

无标度网络中最大传染能力限定的 病毒传播问题研究^{*}

裴伟东^{1)†} 刘忠信¹⁾ 陈增强¹⁾ 袁著祉¹⁾

1) 南开大学自动化系, 天津 300071)

2) 天津师范大学计算机与信息工程学院, 天津 300387)

(2008 年 1 月 3 日收到, 2008 年 5 月 27 日收到修改稿)

传统的病毒传播模型在无限大无标度网络上不存在病毒传播阈值, 即无论病毒的传播速率多么低, 病毒始终能够在网络中传播. 但研究发现, 这个结论是在网络中存在超级传染者的假设下得到的, 然而许多真实的无标度网络中并不存在超级传染者. 因此, 文章提出了一个最大传染能力限定的病毒传播模型, 并从理论上证明了在最大传染能力限定的无限大无标度网络上, 病毒传播阈值是存在的. 同时, 也分析了最大传染能力限定下非零传播阈值与有限规模网络下非零传播阈值的本质区别, 并解释了为什么人们总是认为传统病毒传播模型对许多真实网络病毒感染程度估计过高的原因.

关键词: 无标度网络, 最大传染能力, 传播阈值, 感染程度

PACC: 0520, 0565, 0570J

1. 引 言

随着复杂网络理论研究的兴起, 病毒传播已成为当前复杂网络研究中的一个热点问题. 病毒在计算机网络上的传播, 传染病在人群中的流行, 信息、谣言甚至灾害在社会中的蔓延等都表现为复杂网络上的病毒传播^[1-3]. 为控制病毒的传播, 研究其传播规律, 人们已经提出了各种各样的病毒传播模型, 但目前研究最彻底、也最被广泛应用的病毒传播模型仍然是 SIR (susceptible-infected-removed) 模型和 SIS (susceptible-infected-susceptible) 模型. Moreno, Pastor-Satorras 和 Vespignani 在文献 [4] 和 [5] 中分别详细分析了 SIR 模型和 SIS 模型在无标度网络中的传播过程, 并导出了重要的阈值结论: 无论病毒的传播速率多么低, 病毒始终能够在无限大无标度网络中传播. 但在他们的推导过程中我们发现, 上述结论都是在网络中存在超级传染者的假设下得到的, 而许多真实的无标度网络中并不存在超级传染者, 例如, 性传播情况就是如此, 一个人在单位时间内导致病毒传

染的次数不可能无限大. 再如, 无线通讯广播网和无线通讯的传感网络中单个传感器受其能量的限制, 单位时间内转发信息包的总能力也是有限的. 如果限定网络中每个个体的最大传播能力, 上述阈值结论是否还成立? 病毒对网络的感染程度会发生哪些变化?

目前, 国内外关于复杂网络上最大传染能力限定的病毒传播问题的研究还不是很多. 国内研究小组如 Li 等人从小世界网络的角度给出了一些传播动力学的定量分析^[2,3]. 他们通过对网络中康复个体所制定的几种康复策略分析了具有康复延迟响应的 SIR 模型, 得出了不适当的康复强度可能不会抑制病毒在网络中传播等重要结论. 傅新楚等人提出了一个具有最大传染能力限定的 SIS 模型^[6], 他们通过分析该模型在无标度网络中的传播过程, 发现了与 Pastor-Satorras 和 Vespignani 关于阈值理论的一个不同结论: 在最大传染能力限定的条件下, SIS 模型在无限大无标度网络中病毒的传播阈值是存在的; 关于病毒传播模型其他方面较新研究内容的进展情况, 还可以见文献 [7-11].

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 60774088), 教育新世纪人才支持计划(批准号: NCET 2005-229), 教育部科学技术重点项目(批准号: 107024), 天津市市应用基础及前沿技术研究计划项目(批准号: 08JCZDJC21900)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: paulpeiart@mail.nankai.edu.cn; paulpei2008@163.com

本文正是在上述研究的基础上,在最大传染能力限定的条件下,对 SIS 模型以及 SIR 模型在无标度网络中关于病毒的传播阈值、病毒对网络的感染程度等问题进行了进一步理论研究和数据仿真.

2. SIR, SIS 模型传播阈值的推导过程及问题

在 SIR 模型中,网络中的每个节点都处于三种状态之一:易感染状态,简称 S 态,处于这种状态的节点不会感染其他节点,但有可能被其他节点感染;感染状态,简称 I 态,处于这种状态的节点已经感染病毒且具有传染性;删除状态,简称 R 态,处于该种状态的节点是被治愈并具有了免疫能力的节点,他们不具有传染性,也不会再次被传染.因此, SIR 模型的传播规则为在任何时刻 t ,若 S 态节点与 I 态节点之间有边连接的话,则 S 态节点将以概率 λ 变为 I 态节点(λ 称为病毒传播速率),而 I 态节点以概率 α (不失一般性, α 常取为 1)变为 R 态节点.若用 $s_k(t)$, $i_k(t)$ 和 $r_k(t)$ 分别表示病毒传播过程中 t 时刻处于 S, I 和 R 态 k 度节点的密度,则 SIR 模型在无标度网络中的传播过程可用如下微分方程组来表示:

