

准二维凝聚体中暗孤子环的动力学演化^{*}

张蔚曦 王登龙[†] 丁建文

(湘潭大学物理系和低维材料及其应用技术教育部重点实验室,湘潭 411105)

(2008 年 3 月 20 日收到,2008 年 5 月 13 日收到修改稿)

发展多重尺度方法,解析研究了准二维凝聚体中孤子的动力学行为.当原子间为相互排斥作用时,凝聚体中可观察到暗孤子.计算表明,该暗孤子不稳定,将随时间演化成幅度较小的暗孤子环.特别是,所形成的暗孤子环被表明具有动力学稳定性.

关键词:玻色-爱因斯坦凝聚,多重尺度方法,暗孤子环

PACC: 0530J, 0290, 1110L

1. 引言

玻色-爱因斯坦凝聚体(BECs)的实现^[1-4]促使了非线性原子光学的形成.随后 BECs 中的非线性现象如暗、亮孤子的理论预言和成功观察^[5-7],加速了非线性原子光学的发展.众所周知,孤子是由系统中的色散效应和非线性效应相互平衡后的一种特殊的相干结构,BECs 中孤子研究对当前许多高新技术领域,如原子激发、原子光刻技术及新一代原子钟等具有重要的意义.迄今为止,由于一维 BECs 的物理模型简单、物理图像清晰、实验技术相对而言较为简单,吸引了人们广泛地探讨.对于局限于谐振外部势阱中的准一维 BECs,实验和理论均表明,粒子之间的相互作用为排斥时,BECs 中出现暗孤子^[5,8],粒子相互吸引时,BECs 中产生亮孤子^[6,9].而且,外部势阱^[10-13]和粒子之间的相互作用形式^[14-17]等因素对 BECs 中孤子的动力学都会产生一定的影响.如 BECs 处于双曲函数的外部势阱,即使粒子之间为吸引相互作用,BECs 中也能形成暗孤子^[10];当粒子之间的相互作用呈周期性变化时,BECs 中的亮孤子呈现出动力学稳定性^[14].

由于一维 BECs 中的有关非线性性质的研究基本趋于成熟,因此人们逐步把眼光转到二维或三维 BECs.实验上由于使 BECs 径向(xoy 平面)的束缚频

率 ω_{\perp} 远大于轴向(z)的束缚频率 ω_z ,从而使 BECs 在轴向上做宏观运动.如果使 BECs 轴向的束缚频率 ω_z 远大于径向的束缚频率 ω_{\perp} ,那么可以限制 BECs 在(xoy)平面上运动.基于上述实验思路,Görlitz 等^[18]通过控制纵横比观察到了二维(盘状) BECs 的形成,这在一定程度上刺激了人们对二维 BECs 一系列物理性质的研究.一般来说,二维系统较一维系统相比不稳定的因素多,难以得到稳定的孤子.然而理论上,Saito 等^[19]预言通过 Feshbach 共振来控制原子间的相互作用就可以在二维 BEC 中观察到稳定的亮孤子.Huang 等^[20]研究盘状 BEC 的孤子动力学性质时发现当原子间为相互排斥作用时,二维 BEC 中出现振幅较小的平面暗孤子(plane dark soliton).幅度较大的孤子是不稳定的,由于长波长的径向扰动以及轴向的调制效应,其随时间会演化成涡旋态.此外,文献[21]也发现块状(lump-like)二维暗孤子也可能在盘状 BEC 中传播.把描述 BECs 的动力学性质的直角坐标下的 Gross-Pitaevskii(GP)方程转换成柱坐标下的非线性 Schrödinger 方程,然后考虑其径向激发效应,Theocharis 等^[22]预言二维 BEC 中会产生暗孤子环(ring dark soliton).同时他们证实二维 BEC 中出现的浅暗孤子环有可能是稳定的,而深暗孤子环则有可能是径向蛇形(transverse snaking)不稳定的且可能演化成涡旋-反涡旋对(vortex-antivortex pairs)^[22].然而对于二维 BEC 的孤

