

遗迹引力波对宇宙微波背景辐射极化的影响^{*}

雷中华^{1)†} 兰明建²⁾ 汪先友¹⁾ 李建杰³⁾

1) 重庆大学理论物理研究所, 重庆 400044)

2) 重庆工商大学计算机科学与信息工程学院, 重庆 400067)

3) 上海交通大学电子信息与工程学院, 上海 200240)

(2008 年 1 月 29 日收到, 2008 年 6 月 5 日收到修改稿)

根据宇宙大爆炸理论的预言, 宇宙经历了由暴涨阶段到辐射阶段到物质阶段再到如今的加速膨胀阶段. 在辐射阶段所残留的退耦的自由光子便形成了现在人们所观测到的宇宙微波背景辐射. 如果没有扰动, 微波背景辐射将是各向同性的, 但是在宇宙形成的初期存在各种各样的扰动, 因此宇宙微波背景辐射呈现各向异性. 针对由遗迹引力波对微波背景辐射极化所产生的各向异性的影响, 重点讨论电场型极化和磁场型极化.

关键词: 遗迹引力波, 微波背景辐射, 极化各向异性

PACC: 9870V, 9880, 9880B

1. 引 言

按照暴涨模型理论, 宇宙在大爆炸后应该有一急剧膨胀的暴涨期, 这种暴涨形成的引力波可以一直延续到现在, 即所谓的遗迹引力波. 另一方面, 宇宙在大爆炸后大约 50 万年, 才开始形成电磁微波背景, 这种背景同样可以延续到现在, 而且已得到了实验的证实^[3]. 因此, 在宇宙演化到今天的相当漫长的时间内, 遗迹引力波和电磁微波背景一直同时存在, 因而它们之间的相互作用将是不可避免的. 这种相互作用对微波背景的影响及其物理效应一直都是人们关注的课题.

由于残余引力波的存在将会在宇宙的辐射阶段对背景光子产生极化影响, 使光子发生偏振, 因此辐射光子会呈现各向异性. 当光子退耦后, 这些影响将一直保留, 所以现在所观测到的宇宙微波背景辐射(CMB)应该是各向异性的. 本文将重点讨论遗迹引力波对微波背景辐射光子极化所产生的各向异性的效应.

2. 描述微波背景辐射的参数——Stokes 参量

由于微波背景辐射为光子辐射, 因此可以用描

述极化光的 Stokes 参量来描述. 不妨考虑一束沿 z 方向传播的平面单色波, 其角频率为 ω_0 , 则光波的电场矢量可以写为^[1]

$$\begin{aligned} E_x &= a_x(t) \cos[\omega_0 t - \theta_x(t)], \\ E_y &= a_y(t) \cos[\omega_0 t - \theta_y(t)], \end{aligned} \quad (1)$$

其中 a_x, a_y 是光的振幅, θ_x, θ_y 是相位角. Stokes 参量定义为^[4]

$$I = a_x^2 + a_y^2, \quad (2a)$$

$$Q = a_x^2 - a_y^2, \quad (2b)$$

$$U = 2a_x a_y \cos(\theta_x - \theta_y), \quad (2c)$$

$$V = 2a_x a_y \sin(\theta_x - \theta_y), \quad (2d)$$

其中, 参数 I 代表辐射强度, 为恒正. 其他三个参数被定义为光波的极化态, 对于自然光或者是无极化光, $Q = U = V = 0$; 对于 Stokes 参量, 前面三个参数用于描述线形极化, 而参数 V 则可以用来描述圆形极化.

3. 微波背景辐射极化各向异性

为了更好的描述 CMB 极化的各向异性, 通常用一个 2×2 的对称张量 P_{ab} 来描述^[2], 即

$$P_{ab} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Q & -U \\ -U & -Q \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (3)$$

^{*} 973 计划项目(批准号 2003CB71603), 国家自然科学基金(批准号: 10575140), 重庆市自然科学基金(批准号: 3562)和中国工程物理研究院基金(批准号 2008T0401, 2008T0402)资助的课题.

[†] E-mail: kyokusana@ yahoo.com.cn

这里, 选用二维球极坐标系 (θ, φ) , 度规为

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}. \quad (4)$$

通常情况下 P_{ab} 可以展开为如下形式^[2, 13]:

$$P_{ab} = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [a_{lm}^G Y_{(lm)ab}^G(\hat{\mathbf{n}}) + a_{lm}^C Y_{(lm)ab}^C(\hat{\mathbf{n}})], \quad (5)$$

其中

$$Y_{(lm)ab}^G = N_l \left(Y_{(lm);ab} - \frac{1}{2} g_{ab} Y_{(lm);c}^c \right), \quad (6a)$$

$$Y_{(lm)ab}^C = \frac{N_l}{2} \left(Y_{(lm);ab} \epsilon_b^c + \frac{1}{2} Y_{(lm);bc} \epsilon_a^c \right), \quad (6b)$$

