

抛物线性限制势二能级系统量子点 量子比特的温度效应^{*}

陈英杰^{1)†} 肖景林²⁾

1) 曲阜师范大学物理工程学院, 曲阜 273165)

2) 内蒙古民族大学物理与机电学院, 通辽 028043)

(2008 年 1 月 20 日收到, 2008 年 4 月 4 日收到修改稿)

应用 Pekar 变分方法, 在抛物量子点中电子与体纵光学声子强耦合条件下, 得出了电子的基态和第一激发态的本征能量及基态和第一激发态的本征波函数. 以量子点中这样的二能级体系作为一个量子比特. 当电子处于基态和第一激发态的叠加态时, 计算出电子在时空中作周期性振荡的概率分布, 并且得出了概率分布随温度及耦合强度的变化关系.

关键词: 量子点, 量子比特, 温度效应

PACC: 0367, 7138

1. 引 言

20 世纪人们将量子理论应用于物质科学和能源科学, 开拓出诸如半导体、激光、核技术等重要高新技术, 造就了人类文明社会半个世纪的繁荣昌盛. 21 世纪, 一门新兴的交叉学科——量子信息科学应运而生, 它是量子力学与信息科学相互融合的结果. 在过去几年里, 对不同物理系统用做量子信息载体, 人们进行了诸多的理论和实验研究^[1-5]. 由于各种物理系统应用于量子信息各有利弊, 人们目前正在寻找更理想更可靠的量子信息载体. 为了显示量子计算机的优越性, 量子计算机必须由数千个量子比特组成, 而目前实验室中最多也只是做到了 16 位量子比特量子逻辑门的操作演示. 要想将量子比特集成大规模, 显然采用固态量子比特体系是最可行的方案. 半导体自组织生长量子点由于其近乎完美的晶体结构受到人们的重视, 因此利用半导体量子点来实现量子比特是固态量子信息领域最热门的研究方向之一. 对量子点方案的研究工作很多, 内容也很丰富. Loss 等人^[6,7]研究了利用耦合单量子点的自旋态实现 QC 的方案. Harju 等人^[8]研究了磁场下双电

子量子点分子(即耦合的两个单电子量子点)的总自旋随磁场强度和量子点间距离变化的位相图, 从物理上证明了这种双电子量子点分子有可能被用来实现一个量子计算的基本单元——量子比特. 尽管这样, 目前的研究还只是停留在基础研究阶段. 任何物理系统构成的量子比特, 实验都是在有限温度下进行的, 热效应会引起系统的退相干^[9,10], 破坏系统的纠缠, 因此构造量子比特必须把温度的效应考虑进去. 而目前对量子点量子比特的温度效应的研究还甚为少见. 本文在抛物量子点中电子与体纵光学声子强耦合条件下得出了电子的基态和第一激发态的本征能量及基态和第一激发态的本征波函数. 量子点中这样的二能级体系可作为一个量子比特. 对于这样的量子比特, Li 等人^[11,12]提出了一个参数相图方案, 定义了单量子点能作为量子比特的参数使用范围. Wang 等^[13]曾研究了这种系统中的光学声子效应. 文中得出了电子处于基态和第一激发态的叠加时, 电子的概率分布在时空中的演化, 分别讨论了概率密度在不同时刻与温度的关系, 概率密度与耦合强度的关系. 本文的结果在理论和实验上都有一定的指导意义.

^{*} 国家自然科学基金(批准号:10747002)资助的课题.

[†] E-mail: sdchenyingjie@126.com

2. 理论模型

电子在一个方向(设为 Z 方向)比另外两个方向受限强得多, 所以只考虑电子在 X - Y 平面上的运动. 假设单一量子点中电子束缚势为抛物势

$$V(\rho) = \frac{1}{2} m^* \omega_0^2 \rho^2, \quad (1)$$

其中 m^* 为电子带质量, ρ 为二维坐标, ω_0 为量子点的受限强度. 电子-声子体系的哈密顿量为

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla_\rho^2 + \frac{1}{2} m^* \omega_0^2 \rho^2 + \sum_q \hbar \omega_{10} b_q^\dagger b_q + \sum_q (V_q e^{iq \cdot r} + \text{h.c.}), \quad (2)$$