^{*} 国家自然科学基金(批准号:10674113)、教育部新世纪人才基金(批准号:NCEF-06-0707)、湖南省自然科学基金(批准号:06JJ50006)、湖南省教育厅项目(批准号:04A058 和 06A071)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: dlwang@xtu.edu.cn

子幅度较大时, Yang 等^[23]研究得出囚禁在二维势阱中的 BEC 的暗孤子环的动力学演化成暗孤子带 (dark soliton stripe). 对于二维 BEC 的孤子幅度较小时, Carr 等^[24]预言在实验上可以观察到稳定的孤子环. 因此, 在本文中, 我们发展了多重尺度方法, 解析地研究了二维 BEC 中的非线性动力学行为, 结果发现粒子间的相互作用为排斥的准二维凝聚体中会出现动力学稳定的暗孤子环.

2. 二维凝聚体中的孤子解

基于平均场近似, 低温下原子间为弱相互作用的玻色-爱因斯坦凝聚体的动力学行为可以用 GP 方程描述^[25-26], 即

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial T} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + g|\Psi|^2 + V \right) \Psi, \quad (1)$$

这里 $\Psi = \Psi(R, Z, T)$ 是凝聚体的宏观波函数, 其中 $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 拉普拉斯算符为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2};$$

m 是原子质量; $g = 4\pi\hbar^2 a_s/m$ 表示相互作用强度; a_s 是散射长度 ($a_s > 0$ 表示原子间为排斥相互作用); $V = V(R, Z)$ 是准二维外部势阱, 其具体形式为

$$V(R, Z) = \frac{1}{2} m [\omega_\perp^2 R^2 + \omega_z^2 Z^2], \quad \omega_\perp \ll \omega_z \quad (2)$$

其中 ω_z 和 ω_\perp 分别为轴向 (Z) 和径向 (R) 的谐振频率. 引入无量纲变量 $(R, Z) = (a_z(r, z), T = (2/\omega_z)t)$ 和 $\Psi = \sqrt{n_0} \psi$. 其中 $a_z = \sqrt{\hbar/m\omega_z}$ 是轴向线性振荡长度, n_0 是凝聚体的密度, 从而得到无量纲的非线性 Schrödinger 方程

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi + g|\psi|^2 \psi + z^2 \psi + \frac{1}{4} \lambda^2 r^2 \psi, \quad (3)$$

其中 $g = 8\pi n_0 a_s a_z^2$, $\lambda = 2|\omega_\perp|/|\omega_z| \ll 1$. 根据分离变量方法, 凝聚体的波函数写成 $\psi(r, z, t) = \tilde{\psi}(r, t) \alpha(z)$. 由于轴向强束缚势的作用, 其波函数 $\alpha(z)$ 应满足 $G_{zz} - z^2 G + G = 0$, 其中 G_{zz} 是轴向方向 (z) 的波函数 $\alpha(z)$ 对 z 的二阶导数. 由线性 Schrödinger 方程可得出 z 方向的波函数为 $G(z) = G_0(z) = \pi^{-1/4} \exp[-z_0^2/2]$. 从而, 方程 (3) 可化成准二维非线性 Schrödinger 方程

$$i \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = - \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \tilde{\psi}$$

$$+ g|\tilde{\psi}|^2 \tilde{\psi} + \left(\frac{1}{4} \lambda^2 r^2 + 1 \right) \tilde{\psi}, \quad (4)$$

根据波动力学理论, 我们在此令 $\tilde{\psi}(r, t) = A(r, t) e^{i\phi(r, t)}$, 其中 $A(r, t)$ 和 $\phi(r, t)$ 分别为准二维凝聚体波函数的幅度和相位. 代入方程 (4) 后把方程的虚、实部分开就可得到一组关于幅度和相位的耦合方程:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} A \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad (5)$$

$$A \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + A \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + gA^3 + \left(1 + \frac{1}{4} \lambda^2 r^2 \right) A = 0. \quad (6)$$