$$\frac{ds_k(t)}{dt} = -\lambda ks_k(t)\alpha(t), \quad (1)$$

$$\frac{di_k(t)}{dt} = -\alpha(t) + \lambda ks_k(t)\alpha(t), \quad (2)$$

$$\frac{dr_k(t)}{dt} = i_k(t), \quad (3)$$

$$s_k(t) + i_k(t) + r_k(t) = 1, \quad (4)$$

其中 $\alpha(t)$ 为 t 时刻任何一条边指向一个感染节点的概率. $\alpha(t)$ 的计算方法是由于任何一条边指向一个 k 度节点的概率为 $kP(k)$, 其中 $P(k)$ 为网络中度的分布函数(即度为 k 的概率为 $P(k)$), 因此, $\alpha(t)$ 的计算公式为

$$\alpha(t) = \frac{\sum_k kP(k)i_k(t)}{\sum_s sP(s)} = \frac{\sum_k kP(k)i_k(t)}{k}, \quad (5)$$

其中 k 是网络的平均度(公式中忽略了网络的度相关性). 设病毒传播初始时刻网络中 I 态节点的密度是均匀分布的,且只有少数节点为 I 态节点,即 $i_k(0) = \alpha(0) \approx 0$, 其中 $\alpha(0)$ 是初始时刻 I 态节点的密度,则病毒传播的初始条件为

$$i_k(0) \approx 0, s_k(0) \approx 1, r_k(0) \approx 0. \quad (6)$$

由方程(1)–(6),经过一系列推导可得病毒在网络中的传播阈值为

$$\lambda_c = \frac{\sum_k kP(k)}{\sum_k k^2 P(k)} = \frac{k}{k^2}. \quad (7)$$

SIS 模型与 SIR 模型类似,只是 I 态节点被治愈后自动恢复为 S 态.因此, SIS 模型的传播规则为在任何时刻 t ,若 S 态节点与 I 态节点之间有边连接的话,则 S 态节点将以概率 λ 变为 I 态节点,而 I 态节点以概率 α (同上, α 值也常取为 1)变为 S 态节点.若用 $s_k(t)$ 和 $i_k(t)$ 分别表示病毒传播过程中 t 时刻处于 S 和 I 态 k 度节点的密度,则 SIS 模型在无标度网络上的传播过程可用如下微分方程组来表示:

$$\frac{di_k(t)}{dt} = -i_k(t) + \lambda[1 - i_k(t)]\alpha(t), \quad (8)$$

$$s_k(t) + i_k(t) = 1, \quad (9)$$

其中 $\alpha(t)$ 的计算公式与(5)式相同.由(5)(8)和(9)式经过一系列推导,可以得到与(7)式完全相同的传播阈值,即 SIS 模型与 SIR 模型在无标度网络中的病毒传播阈值均由(7)式所给出.

由于无标度网络的度分布函数 $P(k)$ 满足

$$P(k) = Ck^{-r}, \quad (10)$$

其中 C 为归一化常数.将(10)代入(7)式,并将(7)式写成连续形式,则当网络无限大时,有

$$\lambda_c = \frac{k}{k^2} = \frac{\int_m^\infty k^{-r+1} dk}{\int_m^\infty k^{-r+2} dk}, \quad (11)$$

其中 m 为网络中节点的最小度.当幂律指数 r 满足 $2 < r \leq 3$ 时,由(11)式容易求得 $\lambda_c = 0$.可见,对于无限大的无标度网络而言, SIR 模型与 SIS 模型的病毒传播阈值 λ_c 均为零,也就是说,无论病毒的传播速率 λ 多么小,只要网络足够大时,病毒始终能够在网络中传播.

然而,导致传播阈值 $\lambda_c = 0$ 的主要原因在于(5)

$$\text{式中 } \alpha(t) \text{ 的计算公式. 在 } \alpha(t) = \frac{\sum_k kP(k)i_k(t)}{k}$$

中, $ki_k(t)$ 表示 k 度 I 态节点所发出的总边数,从(1)(2)和(8)式中可以发现, S 态节点变为 I 态节点的速率均与 $\alpha(t)$ 成正比,从而也就与 $ki_k(t)$ 成正比,也就是说,度为 k 的 I 态节点的传染能力与 k 成正比.而在无限大的无标度网络中,存在着度为无限大的节点,因而这样的节点就具备了无限大的传染

能力,人们通常也称这种节点为超级传染者。

傅新楚等人对 $\theta(t)$ 的计算公式进行了修正^[6],

变为 $\theta(t) = \frac{\sum_k \varphi(k) p(k) i_k(t)}{k}$, 使得任意一条边

指向一个 I 态节点的概率发生了改变,从而间接地使 S 态节点变为 I 态节点的概率从原来的与节点的度 k 成正比变成了与 k 的某种函数 $\varphi(k)$ 成正比,他们对 $\varphi(k)$ 的取法做了详细地讨论,归纳起来就是