这里“;”代表协变微商, $N_l =$

$\sqrt{\chi(l-2)!(l+2)!}$; 由(5)式可以看出可以分解

为两部分的和, 即电场型极化和磁场型极化, 分别用 G 和 C 来表示. 因而 CMB 的极化存在着两种模式, 即电场型极化和磁场型极化. 通常, 电场型极化由密度扰动或引力波所造成, 其分布呈现为一标量的梯度^[3], 是无旋的, 故也称为标量型极化; 而磁场型极化则只由引力波所造成, 呈现为蜗旋状, 故也称为张量型极化. 为了定义电场型极化和磁场型极化, 可以类比经典电动力学里电场和磁场的定义. 众所周知, 在经典电动力学里, 任意一矢量可表示为一标量函数的梯度与矢量函数的旋度之和, 即

$$\mathbf{P} = \nabla\varphi + \nabla \times \mathbf{A}, \quad (7)$$

即电场部分和磁场部分之和, 为了分离出电场部分, 只需对 \mathbf{P} 取散度, 由于 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$, 所以 $\nabla \cdot \mathbf{P}$ 即为电场部分; 同理, 对 \mathbf{P} 取旋度, 由于 $\nabla \times (\nabla\varphi) = 0$, 所以 $\nabla \times \mathbf{P}$ 即为磁场部分. 由此可以定义 CMB 电场型极化和磁场型极化为

$$E(\hat{\mathbf{n}}) = [2P_{ab} - g_{ab}(\theta, \varphi)P_c^c(\theta, \varphi)]^{;ab}, \quad (8a)$$

$$B(\hat{\mathbf{n}}) = \epsilon_a^d [2P_{ab} - g_{ab}(\theta, \varphi)P_c^c(\theta, \varphi)]^{;bd} \quad (8b)$$

这里 $\epsilon_a^b = g^{;ab} \epsilon_{ab}$, 而 $\epsilon_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & \sin\theta \\ -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$ 为二阶反

对称张量. 由于 $P_c^c(\theta, \varphi) = 0$, 于是(8a)(8b)式可以简化为

$$E(\hat{\mathbf{n}}) = 2P_{;ab}^{;ab}, \quad (9a)$$

$$B(\hat{\mathbf{n}}) = 2\epsilon_a^d P_{;ab}^{;bd}. \quad (9b)$$

又 $P_{;ab}^{;ab} = (P_{;ab};g^{;ab})_{;c}g^{;cb}$; 利用 $g^{;jk} = 0$ 可以得到 $P_{;ab}^{;ab} = P_{;ab}^{;ab}$, 于是

$$E(\hat{\mathbf{n}}) = 2P_{;ab}^{;ab}, \quad (10a)$$

$$B(\hat{\mathbf{n}}) = 2\epsilon_a^d P_{;ab}^{;bd}. \quad (10b)$$

由(10a)和(10b)式可知, 电场型极化和磁场型极化

恰好可表示为极化张量的散度形式和旋度形式. 由广义相对论中张量的协变微商和散度公式

$$A^{;\nu}_{;k} = A^{;\nu}_{;k} + \Gamma_{\lambda k}^{\nu} A^{\lambda\nu} + \Gamma_{\mu k}^{\nu} A^{\mu\lambda}, \quad (11)$$

$$\nabla_{\nu} A^{\nu\omega} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (\sqrt{g} A^{\nu\omega}) + \Gamma_{\lambda\nu}^{\omega} A^{\lambda\nu}, \quad (12)$$

并利用联络的公式

$$\Gamma_{\nu\omega}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\omega}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\omega}} - \frac{\partial g_{\nu\omega}}{\partial x^{\lambda}} \right), \quad (13)$$

可求出全部联络项 $\Gamma_{\nu\omega}^{\alpha}$ 为

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -\sin\theta \cos\theta, \quad (14a)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \cot\theta, \quad (14b)$$

其余联络项均为零. 利用(11)(12)(13a)和(13b)式可以得到

$$P_{;ab}^{;ab} = P_{;11}^{11} + 2P_{;12}^{12} + P_{;22}^{22} - \sin\theta \cos\theta P_{;1}^{22} + 2\cot\theta P_{;1}^{11} + 4\cot\theta P_{;2}^{12} + (1 - 3\cos^2\theta)P^{22} - P^{11}, \quad (15a)$$

$$\epsilon_a^d P_{;bd}^{;ab} = \sin\theta (P_{;11}^{12} + P_{;21}^{22}) - \csc\theta (P_{;11}^{11} + P_{;12}^{12}) - \cot\theta \csc\theta P_{;2}^{12} + 5\cos\theta P_{;1}^{12} + 3(\cos\theta \cot\theta - \sin\theta)P^{12}, \quad (15b)$$