其中 ω_{10} 为体纵光学声子的频率, b_q^\dagger (b_q) 为波矢为 q 的体纵光学声子的产生(湮没)算符. $r = (\rho, z)$ 为电子坐标, 且

$$V_q = \left(i \frac{\hbar \omega_{10}}{q} \right) \left(\frac{\hbar}{2m^* \omega_{10}} \right)^{1/4} \left(\frac{4\pi\alpha}{V} \right)^{1/2}, \quad (3)$$

$$\alpha = \left(\frac{e^2}{2\hbar \omega_{10}} \right) \left(\frac{2m^* \omega_{10}}{\hbar} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\epsilon_\infty} - \frac{1}{\epsilon_0} \right). \quad (4)$$

对哈密顿量(2)进行 LLP 变换

$$U = \exp \left[\sum_q (f_q b_q^\dagger - f_q^* b_q) \right], \quad (5)$$

其中 f_q 为变分函数, 则

$$H' = U^{-1} H U. \quad (6)$$

2.1. 电子-声子二能级系统

在高斯函数近似下, 依据 Pekar 类型的变分方法, 电子-声子体系的基态、第一激发态的尝试波函数可分别选为

$$|\varphi_{e-p}\rangle = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda^2 \rho^2}{2}\right) |\xi(z)\rangle |0_{\text{ph}}\rangle, \quad (7)$$

$$|\varphi_{e-p}'\rangle = \frac{\lambda^2}{\sqrt{\pi}} \rho \exp\left(-\frac{\lambda^2 \rho^2}{2}\right) \times \exp(\pm i\phi) |\xi(z)\rangle |0_{\text{ph}}\rangle, \quad (8)$$

其中 λ 是变分参量. 因为电子在 Z 方向强受限, 可将其看成只在无限薄的狭层内运动, 所以

$$|\xi(z)\rangle |\xi(z)\rangle = \delta(z),$$

$|0_{\text{ph}}\rangle$ 为无微扰零声子态, 满足 $b_q |0_{\text{ph}}\rangle = 0$, 且

$$\begin{aligned} \varphi_{e-p} |\varphi_{e-p}'\rangle &= 0, \\ \langle \varphi_{e-p}' | \varphi_{e-p} \rangle &= 1. \end{aligned}$$

采用通常的极化单位($\hbar = 2m^* = \omega_{10} = 1$), 则束缚极化子的基态、第一激发态的本征能量分别为

$$\begin{aligned} E_0 &= \langle \varphi_{e-p} | H' | \varphi_{e-p} \rangle \\ &= \lambda_0^2 + \frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{2} (2\pi)^{1/2} \alpha \lambda_0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} E_1 &= \langle \varphi_{e-p}' | H' | \varphi_{e-p}' \rangle \\ &= 2\lambda_0^2 + \frac{2}{\lambda_0^2} - \frac{11}{32} (2\pi)^{1/2} \alpha \lambda_0. \end{aligned} \quad (10)$$

用变分法得出 λ_0 的值, 即可得出本征能级和相应的本征波函数. 这样我们得到了一个量子比特所需要的二能级体系.

2.2. 电子的概率密度

当电子处于这样一个叠加态时

$$|\psi_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle), \quad (11)$$

其中

$$|0\rangle = \varphi_0(\rho) = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\lambda_0^2 \rho^2}{2}\right), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} |1\rangle &= \varphi_1(\rho) = \frac{\lambda_0^2}{\sqrt{\pi}} \rho \\ &\times \exp\left(-\frac{\lambda_0^2 \rho^2}{2}\right) \exp(\pm i\phi), \end{aligned} \quad (13)$$

则叠加态随时间的演化可以表示为

$$\begin{aligned} \psi_{01} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_0(\rho) \exp\left(-\frac{iE_0 t}{\hbar}\right) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_1(\rho) \exp\left(-\frac{iE_1 t}{\hbar}\right), \end{aligned} \quad (14)$$

电子在空间的概率密度

$$\begin{aligned} Q(\rho, t) &= |\psi_{01}(t, \rho)|^2 \\ &= \frac{1}{2} [|\varphi_0(\rho)|^2 + |\varphi_1(\rho)|^2 \\ &+ \varphi_0^*(\rho) \varphi_1(\rho) \exp(i\omega_{01} t) \\ &+ \varphi_0(\rho) \varphi_1^*(\rho) \exp(-i\omega_{01} t)] \end{aligned} \quad (15)$$

