向侧壁的转移,以及卸料时水平方向可能出现异常的超压现象,筒仓的墙壁必须有强大的抵抗竖向压力和水平压力的能力,以免发生崩溃倒塌等重大安全事故。如果我们采用如图6所示的,处于反粮仓应力状态下的筒仓设计,由于储物的重量全都压在仓底,筒壁的竖向抗压问题就不存在了。这时筒壁只需抵抗沿半径方向的、随深度线性增加的法向压力。这种结构的筒仓在卸物时可能不会出现异常的压力增大现象,从而更加安全。当然这是一个有待今后进一步研究论证的问题。

- [ 1 ] de Gennes P G 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** S374
- [ 2 ] Lu K Q , Liu J X 2004 *Physics* **33** 629 ( in Chinese ) [ 陆坤权、刘寄星 2004 物理 **33** 629 ]
- [ 3 ] Janssen H A 1895 *Z. Ver. Deutch Ing.* **39** 1045
- [ 4 ] Sperl M 2006 *Granular Matter* **8** 59
- [ 5 ] *National Standard of the People 's Republic of China*. GBJ77-85 1988 *Code for design of reinforced concrete silos*, ( Beijing :China Planning Press ) ( in Chinese ) [ 中华人民共和国国家标准 GBJ 77-85 1988 钢筋混凝土筒仓设计规范 ( 北京 :中国计划出版社 ) ]
- [ 6 ] Vanel L , Clement E 1999 *Euro. Phys. J. B* **11** 525
- [ 7 ] Vanel L , Claudin P , Bouchaud J P , Cates M E , Wittmer J P 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 1439
- [ 8 ] Brauer Kurt , Pfitzner Michael , Krimer Dmitry O , Mayer Michael , Jiang Yimin , Liu Mario 2006 *Phys. Rev. E* **74** 061311
- [ 9 ] Zhang J K , Huang W C 2000 *China Civil Engineering Journal* **33** 24 ( in Chinese ) [ 张家康、黄文萃 2000 土木工程学报 **33** 24 ]
- [ 10 ] Zeng D , Huang W B , Hua Y L 1998 *Transactions of the CSAE* **14** 44 ( in Chinese ) [ 曾 丁、黄文彬、华云龙 1998 农业工程学报 **14** 44 ]
- [ 11 ] Knight J B , Fandrich C , Lau C , Jaeger H , Nagel S 1995 *Phys. Rev. E* **51** 3957
- [ 12 ] Horvath V K , Janosi I M , Vella P J 1996 *Phys. Rev. E* **54** 2005
- [ 13 ] Hu L , Yang P , Xu T , Jiang Y , Xu H J , Long W , Yang C S , Zhang T , Lu K Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 879 ( in Chinese ) [ 胡林、杨平、徐亭、江阳、须海江、龙为、杨昌顺、张、陆坤权 2003 物理学报 **52** 879 ]
- [ 14 ] Peng Z , Hou M Y , Shi Q F , Lu K Q 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1195 ( in Chinese ) [ 彭政、厚美瑛、史庆藩、陆坤权 2007 物理学报 **56** 1195 ]
- [ 15 ] Zhang Q Y , Wu Y Y , Peng Z , Liu R , Lu K Q , Hou M Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6203 ( in Chinese ) [ 张权义、吴耀宇、彭政、刘锐、陆坤权、厚美瑛 2006 物理学报 **55** 6203 ]
- [ 16 ] Yimin Jiang , Mario Liu 2007 *Euro. Phys. J. E* **22** 255

## A silo of which the pressure on the bottom of granular matter does not go to saturation

Jiang Yi-Min<sup>1,2)†</sup> Zheng He-Peng<sup>1)</sup>

<sup>1</sup> *School of Physics Science and Technology , Central South University , Changsha 410083 , China )*

<sup>2</sup> *State Key Laboratory for Powder Metallurgy , Central South University , Changsha 410083 , China )*

( Received 23 April 2007 ; revised manuscript received 2 April 2008 )

### Abstract

As height increases a vertical granular column in a bin can transfer its weight the side wall gradually , then pressure at bottom ceases to increase with the height and reaches to saturation. However it is notable that not every granular column will stay in this stress status with saturation , known as the silo-effect. For example , when mechanical environments of the side wall are modified such that it is unable to take on the weight of granular matter , the bottom pressure will evidently increase linearly with the height. This work analyzes using the assumptions given by Janssen the behavior of this rather unusual granular column , which is in static mechanical equilibrium but does not have a stress saturation as in conventional silos.

**Keywords :** granular matter , silo , static friction , stress

**PACC :** 8270 , 4630P , 4610