由于 (5) 和 (6) 所表示的准二维凝聚体系统的方程仍然是不可积的, 因此难以精确求解, 在此, 我们利用奇异摄动理论中的多重尺度方法来作渐近展开

$$A = u_0 + \epsilon a_1 + \epsilon^2 a_2 + \dots, \quad (7)$$

$$\phi = -\mu t + \varphi(\xi, \tau) = -\mu t + \epsilon \varphi_0 + \epsilon^2 \varphi_1 + \dots, \quad (8)$$

其中 u_0 表示凝聚体基态波函数的幅度, μ 是系统的化学势, a 和 φ 分别表示 BECs 扩展态 (extended state) 波函数的幅度和位相. ϵ 是一个与扩展态幅度和位相关的小量. 这是因为只有在 ϵ 很小的情况下, 稳定的浅暗孤子 (low-depth dark soliton) 才能存在. 如果 ϵ 较大, 则将形成深暗孤子 (high-depth dark soliton), 且这种深暗孤子不稳定, 随着时间演化成涡旋态 (vortices)^[27]. 随后, 我们引入两个慢尺度变量 $\xi = \epsilon(r - vt)$ 和 $\tau = \epsilon^3 t$. 把它们代入方程 (5) 和 (6), 且分别比较 ϵ 各次幂的系数, 从 (5) 式我们有

$$v \frac{\partial a_0}{\partial \xi} - u_0 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \xi^2} = 0, \quad (9)$$

$$-v \frac{\partial a_1}{\partial \xi} + \frac{\partial a_0}{\partial \tau} + a_0 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \xi^2} + u_0 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial a_0}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} + \frac{u_0}{v\tau} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} = 0. \quad (10)$$

从 (6) 式可得出

$$\mu = gu_0^2 + 1 + \frac{1}{4} \lambda^2 r^2, \quad (11)$$

$$vu_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} - 2gu_0^2 a_0 = 0, \quad (12)$$

$$-vu_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} - va_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} + u_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 a_0}{\partial \xi^2} + u_0 \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} \right)^2 + 2gu_0^2 a_1 + 3gu_0 a_0^2 = 0. \quad (13)$$

联立方程(9)和(12),我们得到波包的群速 $v = \pm \sqrt{2gu_0}$. 同时可求得 φ_0 与 a_0 之间的关系式为 $\varphi_0 = \int d\xi (v/u_0) a_0$.

随后对(13)式求出 ξ 的导数,结合(10)式,可得

$$\frac{\partial a_0}{\partial \tau} + \frac{1}{2\tau} a_0 + \frac{3v}{u_0} a_0 \frac{\partial a_0}{\partial \xi} - \frac{1}{2v} \frac{\partial^3 a_0}{\partial \xi^3} = 0. \quad (14)$$

令 $w = \varepsilon^2 a_0$, 同时利用变换 $\xi = \varepsilon R_1 = \varepsilon(r - vt)$ 和 $\tau = \varepsilon^3 t$ (14)式化为

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{v}{t} w + \frac{3v}{u_0} w \frac{\partial w}{\partial R_1} - \frac{1}{2v} \frac{\partial^3 w}{\partial R_1^3} = 0. \quad (15)$$

根据文献[28]可求出方程(15)的孤子解是

$$w = k(t) \operatorname{sech}^2 \{ \lambda(t) [r - vt - \beta(t)] \}, \quad (16)$$

这里 $k(t) = k_0 \exp[-(2v/3) \ln(t + t_0)]$ 是孤子的幅度,其中 t_0 对应于初始时刻($t = 0$), k_0 为积分常数;

$\lambda(t) = \sqrt{-gu_0 k(t)}$ 是孤子宽度; $\beta(t) = -[3v k(t) / (4v - 3)u_0] t + c_0$, 其中 c_0 是一积分常数 ($v + \beta_t$ 是 β 对 t 的一阶导数)表示孤子的传播速度.