取 $\varphi(k) = \min\left\{\frac{ak^\beta}{1+bk^\beta}, A\right\}$, 其中 k 是网络中某节

点的度, a, b, β 为调节参数,且 $a > 0, b \geq 0, 0 \leq \beta \leq 1$, 而参数 A 定义为任意节点的最大传染能力。他们导出了传播阈值 λ_c 与上述各参数之间的关系表达式,并给出了 $\lambda_c > 0$ 时上述参数所满足的条件。他们的思想具有相当的创新性,但仍留有许多值得继续研究的问题,例如, $\varphi(k)$ 中参数众多,一方面可以使节点的度与节点的传染能力之间的关系考虑得更为详细,另一方面也使得关于传播阈值的表达式过于复杂;其次,他们只对 SIS 模型的传播阈值问题进行了讨论,而关于该模型对网络的感染程度还没有做进一步的讨论;此外,在最大传染能力受限的情况下, SIR 模型的传播阈值会发生什么变化?该模型对网络的感染程度会发生什么变化?本文将针对这些问题给出进一步的研究。

3. 最大传染能力限定的 SIR 模型与 SIS 模型

在 SIR 模型和 SIS 模型的传播过程中,由于我们只需将原来的“网络中存在超级传染者”变为“网络中每个传染者的传染能力都是有限的”,因此,描述 SIR 模型传播过程的微分方程(1)~(4)和描述 SIS 模型传播过程的微分方程(8)~(9)在形式上并没有什么变化,只需将各式中所用 $\theta(t)$ 的计算公式进行修改。在 SIR 模型和 SIS 模型中,我们均将(5)式所给定的 $\theta(t)$ 的计算公式修改如下:

$$\theta(t) = \frac{\sum_k \min\{k, A\} p(k) i_k(t)}{k}, \quad (12)$$

其中 k 表示任意节点的度, A 表示任意节点的最大传染能力, $\min\{k, A\}$ 表示:当某节点的度 k 小于等于 A 时,该节点的传染能力与 k 成正比,否则该节点的传染能力与 A 成正比, $p(k)$ 为网络的度分布函数, $i_k(t)$ 为 t 时刻度为 k 的 I 态节点的密度, $k =$

$\sum_k k p(k)$ 为网络的平均度。

3.1. SIR 模型传播阈值的推导

由(1)~(6)两式可得

$$\begin{aligned} s_k(t) &= s_k(0) e^{-\lambda \int_0^t \theta(\tau) d\tau} \\ &\approx e^{-\lambda \int_0^t \theta(\tau) d\tau} = e^{-\lambda \theta(t)}, \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \int_0^t \theta(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{k} \sum_k \min\{k, A\} p(k) \int_0^t i_k(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

由(3)~(6)式可得 $r_k(t) = \int_0^t i_k(\tau) d\tau$, 将其代入(14)式得

$$\theta(t) = \frac{1}{k} \sum_k \min\{k, A\} p(k) r_k(t). \quad (15)$$

(15)式两端对 t 求导,并利用(3)~(4)及(15)式本身可得

$$\begin{aligned} \frac{d\theta(t)}{dt} &= -\theta(t) + \frac{1}{k} \sum_k \min\{k, A\} p(k) \\ &\quad - \sum_k \min\{k, A\} p(k) s_k(t). \end{aligned} \quad (16)$$

当病毒传播过程结束时,即 $t \rightarrow \infty$ 时,因为(15)式中 $r_k(t)$ 不再变化,因此 $\frac{d\theta(t)}{dt} = 0$, 从而(16)式变为

$$\begin{aligned} \theta(\infty) &= \frac{1}{k} \sum_k \min\{k, A\} p(k) \\ &\quad - \frac{1}{k} \sum_k \min\{k, A\} p(k) s_k(\infty). \end{aligned}$$

再由(13)式得

$$\begin{aligned} \theta(\infty) &= \frac{1}{k} \sum_k \min\{k, A\} p(k) \\ &\quad - \frac{1}{k} \sum_k \min\{k, A\} p(k) e^{-\lambda \theta(\infty)}. \end{aligned} \quad (17)$$

由(17)式可知, $\theta(\infty) = 0$ 总是该方程的一个解,而当 $\theta(\infty) = 0$ 时,从(15)式可知,对所有的 k , 均有 $r_k(\infty) = 0$, 这表明病毒传播过程结束时,不存在 R 态节点,说明病毒不曾在网络中传播。要使病毒在网络中传播,必须满足 $\theta(\infty) > 0$ 。

由麦克劳林展开公式

$$e^{-\lambda \theta(\infty)} = 1 - \lambda k \theta(\infty) + \frac{e^{-\xi}}{2} \lambda^2 k^2 \theta^2(\infty),$$

其中 $0 < \xi < \lambda k \theta(\infty)$, 将其代入(17)式,并经过化简得

$$\theta(\infty) = \left[\frac{\lambda}{k} \sum_k \min\{k, A\} k p(k) \right] \theta(\infty)$$

$$- \frac{\lambda^2 \phi^2(\infty) e^{-\xi}}{2k} \sum_k \min\{k, A\} k^2 p(k),$$

从而有

$$\phi(\infty) > \left[\frac{\lambda}{k} \sum_k \min\{k, A\} k p(k) \right] \phi(\infty),$$