其中

$$\omega_{01} = \frac{(E_1 - E_0)}{\hbar}, \quad (16)$$

量子点中电子周围光学声子平均数(叠加态)为

$$\begin{aligned} N_q &= \langle \psi_{01} | U^{-1} \sum_q b_q^\dagger b_q U | \psi_{01} \rangle \\ &= \frac{27}{64} (2\pi)^{1/2} \alpha \lambda_0. \end{aligned} \quad (17)$$

2.3. 温度效应

在有限温度下, 电子-声子系不再完全处于基态, 晶格振动不但激发实声子, 同时也使得电子受到

激发极化子的性质是电子-声子系对各种状态的统计平均,根据量子统计学声子数的统计平均值为

$$\bar{N}_q = \left[\exp\left(\frac{\hbar\omega_{10}}{k_B T}\right) - 1 \right]^{-1}, \quad (18)$$

其中 k_B 是玻尔兹曼常数.由(17)式可以看出 λ_0 不仅与 N_q 有关,而且还必须与方程(18)式自洽.所以概率密度 Q 与 N_q, T 都有关系.

3. 计算结果与讨论

为了更清楚的说明抛物量子点二能级系统量子比特中电子的概率密度在时空中的演化,概率密度

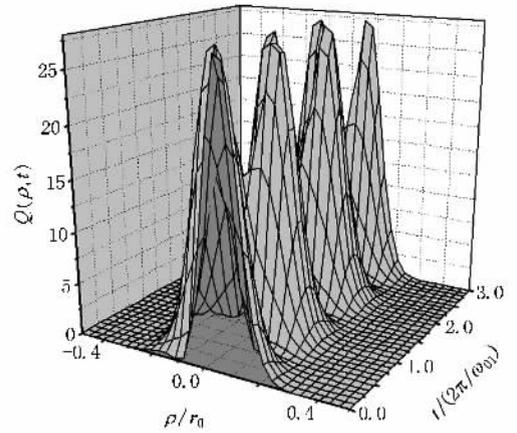


图1 电子的概率密度在时空中的演化

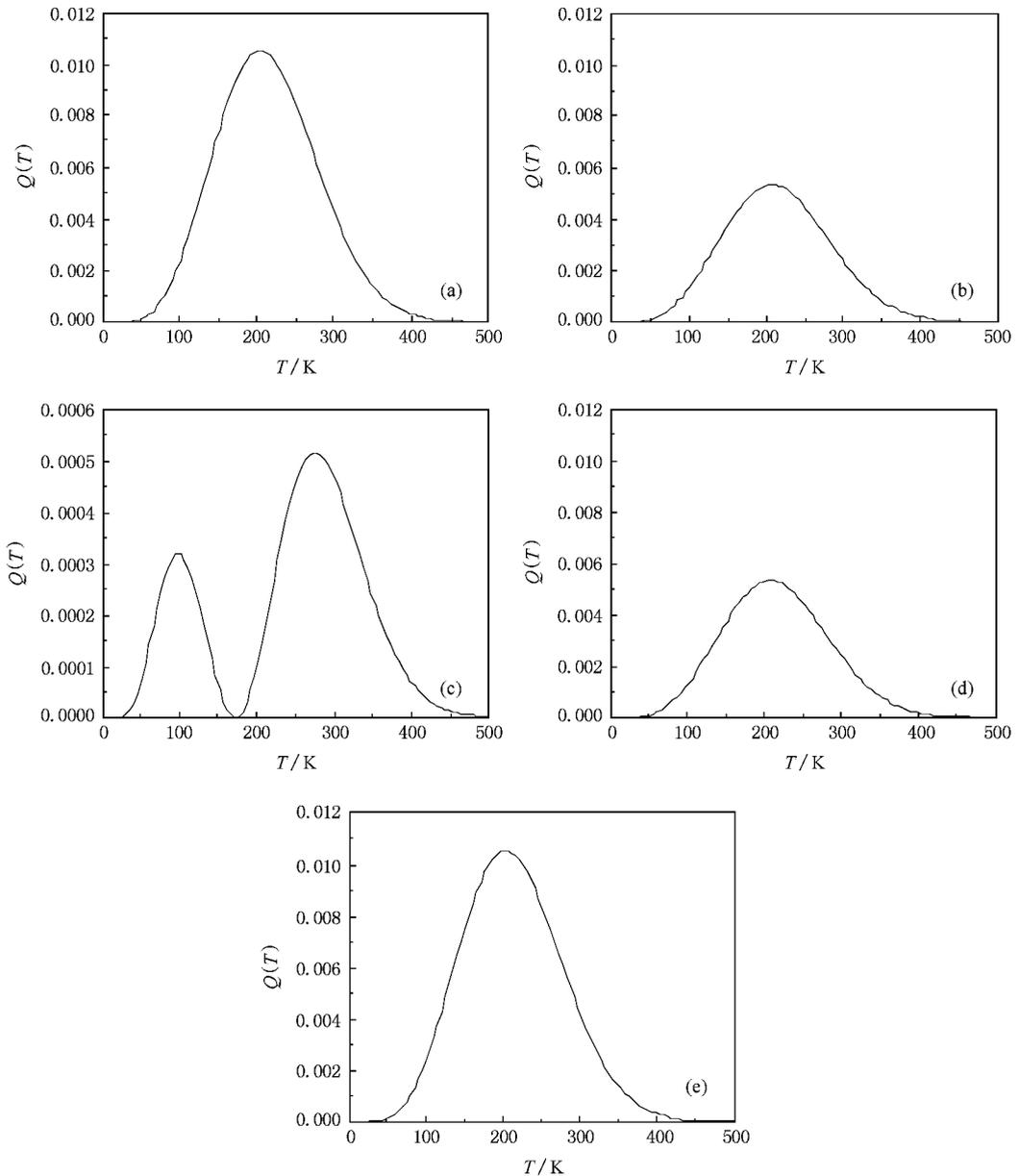


图2 电子的概率密度在不同时刻与温度的变化关系

在不同时刻与温度的关系以及它与耦合强度的关系,我们进行了数值计算,数值结果示于图 1—3 中.

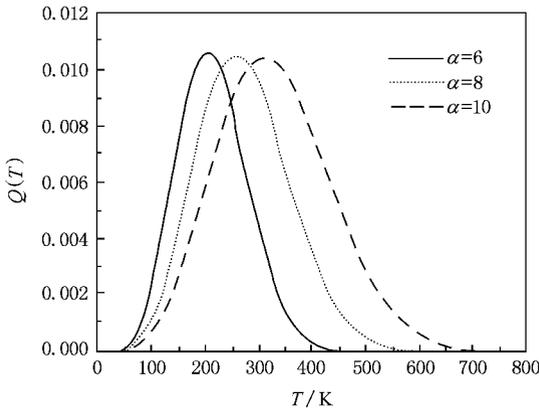


图 3 电子的概率密度与耦合强度的变化关系