因此整个凝聚体的波函数可以表示为

$$\psi(r, z, t) = Q \pi^{-1/4} \exp(-z_0^2/2) \times \exp[i(-\mu t + p)], \quad (17)$$

其中 $Q = u_0 + w$, $p = \sqrt{2g} [k(t) / \lambda(t)] \tanh \{ \lambda(t) [r - vt - \beta(t)] \}$. 显然(17)式就是准二维凝聚体波函数的孤子解,可描述其中的孤子动力学性质.

3. 二维凝聚体中的孤子动力学性质

由我们所引入的方程(7)和(8)可知,凝聚体波函数由基态和扩展态组成,由于其基态恒定不变,从而我们只需讨论扩展态波函数(16)的变化就可以直接反映出整个凝聚体波函数(17)的变化趋势^[20]. 从 $k(t)$ 的表达式可以看出,为了得到浅暗孤子就必须选取合适的 t_0 值. 从扩展态幅度随时间的变化图1中,我们发现,当 $0 < t_0 < 1$ 时幅度 k 的变化非常大,且 t_0 越小 k 的初始值的绝对值越大. 这显然与前面假设的扩展态是小量的考虑相矛盾. 当 $t_0 > 1$ 时孤子的幅度始终有 $k_0 < k < 0$, 且 t_0 越大 k 的初始值的绝对值越小,几乎趋近于0. 扩展态的幅度太小对整个凝聚体波函数的具体意义影响不大. 从而取 $t_0 = 1$ 时 $k_0 \leq k < 0$, 扩展态的幅度在较小范围内变化,从而使凝聚体将会出现浅暗孤子. 我们还可以从 $t_0 = 1$ 看出,它在 $t = 15$ 前增加较快,此后慢慢趋于恒

定. 说明这种情况下波函数的幅度将是一种动力学稳定状态. 因此下面的数值模拟中,我们均取 $t_0 = 1$. 此外,从扩展态的宽度 λ 和速度($v + \beta_t$)的表达式也可以看出,扩展态的宽度和速度都和其幅度呈现出相似的变化趋势. 从而我们可归纳出,整个凝聚体出现的孤子可能会是一种动力学稳定状态.

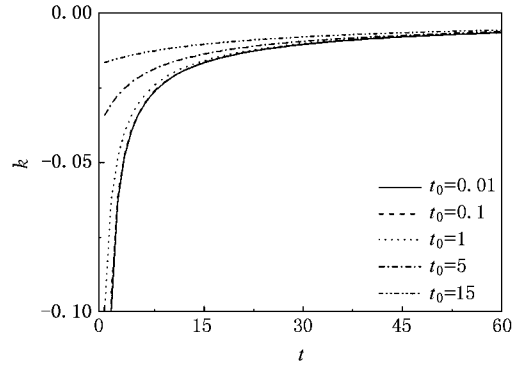


图1 孤子的幅度随时间的变化情况. 图中的其他参数为 $u_0 = 1$, $g = 0.5$, $k_0 = -1.0$, $c_0 = 0$

为了直观地得出原子间为相互排斥作用下的准二维(盘状)凝聚体中孤子的动力学演化情况,我们在此对方程(17)进行一系列的数值模拟. 图2示出了准二维凝聚体的概率密度在不同时刻的分布情况. 我们发现准二维凝聚体的初始时刻($t = 0$)如图2(a)在平面的中心出现一个密度最小的小圆斑,而在它的周围依次出现几个密度逐渐增大的同心圆环,在最外圆环的外面是一密度非常大且相对稳定的凝聚体的背景密度. 由此我们可归结出,原子间为相互排斥作用下的准二维凝聚体在初始时刻出现一暗孤子. 当时间增加到 $t = 15$ 时(见图2(b)),整个凝聚体沿径向方向有一定的扩展,在平面最中间位置的圆斑的密度已经不是最小的了,而是逐渐增大但稍小于最外圆环外面的背景密度. 平面密度最小的部分已经不再在平面的中心而是远离中心的一个同心暗环,在该暗环的内外均依次分布有密度逐渐增大的同心圆环,即越靠近暗环的圆环密度越小. 从这可得出,随着时间的增加盘状凝聚体平面的中心部分的密度逐渐增大,原来的暗孤子逐渐演变成一个环状的暗孤子(即暗孤子环),且此时刻的暗孤子环正处于生长过程中. 同时我们还发现在这段时间内($0 \leq t \leq 15$)暗孤子环的幅度、宽度和传播速度变化较快,概率密度变化也较大. 再经过一段相同的时间间隔,当 $t = 30$ 时(见图2(c)),我们发现暗孤子环又向径向扩展了,暗环内外均依次分布有密度逐渐增