因为 $\phi(\infty) > 0$, 所以

$$\lambda > \frac{k}{\sum_k \min\{k, A\} k p(k)},$$

因此病毒的传播阈值为

$$\begin{aligned} \lambda_c &= \frac{k}{\sum_k \min\{k, A\} k p(k)} \\ &= \frac{\sum_k k p(k)}{\sum_k \min\{k, A\} k p(k)}. \end{aligned} \quad (18)$$

(18) 式的连续形式为

$$\begin{aligned} \lambda_c &= \frac{\int_m^\infty k p(k) dk}{\int_m^\infty \min\{k, A\} k p(k) dk} \\ &= \frac{\int_m^\infty k p(k) dk}{\int_m^A k^2 p(k) dk + A \int_A^\infty k p(k) dk}, \end{aligned} \quad (19)$$

其中 m 为网络的最小度, 任意节点的最大传染能力 $A \geq m$, 所考虑的网络为无限大网络. 由于无标度网络的度分布函数 $p(k)$ 满足(10)式, 将(10)式代入(19)式可得

$$\lambda_c = \frac{\int_m^\infty k^{-r+1} dk}{\int_m^A k^{-r+2} dk + A \int_A^\infty k^{-r+1} dk}. \quad (20)$$

而当 $p(k)$ 的幂律指数满足 $2 < r < 3$ 时, 由(20)式容易算得

$$\lambda_c = \frac{3-r}{m \left[\left(\frac{A}{m} \right)^{3-r} - (r-2) \right]}. \quad (21)$$

当 $r=3$ 时, 由(20)式可得

$$\lambda_c = \frac{1}{m \left(1 + \ln \frac{A}{m} \right)}. \quad (22)$$

从(21)和(22)式可以看出, 当网络中任意节点的最大传染能力 $A (A \geq m)$ 限定时, SIR 模型在幂律指数满足 $2 < r \leq 3$ 的无标度网络中的传播阈值 λ_c 是存在的 (即 λ_c 是一个正的常数), λ_c 只与网络的最小度 m 及最大传染能力 A 有关系, 而与网络的大小并没有关系; 只有当 $A \rightarrow \infty$ 时, 才有传播阈值 $\lambda_c = 0$,

此时的结果才与文献 [4] 中的推导结果是一致的.

3.2. SIS 模型传播阈值的推导

在 SIS 模型中, 当病毒传播达到稳定状态时, 即 $t \rightarrow \infty$ 时, 由于 $i_k(t)$ 不再变化, 因此 $\frac{di_k(t)}{dt} = 0$, 由

(8) 式得

$$i_k(\infty) = \frac{\lambda k \theta(\infty)}{1 + \lambda k \theta(\infty)}.$$

将上式代入(12)式得

$$\begin{aligned} \theta(\infty) &= \frac{1}{k} \sum_k \min\{k, A\} p(k) \\ &\quad \times \frac{\lambda k \theta(\infty)}{1 + \lambda k \theta(\infty)}. \end{aligned} \quad (23)$$

由(23)式可知, $\theta(\infty) = 0$ 总是该方程的一个解, 而当 $\theta(\infty) = 0$ 时, 由(12)式知, 对所有的 k , 均有 $i_k(\infty) = 0$, 这表明当病毒传播达到稳定状态时, 不存在 I 态节点, 说明病毒不曾在网络中传播. 要使病毒在网络中传播, 必须满足 $\theta(\infty) > 0$.

先将(23)式变形为

$$\begin{aligned} \theta(\infty) &= \frac{1}{k} \sum_k \min\{k, A\} p(k) \\ &\quad \times \left[1 + \frac{1}{1 + \lambda k \theta(\infty)} \right], \end{aligned}$$

再由麦克劳林展开公式

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \lambda k \theta(\infty)} &= 1 - \lambda k \theta(\infty) \\ &\quad + \frac{1}{(1 + \xi)^2} \lambda^2 k^2 \theta^2(\infty), \end{aligned}$$

其中 $0 < \xi < \lambda k \theta(\infty)$, 将其代入(23)式, 并经过化简得

$$\begin{aligned} \theta(\infty) &= \left[\frac{\lambda}{k} \sum_k \min\{k, A\} k p(k) \right] \theta(\infty) \\ &\quad - \frac{\lambda^2 \theta^2(\infty)}{k (1 + \xi)^2} \sum_k \min\{k, A\} k^2 p(k), \end{aligned}$$

从而有

$$\theta(\infty) > \left[\frac{\lambda}{k} \sum_k \min\{k, A\} k p(k) \right] \theta(\infty),$$

因为 $\theta(\infty) > 0$, 所以

$$\lambda > \frac{k}{\sum_k \min\{k, A\} k p(k)},$$

因此病毒的传播阈值为

$$\lambda_c = \frac{k}{\sum_k \min\{k, A\} k p(k)}$$

$$= \frac{\sum_k k p(k)}{\sum_k \min\{k, A\} p(k)} \quad (24)$$

比较(24)式和(18)式可知,这两个式子是完全相同的,因此,SIS模型与SIR模型具有完全相同的传播阈值,后面的推导过程与3.1节中的推导过程完全相同,这里不再重复.综上,在幂律指数满足 $2 < r \leq 3$ 的无标度网络中,SIS模型的传播阈值也分别由(21)和(22)式所确定.