容易证明

$$P^{11} = P_{11}, \quad (16a)$$

$$P^{12} = \frac{P_{12}}{\sin^2\theta}, \quad (16b)$$

$$P^{22} = -\frac{P_{11}}{\sin^2\theta}; \quad (16c)$$

且由于 P_{11} 和 P_{12} 可展开为

$$P_{11} = \sum_{lm} \frac{1}{2} N_l \left[a_{lm}^G \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \cot\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right) - a_{lm}^C \frac{2im}{\sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta \right) \right] Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}), \quad (17a)$$

$$P_{12} = \sum_{lm} \frac{1}{2} N_l \left[a_{lm}^G \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \cot\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right) + a_{lm}^C \frac{2im}{\sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta \right) \right] Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}) \sin\theta. \quad (17b)$$

由(15a)(15b)(16a)(16b)(16c)(17a)和(17b)式并化简可以得到电场型极化和磁场型极化的球谐函数展开式为

$$E(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{lm} \sqrt{2(l-1)l(l+1)(l+2)} a_{lm}^G Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}), \quad (18a)$$

$$B(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{lm} \sqrt{2(l-1)l(l+1)(l+2)} a_{lm}^C Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}). \quad (18b)$$

为了描述电场型极化和磁场型极化的统计特性,即电场型极化和磁场型极化的全天空分布,需要引入

两点间的关联函数,按照其定义^[2,4]可以得到电场型极化和磁场型极化的任意两点间的关联函数为

$$\begin{aligned}
 C^E(\theta) &= E(\hat{\mathbf{n}}_1) E(\hat{\mathbf{n}}_2) \hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 = \cos\theta \\
 &= \sum_{lm} \sum_{l'm'} \sqrt{2(l-1)l(l+1)(l+2)} \sqrt{2(l'-1)l'(l'+1)(l'+2)} a_{lm}^G a_{l'm'}^G Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}_1) Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{n}}_2) \\
 &= \sum_{lm} \sum_{l'm'} \sqrt{4(l-1)l(l+1)(l+2)(l'-1)l'(l'+1)(l'+2)} a_{lm}^G a_{l'm'}^G Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}_1) Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{n}}_2), \\
 C^B(\theta) &= B(\hat{\mathbf{n}}_1) B(\hat{\mathbf{n}}_2) \hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 = \cos\theta \\
 &= \sum_{lm} \sum_{l'm'} \sqrt{4(l-1)l(l+1)(l+2)(l'-1)l'(l'+1)(l'+2)} a_{lm}^C a_{l'm'}^C Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}_1) Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{n}}_2).
 \end{aligned}$$

利用关系式^[1,4]

$$a_{lm}^G a_{l'm'}^G = C_{El} \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (19a)$$

$$a_{lm}^C a_{l'm'}^C = C_{Bl} \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (19b)$$

将(19a)和(19b)式代入以上两式得

$$\begin{aligned}
 C^E(\theta) &= E(\hat{\mathbf{n}}_1) E(\hat{\mathbf{n}}_2) \hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 = \cos\theta \\
 &= 2 \sum_{lm} (l-1)l(l+1)(l+2) \\
 &\quad \times C_{El} Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{n}}_1) Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}_2),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C^B(\theta) &= B(\hat{\mathbf{n}}_1) B(\hat{\mathbf{n}}_2) \hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 = \cos\theta \\
 &= 2 \sum_{lm} (l-1)l(l+1)(l+2) \\
 &\quad \times C_{Bl} Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{n}}_1) Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}_2).
 \end{aligned}$$

又由于 $P_l(\cos\theta) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{n}}_1) Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}_2)$ 可得

$$\begin{aligned}
 C^E(\theta) &= E(\hat{\mathbf{n}}_1) E(\hat{\mathbf{n}}_2) \hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 = \cos\theta \\
 &= \sum_l \frac{8\pi(l-1)l(l+1)(l+2)}{2l+1} C_{El} P_l(\cos\theta), \quad (20a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C^B(\theta) &= B(\hat{\mathbf{n}}_1) B(\hat{\mathbf{n}}_2) \hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 = \cos\theta \\
 &= \sum_l \frac{8\pi(l-1)l(l+1)(l+2)}{2l+1} C_{Bl} P_l(\cos\theta), \quad (20b)
 \end{aligned}$$

即 $C^E(\theta)$ 和 $C^B(\theta)$ 分别用于描述宇宙微波背景辐射的电场型极化和磁场型极化在全天空的分布函数.