大的同心圆环,且越靠近暗环的圆环密度越小.而且这时平面中心是一密度与最外面的背景密度大小一致的亮斑,可见此时暗孤子环已完全形成.然而这段时间内,暗孤子环的概率密度与图 2(b) 时相比缓慢增加,幅度、宽度和传播速度的变化也很小,这正如图 1 所揭示的现象($t = 15$ 后变化较小).当时间经过一段前面两倍的时间间隔,增加到 $t = 60$ (如图 2

(d) 所示) 时,凝聚体中间的亮斑密度仍然与最外面的背景密度一致,但亮斑范围扩大,暗孤子环及其内外密度逐渐增大的同心圆环沿径向扩展了一些,但是跟图 2(c) 相比,这段时间内暗孤子环的概率密度、幅度、宽度和速度都几乎不变,也就是说暗孤子环几乎是稳定的沿径向传播.这说明当暗孤子环形成以后,暗孤子环的传播就是一种动力学稳定状态.

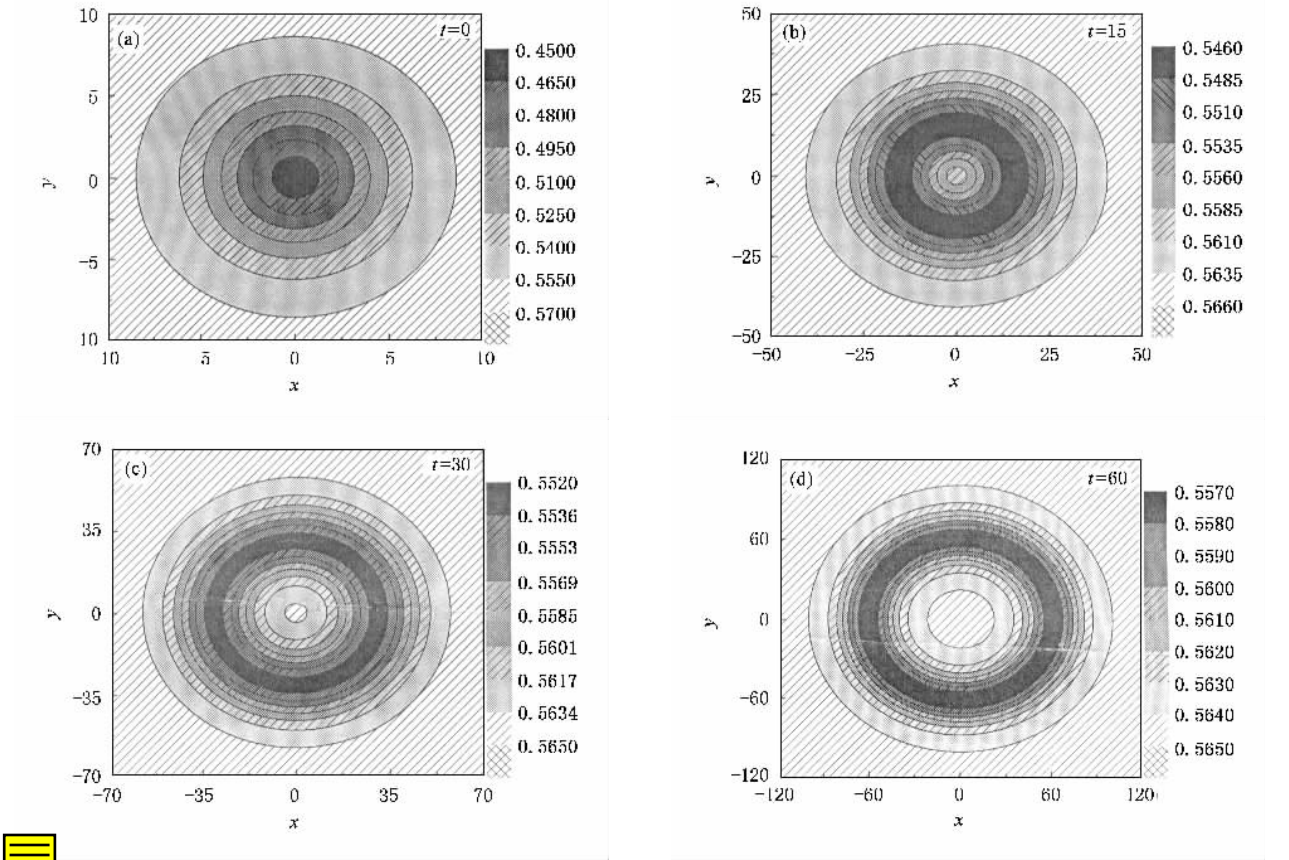


图 2 $t_0 = 1$ 时二维凝聚体在不同的时刻 (a) $t = 0$ (b) $t = 15$ (c) $t = 30$ (d) $t = 60$ 的概率密度分布,其中参数 $z_0 = 0.01$,其他参数与图 1 一致