图 1 描绘了在耦合强度 $\alpha = 6$, 受限长度 $l_0 = 0.5$, 位相差 $\Phi = 2\pi$, 电子处于叠加态 $|\psi_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ 时, 概率密度 $Q(\rho, t) = |\psi_{01}(t, \rho)|^2$ 在时空中的演化, 其中 r_0 为玻尔半径. 图 1 说明概率密度在空间中随时间以一定的周期振荡. 理论计算表明该周期为 $T_0 = \frac{h}{E_1 - E_0}$.

图 2 描绘了在耦合强度 $\alpha = 6$, 空间坐标 $\rho = 5$, 位相差 $\Phi = 2\pi$ 时, 电子的概率密度在不同时刻随温度的变化关系. 电子的概率密度以 $T_0 = \frac{h}{E_1 - E_0}$ 为周期, 在图 2(a)(b)(c)(d)(e) 中时间 t 分别取 $0T_0, 0.25T_0, 0.5T_0, 0.75T_0, 1T_0$. 由图可见概率密度在较低温度时随温度升高而增加, 在较高温度时随温度升高而减小, 且在某些时刻会出现起伏(如图 2(c)). 这是由于随着温度升高, 电子、声子的热运动速度均增加, 电子会与更多的声子作用, 而在温度较

低时, 电子速度增加使其在叠加态出现概率增加的贡献较强, 电子与更多声子相互作用破坏叠加态的程度较弱, 因此电子在该叠加态上的概率密度分布增加, 当温度较高时, 电子与更多声子相互作用破坏叠加态的程度增强, 因此该叠加态的概率密度分布减小. 在电子的概率密度比较小的时刻, 电子概率密度分布对温度影响的反应比较敏锐(如图 2(c)).

图 3 描绘了概率密度随耦合强度的变化关系. 从图中可以看出, 在不同的耦合强度下概率密度在较低温度时随温度升高而增加, 较高温度时随温度升高而减小的变化趋势不变, 只是随着耦合强度的增加, 这种变化的变化幅度减小. 这是因为随着耦合强度增加, 由于激发态的电子-声子耦合的强度比基态的电子-声子耦合的强度弱^[14, 15], 使第一激发态和基态间的能级差增加, 电子在能级间的跃迁概率减小, 因此概率密度随温度的这种变化幅度减小.