4. 遗迹引力波对宇宙微波背景辐射极化的影响

现在来考虑由于遗迹引力波的存在对微波背景

辐射极化所产生的影响.在(20a)和(20b)所求出的电场型极化和磁场型极化的表达式中,所出现的 C_{El} 和 C_{Bl} 分别为电场型极化或磁场型极化对每个具体 l 值的极化功率谱.它们的表达式为^[5]

$$C_{El} = 4\pi^2 \int k^2 dk P_h(k) [\Delta_{El}(k)]^2, \quad (21a)$$

$$C_{Bl} = 4\pi^2 \int k^2 dk P_h(k) [\Delta_{Bl}(k)]^2, \quad (21b)$$

其中, $P_h(k)$ 为遗迹引力波的功率谱,而 $\Delta_{El}(k)$ 和 $\Delta_{Bl}(k)$ 为扰动项,其表达式为

$$\begin{aligned}
 \Delta_{El}(k) &= \int_0^{\eta_0} d\eta S_p(k, \eta) \left[-j_l(x) \right. \\
 &\quad \left. + j_l'' + \frac{2j_l(x)}{x^2} + \frac{4j_l'(x)}{x} \right], \quad (22a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_{Bl}(k) &= \int_0^{\eta_0} d\eta S_p(k, \eta) \left[2j_l(x) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4j_l'(x)}{x} \right]. \quad (22b)
 \end{aligned}$$

以上两式中 $S_p(k, \eta) = -g\Psi$ 其中 $g = \dot{\kappa} e^{-\kappa} \dot{\kappa}$ 表示 Thomson 散射的微分光深函数,其中,微分是对共形时间 η 的微分; $x = k(\eta_0 - \eta)$,

$$\begin{aligned}
 \Psi &= \frac{1}{10} \Delta_{70} + \frac{1}{7} \Delta_{72} + \frac{1}{70} \Delta_{74} \\
 &\quad - \frac{3}{5} \Delta_{p0} + \frac{6}{7} \Delta_{p2} - \frac{3}{70} \Delta_{p4}.
 \end{aligned}$$

对于(21a)和(21b)可知电场型和磁场型的极化功率谱受到遗迹引力波的功率谱 $P_h(k)$ 的影响,本文取遗迹引力波的度规形式为 FRW 度规,在弱场线性近似可表示为^[6]

$$ds^2 = a^2(\eta) [-d\eta^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j] \quad (23)$$

其中 h_{ij} 代表扰动项,由于引力波有两种极化模式,即 \oplus 极化和 \otimes 极化.因此 h_{ij} 可以分解为这两种模式的和,即

$$h_{ij} = h^{\oplus}(\eta, \boldsymbol{x})\varepsilon_{ij}^{\oplus}(\boldsymbol{x}) + h^{\otimes}(\eta, \boldsymbol{x})\varepsilon_{ij}^{\otimes}(\boldsymbol{x}), \quad (24)$$

其中 $\varepsilon_{ij}^{\oplus}$ 和 $\varepsilon_{ij}^{\otimes}$ 为极化张量, 分别为

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^{\oplus} &= e_i^1 e_j^1 - e_i^2 e_j^2, \\ \varepsilon_{ij}^{\otimes} &= e_i^1 e_j^2 + e_i^2 e_j^1. \end{aligned} \quad (25)$$

将 $h^{(\lambda)}(\eta, \boldsymbol{x})$ 分解为傅利叶模式为

$$h^{(\lambda)}(\eta, \boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3 \boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} \hat{h}^{(\lambda)}(\boldsymbol{k}, \eta) e^{i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}}, \quad (26)$$

其中 $\lambda = \oplus, \otimes$; $\hat{h}^{(\lambda)}(\boldsymbol{k}, \eta)$ 表示振幅. 那么遗迹引力波功率谱可以表示为

$$P_h(k) = \sum_{\lambda=\oplus, \otimes} h^{*(\lambda)}(\boldsymbol{k}, \eta) h^{(\lambda)}(\boldsymbol{k}, \eta). \quad (27)$$

本文取 h^{\otimes} 和 h^{\oplus} 相等, 并令 $h^{\otimes} = h^{\oplus} = h(k, \eta)$, 则遗迹引力波的功率谱又可表示为

$$P_h(k) = 2h^2(k, \eta), \quad (28)$$

而 $h^{(\lambda)}(\boldsymbol{k}, \eta)$ 满足如下正交关系:

$$\begin{aligned} h^{*(\lambda)}(\boldsymbol{k}, \eta) h^{(\lambda')}(\boldsymbol{k}', \eta) \\ = \frac{P_h(k)}{2} \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}') \delta_{\lambda\lambda}'. \end{aligned} \quad (29)$$