综上所述,我们可归结为,在初始时刻准二维凝聚体中出现暗孤子,随着时间的增加暗孤子逐渐演化成暗孤子环,同时以较大的速度沿径向传播.在暗孤子环生长过程中概率密度越来越大,宽度越来越窄,传播速度越来越慢.当浅暗孤子环形成以后,其概率密度、幅度、宽度和速度都几乎不变,即此后暗孤子环将以恒定的速度沿径向传播,整个凝聚体达到一种动力学稳定状态.

4. 结 论

发展多重尺度方法,我们解析地研究了原子间

为相互排斥作用的准二维(盘状)BECs 的孤子动力学性质.首先,我们推导一个关于凝聚体波函数幅度的 KdV 方程,且得到孤子解.然后,通过数值模拟发现,准二维 BECs 中存在着暗孤子,但是该暗孤子不稳定,将随时间向浅暗孤子环演化,演化过程中其概率密度逐渐增大,幅度、宽度和速度都逐渐减小.当浅暗孤子环形成以后,其概率密度、幅度、宽度和速度都几乎不变,可见这种暗孤子环的传播属于动力学稳定过程.我们能够得到稳定的暗孤子环,可能是所考虑的体系是沿径向均匀变化,这样就避免了径向蛇形不稳定的出现.