3.3. 最大传染能力限时非零传播阈值与有限网络非零传播阈值的区别

以上推导了最大传染能力受限时SIR模型和SIS模型在无限大无标度网络中病毒传播阈值的表达式(21)和(22)式,从这两式可以看出,当最大传染能力 A 是一个有限数时,病毒的传播阈值 λ_c 就是一个非零的正数.然而,已经有研究指出,在有限规模的无标度网络中,同样存在着非零的病毒传播阈值,那么,这两种非零传播阈值有什么本质区别呢?

May和Lloyd最早提出了无标度网络上传播行为的有限尺度效应,指出有限大的无标度网络中存在非零的传播阈值^[12],Pastor-Satorras和Vespignani给出了有限尺度效应下传播阈值的量化结果^[13],这里,我们利用本文所给定的度分布函数(10)对这个非零传播阈值进行一下简单推导,以发现它与最大传染能力受限时非零传播阈值的区别.

设 n 为网络的规模, $\lambda_c(n)$ 为有限网络中的传播阈值,则由(11)式,有

$$\lambda_c(n) = \frac{k}{k^2} = \frac{\int_m^{n-1} k^{-r+1} dk}{\int_m^{n-1} k^{-r+2} dk} \quad (25)$$

当 $2 < r < 3$ 时,由上式可得

$$\lambda_c(n) = \frac{3-r}{r-2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{m}{n-1}\right)^{r-2}}{\left(\frac{m}{n-1}\right)^{3-r} - 1}$$

因 $n \gg m$,所以有

$$\lambda_c(n) \approx \frac{3-r}{(r-2)m} \cdot \left(\frac{m}{n-1}\right)^{3-r} \quad (26)$$

当 $r=3$ 时,由(25)式可得

$$\lambda_c(n) = \frac{1}{m} \frac{1}{\ln \frac{n-1}{m}}$$

同理,由 $n \gg 1$,得

$$\lambda_c(n) \approx \frac{1}{m \ln \frac{n-1}{m}} \quad (27)$$

由(26)(27)式显然可以看出,对于有限规模 n ,当无标度网络的幂律指数满足 $2 < r \leq 3$ 时,病毒的传播阈值 $\lambda_c(n)$ 也都是非零的正数,但 $\lambda_c(n)$ 本质上都与 n 密切相关,当 n 任意大时, $\lambda_c(n)$ 可以任意小,这一点与最大传染能力受限时病毒的传播阈值 λ_c 有着本质的不同,因为 λ_c 与网络的规模 n 无关.

图1给出了SIR模型和SIS模型在 $m=2$ 的BA(Barabási和Albert)无标度网络^[14]中传播阈值 λ_c 和最大传染力 A 的关系,其中BA网络的幂律指数 $r=3$,网络的规模取为 $n=20000$ (n 为网络中节点总数),同时,图中也附带给出了该网络规模下最大传染能力不受限制时传播阈值 $\lambda_c(n)$ 的值.

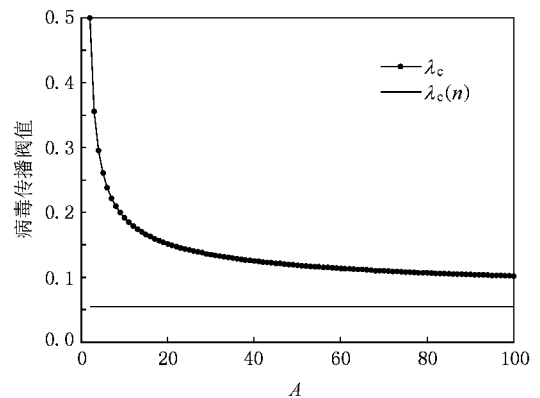


图1 传播阈值 λ_c 与最大传染能力 A 的关系

从图1中可以看出,当最大传染能力 A 不是特别大时,例如当 $A \leq 10$ 时,病毒的传播阈值 λ_c 还是相当大的,只有当 $A \rightarrow \infty$ 时,传播阈值才趋于0,可见,当我们引入最大传染能力的概念后,SIR模型与SIS模型的传播阈值发生了重要改变.此外,图中下方方的直线是最大传染能力不受限制时,由(27)式所计算出的有限网络(BA网络,网络规模 $n=20000$ 、网络的最小度 $m=2$)中病毒传播阈值 $\lambda_c(n)$ 的值,可见,在该网络规模下, $\lambda_c(n)$ 的值已经非常小,约为0.05.