由(28)式可知, 遗迹引力波的功率谱强弱由引力波振幅大小所决定, 而^[7, 8]

$$h(k, \eta) = \frac{\mu(k, \eta)}{\alpha(\eta)}, \quad (30)$$

其中 $\alpha(\eta)$ 为宇宙学标度因子, 反映了宇宙的膨胀; 而 $\mu(k, \eta)$ 满足如下微分方程^[8]:

$$\mu''(k, \eta) + \left[k^2 - \frac{\alpha''(\eta)}{\alpha(\eta)} \right] \mu(k, \eta) = 0. \quad (31)$$

由于在宇宙演化的各个阶段, 其 $\alpha(\eta)$ 的表述形式并不相同, 即 $\alpha(\eta)$ 在宇宙演化的各个阶段变化规律是不一样的, 因而方程(31)所解得的 $\mu(k, \eta)$ 在宇宙的各个演化阶段的表述形式也不相同, 由此所决定的遗迹引力波的振幅 $h(k, \eta)$ 和功率谱 $P_h(k)$ 在宇宙演化的各个阶段的表述形式也是不同的, 同时还可以看出 $P_h(k)$ 还应该是共形时间 η 的函数. 因此, 遗迹引力波对微波背景辐射极化的影响可以表现为由于引力波功率谱随时间的变化对微波背景辐射极化所产生的时间积累效应. 但是(21a)式和(21b)式并没有考虑引力波功率谱所带来的时间积累效应, 因此需要对(21a)和(21b)式所定义的微波背景辐射极化功率谱进行修改, 必须加入引力波功率谱的时间积累效应. 由(21a)和(22a)式可知

$$C_{\text{El}} = 4\pi^2 \int k^2 dk P_h(k) \left| \int_0^{\eta_0} d\eta S_p(k, \eta) \right.$$

$$\left. \times \left[-j_l(x) + j_l'' + \frac{2j_l(x)}{x^2} + \frac{4j_l'(x)}{x} \right] \right|^2, \quad (32)$$

再由(28)式代入(32)式可得

$$\begin{aligned} C_{\text{El}} &= 8\pi^2 \int k^2 dk h^2(k) \left| \int_0^{\eta_0} d\eta S_p(k, \eta) \right. \\ &\quad \left. \times \left[-j_l(x) + j_l'' + \frac{2j_l(x)}{x^2} + \frac{4j_l'(x)}{x} \right] \right|^2 \\ &= 8\pi^2 \int k^2 dk \left| h(k, \eta) \int_0^{\eta_0} d\eta S_p(k, \eta) \right. \\ &\quad \left. \times \left[-j_l(x) + j_l'' + \frac{2j_l(x)}{x^2} + \frac{4j_l'(x)}{x} \right] \right|^2. \end{aligned} \quad (33)$$

现在需要考虑引力波功率谱的时间积累效应, 为此(33)式可作如下修改: 将 $h(k, \eta)$ 提到 $\int_0^{\eta_0}$ 积分号以内, 和积分号内的部分一起进行对 η 积分, 这就考虑到了时间的累积效应, 于是(33)式变成如下积分:

$$\begin{aligned} 8\pi^2 \int k^2 dk \left| \int_0^{\eta_0} d\eta h(k, \eta) S_p(k, \eta) \right. \\ \left. \times \left[-j_l(x) + j_l'' + \frac{2j_l(x)}{x^2} + \frac{4j_l'(x)}{x} \right] \right|^2. \end{aligned} \quad (34)$$

由于

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{El}}(k) &= \int_0^{\eta_0} d\eta S_p(k, \eta) \\ &\quad \times \left[-j_l(x) + j_l'' + \frac{2j_l(x)}{x^2} + \frac{4j_l'(x)}{x} \right], \end{aligned}$$

那么(34)式可转换为

$$8\pi^2 \int k^2 dk \left| \int_0^{\eta_0} h(k, \eta) d\Delta_{\text{El}}(k) \right|^2, \quad (35)$$

再利用分步积分法可得

$$\begin{aligned} 8\pi^2 \int k^2 dk \left| \int_0^{\eta_0} h(k, \eta) d\Delta_{\text{El}}(k) \right|^2 \\ = 8\pi^2 \int k^2 dk \left| h(k, \eta) \Delta_{\text{El}}(k) \right|_0^{\eta_0} \\ - \int_0^{\eta_0} \Delta_{\text{El}}(k) dh(k, \eta) \right|^2. \end{aligned} \quad (36)$$

又因为

$$\begin{aligned} h(k, \eta) \Delta_{\text{El}}(k) \Big|_0^{\eta_0} &= h(k, \eta_0) \Delta_{\text{El}}(k, \eta_0) \\ &\quad - h(k, 0) \Delta_{\text{El}}(k, 0), \end{aligned}$$