- [1] Anderson M H ,Ensher J R ,Matthews M R ,Wieman C E ,Cornell E A 1995 *Science* **269** 198
- [2] Davis K B ,Mewes M O ,Andrews M R ,Druten N J ,Durfee D S ,Kurn D M ,Ketterle W 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3969
- [3] Bradley C C ,Sackett C A ,Tollett J J ,Hulet R G 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 1687
- [4] Xu Z ,Zhou S Y ,Qu Q Z ,Liu H ,Zhou S Y ,Wang Y Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5643 (in Chinese) [徐 震、周蜀渝、屈求智、刘 华、周善钰、王育竹 2006 物理学报 **55** 5643]
- [5] Burger S ,Bongs K ,Dettmer S ,Ertmer W ,Sengstock K 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 5198
- [6] Strecker K E ,Partridge G B ,Truscott A G ,Hulet R G 2002 *Nature* **417** 150
- [7] Theocharis G ,Schmelcher P ,Oberthaler M K ,Kevrekidis P G ,Frantzeskakis D J 2005 *Phys. Rev. A* **72** 023609
- [8] Denschlag J ,Simsarian J E ,Feder D L ,Clark C K ,Collins L A ,Deng L ,Hagley E W ,Helmerson K ,Reinhardt W P ,Rolston S L ,Schneider B I ,Phillips W D 2000 *Science* **287** 97
- [9] Khaykovich L ,Schreck F ,Ferrari G ,Bourdel T ,Cubizolles J ,Carr L D ,Castin Y ,Salomon C 2002 *Science* **296** 1290
- [10] Wang S J ,Jia C L ,Zhou D ,Luo H G ,An J H 2003 *Phys. Rev. A* **68** 015601
- [11] He Z M ,Wang D L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3088 (in Chinese) [何章明、王登龙 2007 物理学报 **56** 3088]
- [12] Li Z D ,Li Q Y ,Hu X H ,Zheng Z X ,Sun Y B 2007 *Ann. Phys. (New York)* **322** 2545
- [13] Li Z D ,He P B ,Li L ,Liang J Q ,Liu W M 2005 *Phys. Rev. A* **71** 053611
- [14] Liang Z X ,Zhang Z D ,Liu W M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 050402
- [15] Abdullaev F K ,Kamchatnov A M ,Konotop V V ,Brazhnyi V A 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 230402
- [16] Zhang X F ,Yang Q ,Zhang J F ,Chen X Z ,Liu W M 2008 *Phys. Rev. A* **77** 023613
- [17] Li H M 2006 *Chin. Phys.* **15** 2216
- [18] Görlitz A ,Vogels J M ,Leanhardt A E ,Raman C ,Gustavson T L ,Abo-Shaeer J R 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 130402
- [19] Saito H ,Ueda M 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 040403
- [20] Huang G X ,Makarov V A ,Velarde M G 2003 *Phys. Rev. A* **67** 023604
- [21] Huang G X ,Zhu S H 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 17
- [22] Theocharis G ,Frantzeskakis D J ,Kevrekidis P G ,Malomed B A ,Kivshar Y S 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 120403
- [23] Yang S J ,Wu Q S ,Zhang S N ,Feng S ,Guo W ,Wen Y C ,Yu Y 2007 *Phys. Rev. A* **76** 063606
- [24] Carr L D ,Clark C W 2006 *Phys. Rev. A* **74** 043613
- [25] Dalfovo F ,Giorgini S ,Pitaevskii L P ,Stringari S 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 463
- [26] Leggett A J 2001 *Rev. Mod. Phys.* **73** 307
- [27] Xue J K ,Peng P 2006 *Chin. Phys.* **15** 1149
- [28] Yang H J ,Shi Y R ,Duan W S ,Lü K P 2006 *Journal of Northwest Normal University* **42** 42 (in Chinese) [杨红娟、石玉仁、段文山、吕克璞 2006 西北师范大学学报 **42** 42]

Dynamical properties of ring dark soliton in quasi-two dimensional Bose-Einstein condensates^{*}

Zhang Wei-Xi Wang Deng-Long[†] Ding Jian-Wen

(*Department of Physics and Key Laboratory of Low Dimensional Materials & Application Technology
of Ministry of Education ,Xiangtan University ,Xiangtan 411105 ,China*)

(Received 20 March 2008 ; revised manuscript received 13 May 2008)

Abstract

By developing the multiple-scale method ,we study analytically the dynamical properties of soliton in a quasi-two-dimensional Bose-Einstein condensate. For the repulsive inter-atomic interaction ,a unstable dark soliton can be found in the condensate , which would evolve into ring dark soliton with small amplitude. Especially ,it is shown that the ring dark soliton has dynamic stability.

Keywords : Bose-Einstein condensates , multiple-scale method , ring dark soliton

PACC : 0530J , 0290 , 1110L

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10674113) ,the Program of New Century Talents Foundation from the Ministry of Education of China (Grant No. NCEF-06-0707) ,the Natural Science Foundation of Hunan Province ,China (Grant No. 06JJ50006) ,and the Scientific Research Foundation Bureau of Hunan Province ,China (Grant No. 04A058 and 06A071).

[†] Corresponding author. E-mail : dlwang@xtu.edu.cn