4. 最大传染能力限定的SIR,SIS模型传播过程的数据仿真

网络的最大传染能力受到限制后改变了SIR模

型和 SIS 模型的传播阈值,同时也必然会改变两模型的传播过程.我们在不同的 BA 网络上对两个模型的传播过程进行了数据仿真,这些 BA 网络的大小均为 $n = 20000$ 个节点,网络的最小度分别为 $m = 2 - \infty$ (网络的生成方法见文献 [14]).由传播阈值公式(22)可知,病毒传播阈值 λ_c 与网络的最小度 m 及最大传染能力 A 都有关系,为使病毒能在网络中传播,必须选取病毒传播率 λ 大于 λ_c .例如,当 $m = 2, A = 3, 4, 5, 6, 7, \dots, \infty$ 时, SIR 和 SIS 模型的传播阈值 λ_c 分别为 $0.3558, 0.2953, 0.2609, 0.2383,$

$0.2095, \dots, 0$.因此,如果选取病毒传播率 $\lambda = 0.5$ 时,只要取 $A \geq 3$,就能使病毒在 $m = 2$ 的 BA 网络中传播起来.为了便于比较,我们在仿真过程中均固定病毒的传播率 $\lambda = 0.5$,网络的最大传染能力 A 的具体取值情况请见具体的仿真过程.此外,由于两传播模型在不同 BA 网络上的传播过程具有相同的性质,本文只列出了 SIR 模型和 SIS 模型在 $m = 2$ 的 BA 网上的传播过程仿真图.另外,图 2 至图 4 中各曲线均为 10 次运行的平均结果.

在图 2 中, $r(t), i(t)$ 和 $s(t)$ 分别表示 t 时刻 R

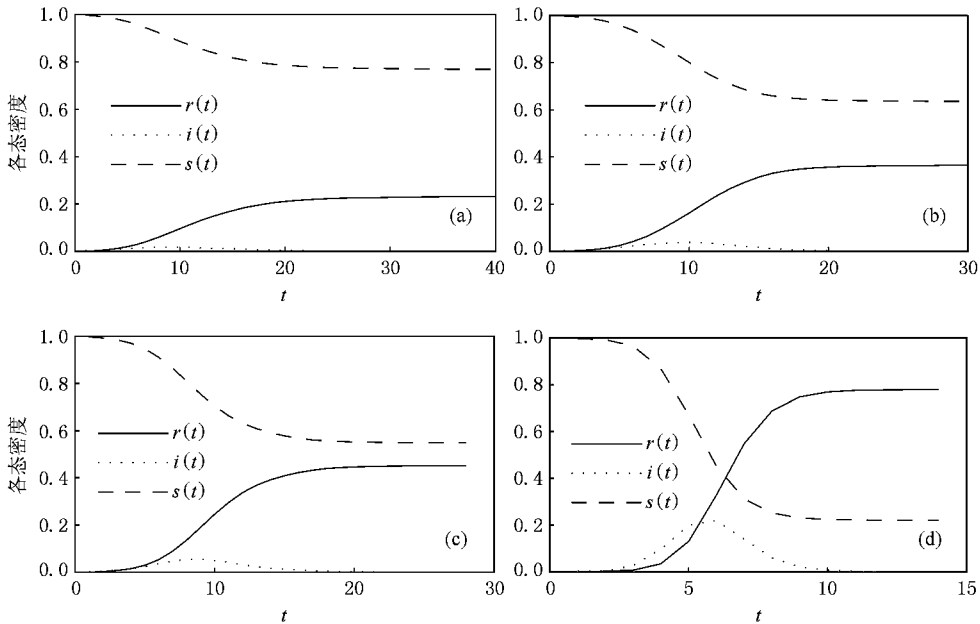


图 2 SIR 模型在 $m = 2, n = 20000$ 的 BA 网络上的传播过程(病毒传播率 $\lambda = 0.5$) (a) $A = 5$ (b) $A = 6$ (c) $A = 7$; (d) $A = \infty$

态节点、I 态节点和 S 态节点的密度,当 $t \rightarrow \infty$ 时, $r(\infty)$ 表示传播过程结束时 R 态节点的密度.在 SIR 模型中, $r(\infty)$ 代表了网络被感染的程度(见文献 [11]),这是因为 R 态节点都是通过 I 态节点治愈后而得到的.从图中可见, $r(\infty)$ 与最大传染能力 A 有着直接的关系, A 值越大,网络被感染的程度 $r(\infty)$ 也越大.图 2(d) 是传染能力不受限制时的传播过程,此时的 $r(\infty)$ 是最大的.

图 3 是 SIS 模型的传播过程,为方便与 SIR 模型的传播过程进行比较,图 3 中所用的 BA 网络及各参数的取值都与图 2 相同.

在图 3 中, $i(t)$ 和 $s(t)$ 分别表示 t 时刻 I 态节点和 S 态节点的密度,当 $t \rightarrow \infty$ 时, $i(\infty)$ 表示传播过程稳定状态下 I 态节点的密度.在 SIS 模型中,

$i(\infty)$ 代表了网络被感染的程度,即传播过程稳定状态下 I 态节点所占有总节点的比例数.从图 3 中可以看出, $i(\infty)$ 与最大传染能力 A 有着直接的关系, A 值越大,网络被感染的程度 $i(\infty)$ 也越大.图 3(d) 是传染能力不受限制时的传播过程,此时的 $i(\infty)$ 也是最大的.