且

$$\Delta_{\text{El}}(k, 0) = 0,$$

于是

$$h(k, \eta) \Delta_{\text{El}}(k) \Big|_0^{\eta_0} = h(k, \eta_0) \Delta_{\text{El}}(k, \eta_0). \quad (37)$$

将(37)式代入(36)式可得

$$\begin{aligned}
& 8\pi^2 \int k^2 dk \left| \int_0^{\eta_0} h(k, \eta) \Delta_{El}(k) dk \right|^2 \\
&= 8\pi^2 \int k^2 dk \left[h(k, \eta_0) \Delta_{El}(k, \eta_0) \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{\eta_0} \Delta_{El}(k, \eta) dh(k, \eta) \right]^2 \\
&= 8\pi^2 \int k^2 dk \left[h^2(k, \eta_0) \Delta_{El}^2(k, \eta_0) \right. \\
&\quad \left. - 2h(k, \eta_0) \Delta_{El}(k, \eta_0) \int_0^{\eta_0} \Delta_{El}(k, \eta) dh(k, \eta) \right. \\
&\quad \left. + \left| \int_0^{\eta_0} \Delta_{El}(k, \eta) dh(k, \eta) \right|^2 \right] \\
&= 8\pi^2 \int k^2 dk \left[h^2(k) \Delta_{El}^2(k) \right. \\
&\quad \left. - 2h(k) \Delta_{El}(k) \int_0^{\eta_0} \Delta_{El}(k, \eta) dh(k, \eta) \right. \\
&\quad \left. + \left| \int_0^{\eta_0} \Delta_{El}(k, \eta) dh(k, \eta) \right|^2 \right],
\end{aligned}$$

于是以上积分可以表现为三部分的积分之和,即

$$8\pi^2 \int k^2 dk h^2(k) \Delta_{El}^2(k),$$

$$8\pi^2 \int k^2 dk 2h(k) \Delta_{El}(k) \int_0^{\eta_0} \Delta_{El}(k, \eta) dh(k, \eta)$$

以及

$$8\pi^2 \int k^2 dk \left| \int_0^{\eta_0} \Delta_{El}(k, \eta) dh(k, \eta) \right|^2.$$

而第一项恰好为参考文献[5]中所定义的极化功率谱 C_{El} , 而第三项则为考虑了遗迹引力波随宇宙演化而带来的对 CMB 极化的积累效应. 为此令

$$\Delta_{El,h}(k) = \int_0^{\eta_0} \Delta_{El}(k, \eta) dh(k, \eta), \quad (38)$$

且定义遗迹引力波对 CMB 极化的积累效应而产生的功率谱为

$$C_{El,h} = 8\pi^2 \int k^2 dk \Delta_{El,h}^2(k), \quad (39)$$

于是可以重新定义 CMB 电场型极化功率谱 C_{El}^* 为

$$C_{El}^* = C_{El} + C_{El,h} - 2 \int k^2 dk h(k) \Delta_{El}(k) \Delta_{El,h}(k). \quad (40a)$$

同理可以定义 CMB 磁场型极化功率谱 C_{Bl}^* 为

$$C_{Bl}^* = C_{Bl} + C_{Bl,h} - 2 \int k^2 dk h(k) \Delta_{Bl}(k) \Delta_{Bl,h}(k), \quad (40b)$$

其中

$$C_{Bl} = 4\pi^2 \int k^2 dk P_h(k) [\Delta_{Bl}(k)]^2,$$

$$C_{Bl,h} = 8\pi^2 \int k^2 dk \Delta_{Bl,h}^2(k), \quad (41)$$

$$\Delta_{Bl}(k) = \int_0^{\eta_0} d\eta S_p(k, \eta) \left[2j_l(x) + \frac{4j_l'(x)}{x} \right],$$

$$\Delta_{Bl,h}(k) = \int_0^{\eta_0} \Delta_{Bl}(k, \eta) dh(k, \eta). \quad (42)$$

将(40a)(40b)式分别代入(20a)(20b)式中即可求得全天空电场型极化和磁场型极化的分布关联函数为

$$\begin{aligned}
C^E(\theta) &= \sum_l \frac{8\pi(l-1)l(l+1)(l+2)}{2l+1} C_{El}^* P_l(\cos\theta) \\
&= \sum_l \frac{8\pi(l-1)l(l+1)(l+2)}{2l+1} P_l(\cos\theta) \\
&\quad \times \left[C_{El} + C_{El,h} - 2 \int k^2 dk h(k) \Delta_{El}(k) \Delta_{El,h}(k) \right], \quad (43a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C^B(\theta) &= \sum_l \frac{8\pi(l-1)l(l+1)(l+2)}{2l+1} C_{Bl}^* P_l(\cos\theta) \\
&= \sum_l \frac{8\pi(l-1)l(l+1)(l+2)}{2l+1} P_l(\cos\theta) \\
&\quad \times \left[C_{Bl} + C_{Bl,h} - 2 \int k^2 dk h(k) \Delta_{Bl}(k) \Delta_{Bl,h}(k) \right]. \quad (43b)
\end{aligned}$$