4. 结 论

本文采用 Pekar 变分方法, 得出了电子与体纵光学声子强耦合时抛物线性限制势量子点中电子的基态和第一激发态的本征能量及其本征波函数, 用这样的二能级系统构造了一个量子比特. 当电子处于基态和第一激发态的叠加态时, 电子的概率密度在时空中作周期性振荡. 得出了概率密度在较低温度时随温度增加而增加, 在较高温度时随温度增加而减小, 在某些时刻, 这种变化会出现起伏. 并且发现当耦合强度增加时, 概率密度随温度增加而增加或减小的趋势不变, 但其幅度会减小. 这表明利用二能级系统构造量子比特时不仅要考虑温度对量子态消相干的影响, 还应考虑温度对电子概率密度的影响, 因此可以通过控制温度来得到最适合要求的二能级系统.

- [1] Shih Y H, Sergienko A V, Rubin M H, Kiess T E, Alley C O 1994 *Phys. Rev. A* **50** 23
- [2] Enzer D G, Schauter M M, Gomez J J, Gulley M S, Holzscheiter M H, Kwiat P G, Lamoreaux S K, Peterson C G, Sandberg V D, Tupa D, White A G, Hughes R J 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2466
- [3] Han S, Yu Y, Chu X, Chu S I, Wang Z 2001 *Science* **293** 1455
- [4] Brown K R, Lidar D A, Whaley K B 2002 *Phys. Rev. A* **65** 012307-1
- [5] Mewes C, Fleischhauer M 2002 *Phys. Rev. A* **66** 033820-1

- [6] Loss D, DiVincenzo D P 1998 *Phys. Rev. A* **57** 120
- [7] Burkard G, Loss D, DiVincenzo D P 1999 *Phys. Rev. B* **59** 2070
- [8] Harju A, Siljamäki S, Nieminen R M 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 226804
- [9] Li C Z, Huang M Q, Chen P X 2000 *Quantum communication and quantum computing* (Changsha: National University of Defence Technology Press) (in Chinese) [李承祖, 黄明珠, 陈平彤 2000 量子通信和量子计算(长沙:国防科技大学出版社)]
- [10] Xiang S H, Song K H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 529 (in Chinese)

- [向少华、宋克慧 2006 物理学报 **55** 529]
- [11] Li S S ,Xia J B ,Yang F H ,Niu Z C ,Feng S L ,Zheng H Z 2001 *J. Appl. Phys.* **90** 6151
- [12] Li S S ,Long G L ,Bai F S ,Feng S L ,Zhang H Z 2001 *Pro. Natl. Acad. Sci. USA* **98** 11847
- [13] Wang Z W ,Xiao J L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 678 (in Chinese)
- [王子武、肖景林 2007 物理学报 **56** 678]
- [14] Yildirim T ,Ercelebi A 1999 *J. Phys. Condensed Matter* **3** 1271
- [15] Chen S H ,Xiao J L 2005 *Chin. J. Lumin.* **26** 27 (in Chinese)
- [陈时华、肖景林 2005 发光学报 **26** 27]

The temperature effect of the parabolic linear bound potential quantum dot qubit *

Chen Ying-Jie^{1)†} Xiao Jing-Lin²⁾

1) *College of Physics and Engineering , Qufu Normal University , Qufu 273165 ,China)*

2) *Department of Physics and Electromechanics , Inner Mongolia National University ,Tongliao 028043 ,China)*

(Received 20 January 2008 ; revised manuscript received 4 April 2008)

Abstract

On the condition of electric-LO phonon strong coupling in parabolic quantum dot ,we obtain the eigenenergy and the eigenfunctions of the ground state and the first-excited state by using variational method of Pekar type. This system in quantum dot may be employed as a two-level quantum system-qubit. When the electron is in the superposition state of the ground state and the first-excited state ,we obtain the space-time evolution of the electron density. It is shown that the electron density increases with the temperature when the temperature is lower ,and the electron density decreases with the temperature when the temperature is higher. At the same time ,we found that sometimes the electron density vibrates with the temperature ,and its change is slowed down with the strength of coupling increasing.

Keywords : quantum dot , qubit , temperature effect

PACC : 0367 , 7138

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10747002).

† E-mail :sdchenyingjie@126. com