图 4(a)(b) 分别给出了 t 时刻 SIR 模型中 R 态节点的密度与最大传染能力 A 的关系和 SIS 模型中 I 态节点的密度与最大传染能力 A 的关系.(a) 中曲线从下到上分别是 $A = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ 和无穷时 R 态节点的密度随时间的变化规律.我们可以清楚地看出, R 态节点的密度随着最大传染能力的逐渐增大也逐渐增大,说明最大传染能力对 SIR 模型的传播过程有着重要的影响.(b) 中曲线从下到上分

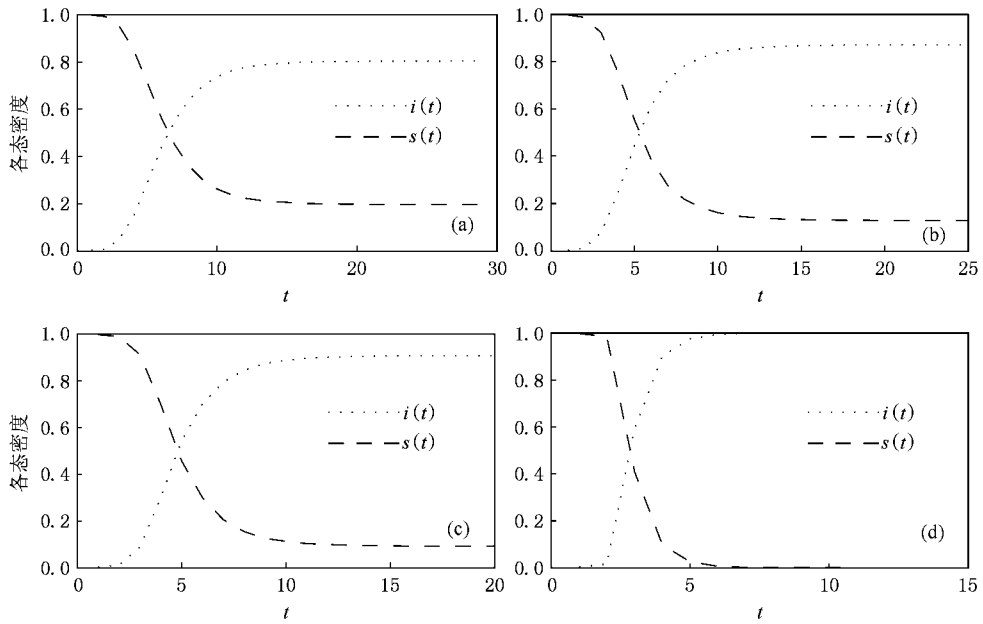


图3 SIS模型在 $m=2, n=20000$ 的BA网络上的传播过程(病毒传播率 $\lambda=0.5$) (a) $A=5$ (b) $A=6$ (c) $A=7$; (d) $A=\infty$

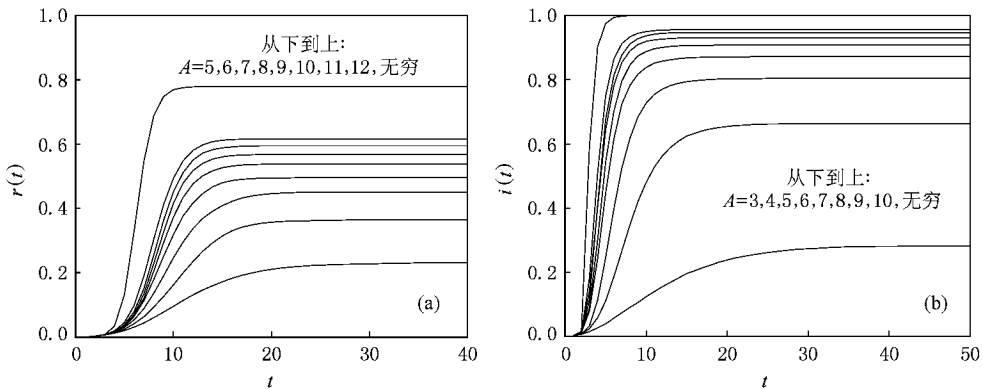


图4 (a) SIR模型, t 时刻R态节点的密度与最大传染能力 A 的关系 (b) SIS模型, t 时刻I态节点的密度与最大传染能力 A 的关系

别是 $A=3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ 和无穷时 I 态节点的密度随时间的变化规律, 同样, I 态节点的密度随着最大传染能力的逐渐增大也逐渐增大, 说明最大传染能力对 SIS 模型的传播过程也有着重要的影响; 同时我们还看到: 当最大传染能力不断增大时, 它对两个模型传播过程的影响却不断减小, 而当最大传染能力较小时(即对最大传染能力的限制较高时), 网络的感染程度对最大传染能力的变化相当敏感, 这对我们控制病毒传播具有重要的参考价值, 即应尽量将网络中个体的最大传染能力控制到最小。