由于宇宙演化大致可分为五个阶段,即暴涨阶段,再加热阶段,辐射阶段,物质阶段以及到今天的加速膨胀阶段. 由于暴涨阶段和再加热阶段出现在辐射光子发生 Thomson 散射以前,因此这两个阶段对微波背景辐射的影响为零,对微波背景辐射产生影响的应该为后三个阶段,将这三个阶段的宇宙标度因子 $a(\eta)$ 和 $\mu(k, \eta)$ 分别代入到(43a)和(43b)式,同时对共形时间 η 的积分上下限取为各阶段的起止时刻,即

$\eta_1 \rightarrow \eta_2$ 为辐射阶段(R: Radiation-dominant stage),

$\eta_2 \rightarrow \eta_3$ 为物质阶段(M: Matter-dominant stage);

$\eta_3 \rightarrow \eta_4$ 为加速阶段到现在(A: Accelerating stage).

就可得到各个阶段遗迹引力波对 CMB 极化影响的关联函数所产生净效应: $C_{R}^E(\theta), C_{M}^E(\theta), C_{A}^E(\theta)$ 和 $C_{R}^B(\theta), C_{M}^B(\theta), C_{A}^B(\theta)$. 那么现在所观测到的遗迹引力波对 CMB 极化的影响应该是这三个阶段所产生的净效应的叠加,即

$$C_{\text{Now}}^E(\theta) = C_R^E(\theta) + C_M^E(\theta) + C_A^E(\theta), \quad (44a)$$

$$C_{\text{Now}}^B(\theta) = C_R^B(\theta) + C_M^B(\theta) + C_A^B(\theta). \quad (44b)$$

至于宇宙各阶段 $a(\eta)$, $\mu(k, \eta)$ 和 $h(k, \eta)$ 的具体

表达式可详见参考文献 [9—12].

5. 对 CMB 的实验探测

对 CMB 温度异向性和极化的观测是一个进展十分快速的领域,其现况可用两个灵敏度最高的实验总结:WMAP 与 ACBAR. 美国太空总署的 Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) 是一具装载有 20—90GHz 微波共相放大器 (coherent amplifiers) 接收机的人造卫星,于 2001 年 6 月发射. 该卫星于同年 10 月抵达地-日的第二 Lagrange 点,

开始进行观测. Arcminute Cosmology Bolometer Array Receiver (ACBAR) 利用极为灵敏的毫米波温度计 (millimeter-wave bolometers) 作为侦测器,在 150GHz 的波段以位于南极的 Viper 望远镜进行 CMB 异向性的观测. 由于望远镜的口径大 (2m), 观测频率高, 因此 ACBAR 的解析度远胜于 WMAP. WMAP 的解析度和灵敏度都比 COBE 高出很多, 因此它能够测量功率谱至 $l = 650$ 左右, 而 ACBAR 目前在 $800 < l < 3000$ 范围的 CMB 测量最为灵敏^[14]. ACBAR 在结果发表之后至今又累积了两年的数据, 预计将会再度大幅改进中高 l 的 CMB 功率谱量测.

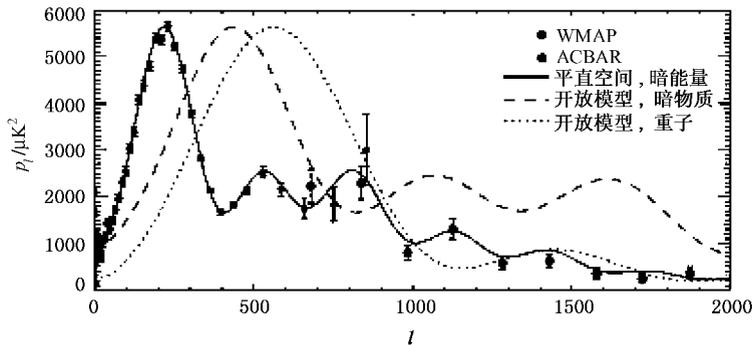


图 1 CMB 功率谱的理论实验的比较

至于宇宙遗迹引力波扰动所造成的 B-mode 极化, 更是实验学家积极探求的目标. 因此, CMB 磁场型极化的精确测量是非常重要的实验领域, 特别是探测 B-mode 极化的方法是实验物理学家所面临的挑战. 此外, 由于 B-mode 极化级量实在太小, 仪器本身的多种极化效果都要小心列入考虑. 仪器偏振效果、侦测器发展策略等等考量可在参考文献 [15] 中找到.