最后我们再强调一点, 以往我们用 SIS 模型和 SIR 模型估计病毒的感染程度时, 并没有考虑个体

最大传染能力的限制, 因此, 我们所估计的病毒感染程度比实际情况过高就不奇怪了。

5. 结 论

本文研究了网络中个体的最大传染能力受到限制时 SIR 模型和 SIS 模型在无标度网络中的传播阈值和传播过程. 我们发现: 只要个体的最大传染能力不是无限大, 两个传播模型的传播阈值就是一个与最大传染能力及网络的最小度相关的常数, 该常数不会随着网络规模趋于无穷时而趋于零, 这一点与有限网络下非零传播阈值具有本质上区别; 其次, 当

网络中个体的最大传染能力受到限制,病毒按 SIR 模型和 SIS 模型传播时,网络的感染程度都有所减小,且当最大传染能力较小时(即对最大传染能力的限制较高时),网络的感染程度对最大传染能力的变化相当敏感,这对我们控制病毒传播具有重要的参

考价值,即应尽量将网络中个体的最大传染能力控制到最小;此外,以往我们用 SIS 模型和 SIR 模型估计病毒的感染程度时,并没有考虑网络中个体最大传染能力的限制,因此,所估计的病毒感染程度也往往会比实际情况过高.

-
- [1] Zhou T ,Fu Z Q ,Niu Y W ,Wang D ,Zeng Y ,Wang B H ,Zhou P L 2005 *Progress in Natural Science* **15** 513 (in Chinese) [周 涛、傅忠谦、牛永伟、王 达、曾 燕、汪秉宏、周佩玲 2005 自然科学进展 **15** 513]
- [2] Li X ,Wang X F 2006 *IEEE Trans . Automatic Control* **51** 534
- [3] Li X ,Wang X F 2007 *International Journal of Systems Science* **38** 400
- [4] Moreno Y ,Pastor-Satorras R ,Vespignani A 2002 *Eur . Phys . J . B* **26** 521
- [5] Pastor-Satorras R ,Vespignani A 2001 *Physical Review Letters* **86** 3200
- [6] Fu X C ,Michael S ,David M W ,Zhang H F 2007 *Proceedings of the third Chinese conference on complex networks* (Shanghai ,China) 129 (in Chinese) [傅新楚、Michael S、David M W、张海峰 2007 第三届全国复杂网络会议论文集(中国上海) 129]
- [7] Xu D ,Li X ,Wang X F 2007 *Acta Phys . Sin .* **56** 1313 (in Chinese) [许 丹、李 翔、汪小帆 2007 物理学报 **56** 1313]
- [8] Wong W G ,Ni S J ,Shen S F ,Yuan H Y 2007 *Acta Phys . Sin .* **56** 1938 (in Chinese) [翁文国、倪顺江、申世飞、袁宏永 2007 物理学报 **56** 1938]
- [9] Hu K ,Tang Y 2006 *Chin . Phys .* **15** 2782
- [10] Li Y ,Liu Y ,Shan X M ,Ren Y ,Jiao J ,Qiu B 2007 *Chin . Phys .* **16** 287
- [11] Liu Z R ,Yan J R ,Zhang J G ,Wang L 2006 *Chinese Physics Letters* **23** 1343
- [12] May R M ,Lloyd A L 2002 *Phys . Rev . E* **64** 066112
- [13] Pastor-Satorras R ,Vespignani A 2002 *Phys . Rev . E* **65** 035108
- [14] Barabási A L ,Albert R 1999 *Science* **286** 509

Study of epidemic spreading on scale-free networks with finite maximum dissemination *

Pei Wei-Dong^{1,2)†} Liu Zhong-Xin¹⁾ Chen Zeng-Qiang²⁾ Yuan Zhu-Zhi¹⁾

1) *Department of Automation ,Nankai University ,Tianjin 300071 ,China ;*

2) *College of Computer and Information Engineering ,Tianjin Normal University ,Tianjin 300387 ,China)*

(Received 3 January 2008 ; revised manuscript received 27 May 2008)

Abstract

Under the condition of infinite dissemination of the network ,it has been proved that the classical epidemic models do not give epidemic thresholds in the infinite scale-free networks . That is ,a disease can always propagate on the network no matter how low its spread speed . However ,the ability of individuals to spread virus in many real networks is not always infinite . If the maximum dissemination of individuals in the network is set finite ,then there should exist a non-zero epidemic threshold for the above epidemic models . The relations between the epidemic threshold and the maximum dissemination ,the relations between the degree of infection and the maximum dissemination are discussed ,meanwhile the reason why classical epidemic models always over-predict the degree of infections in real networks is explained .

Keywords : scale-free network , maximum dissemination , epidemic threshold , degree of infection

PACC : 0520 , 0565 , 0570J

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60774088) ,the Program for New Century Excellent Talents in University of China (Grant No. NCET-2005-229) and the Science & Technology Research Key Project of Education Ministry of China (Grant No. 107024) ,The Foundation of the Application Base and Frontier Technology Research Project of Tianjin (08JCZDJC21900) .

† Corresponding author. E-mail : paulpeiart@mail.nankai.edu.cn ; paulpei2008@163.com