6. 结 论

本文主要分析了遗迹引力波对宇宙微波背景辐射的电场型极化和磁场型极化所产生的影响, 由以

上分析可以知道由于遗迹引力波受到宇宙学标度因子 $\alpha(\eta)$ 的影响而产生了对 CMB 极化的影响, 因而可以认为是由于宇宙的膨胀效应对 CMB 极化的影响, 且不同的 η 所产生的计划影响是不一样的, 由此可以通过探测来自宇宙深处的 CMB 极化来获得宇宙早期的信息, 因而对宇宙学的研究有重要意义. 同时, 由于 CMB 的磁场型极化只能有引力波产生, 因而探测 CMB 的磁场型极化有重要价值, 若能探测到磁场型极化, 则是对引力波的一个极大的验证. 同时, 由暴涨宇宙学模型理论所导出的相关引力模型对探测 CMB 磁场型极化的实验也有较大的指导意义, 对 CMB 磁场型极化探测的实验有积极的推动作用.

[1] Riazuelo A, Uzan J P 2000 *Phys. Rev. D* **62** 083506.

[2] Kamionkowski M, Kosowsky A 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2058

[3] Caldwell R R., Kamionkowski M, Wadley L 1998 *Phys. Rev. D* **59** 027101

[4] Kosowsky A arXiv:astro-ph/9501045

[5] Zaldarriaga M, Seljak U 1997 *Phys. Rev. D* **55** 1830

[6] Zhang Y, Hao H, Zhao W 2005 *AcASh* **46** (in Chinese) 张 扬、郝 衢、赵 文 2005 天文学报 **46** 1

[7] Izquierdo G, Pavon D 2003 *Phys. Rev. D* **68** 124005

[8] Giovannini M 1998 *Phys. Rev. D* **58** 083504

[9] Izquierdo G, Pavon D 2004 *Phys. Rev. D* **70** 127505

[10] Izquierdo G, Pavon D 2003 *Phys. Rev. D* **68** 124005

- [11] Miao H X , Zhang Y 2007 *Phys. Rev. D* **75** 104009
 [12] Izquierdo G , Pavon D 2004 *Phys. Rev. D* **70** 084034
 [13] Kamionkowski M , Kosowsky A 1998 *Phys. Rev. D* **57** 658
 [14] Kuo C L , Ade P A R , Bock J J , Cantalupo C , Daub M D , Goldstein J , Holzapfel W L , Lange A E , Lueker M , Newcomb M , Peterson J B , Ruhl J , Runyan M C , Torbet E 2004 *Astrophys. J.* **600** 32 153L ,
 [15] Bock J , Church S , Devlin M , Hinshaw G , Lange A , Lee A , Page L , Pavtvidge B , Ruhl J , Tegmark M , Timbie P , Weiss R , Winstein B , Zaldarringa M , arxiv :astro-ph/060401

Influence in polarization of cosmic microwave background radiation due to relic gravitational waves^{*}

Lei Zhong-Hua^{1)†} Lan Ming-Jian²⁾ Wang Xian-You¹⁾ Li Jian-Jie³⁾

¹ *Institute of Theoretical Physics , Chongqing University , Chongqing 400044 ,China)*

² *College of Computer Science and Information Engineering , Chongqing Technology and Business University , Chongqing 400067 ,China)*

³ *School of Electronic , Information and Electrical Engineering , Shanghai Jiaotong University , Shanghai 200240 ,China)*

(Received 29 January 2008 ; revised manuscript received 5 June 2008)

Abstract

According to the prediction of the theory of Big Bang , the universe has gone through from the phase of inflation to the phase of radiation and to the phase of matter at last to the phase of acceleration expansion now . In the radiation phase , the rudimental free photons of decoupling become the Cosmologic Microwave Background Radiation which we observe by now . If there is not any perturbation , the CMB radiation will be isotropy , but in the earlier era of the universe , there exist all kinds of the perturbations , which caused the anisotropy the Cosmic Microwave Background radiation . This research will emphatic depict the influence of the relic gravitational wave for the Cosmic Microwave Background radiation in anisotropy of polarization , especially in *E*-mode and *B*-mode polarization .

Keywords : relic gravitational waves , CMB radiation , anisotropy of polarization

PACC : 9870V , 9880 , 9880B

^{*} Project supported by the National Basic Research Program of China(Grant No. 2003CB71603) , the National Natural Science Foundation of China(Grant No. 10575140) , the Foundation of China Academy of Engineering Physics , and the National Science Foundation of Chongqing(Grant No. 8562) , and the Foundation of China Academy of Engineering Physics(Grant Nos. 2008T0401 , 2008T0402) .

[†] E-mail : kyokusana@ yahoo . com . cn