

# 非均匀可激介质中的螺旋波<sup>\*</sup>

张国勇<sup>1)2)</sup> 马 军<sup>3)</sup> 甘正宁<sup>1)</sup> 陈 勇<sup>1)4)†</sup>

1) 兰州大学理论物理研究所, 兰州 730000)

2) 湖北师范学院计算机系, 黄石 435002)

3) 兰州理工大学物理系, 兰州 730050)

4) 兰州大学磁学与磁性材料教育部重点实验室, 兰州 730000)

(2007 年 12 月 15 日收到, 2008 年 4 月 2 日收到修改稿)

以 Barkley 模型为对象, 研究了可激介质的非均匀性对螺旋波斑图形成的影响. 该模型中各参数与可激介质的属性密切相关, 通过参数涨落的正态分布来刻画非均匀性, 数值研究了单参数以及多参数涨落的正态分布情形下螺旋波斑图的形成. 研究表明, 可激介质的非均匀性对于螺旋波波纹的粗细及疏密程度有较大影响. 参数涨落分布的方差越大, 形成的螺旋波波纹越粗糙. 对于两参数均匀分布的极端情形, 当参数分布大于某一范围, 无法形成螺旋波. 这些都与螺旋波旋转的角频率密切相关. 螺旋波旋转的角频率越大, 螺旋波波纹越粗, 同时波纹越密集; 反之, 螺旋波旋转角频率越小, 螺旋波波纹越细, 同时波纹越稀疏.

关键词: 螺旋波, 非均匀介质, Barkley 模型

PACC: 0545

## 1. 引 言

螺旋波是系统远离平衡态时由于系统自组织形成的一类特殊斑图. 螺旋波广泛存在于化学系统、生物系统和物理系统等<sup>[1-6]</sup>. 螺旋波本质上是一种行波, 需要一定的介质来确保其可持续传播. 实际上激发介质和振荡介质中都可以观测到螺旋波. 一般地, 反应扩散方程常被用来描述反应扩散系统和一些时空系统的动力学特性, 在反应扩散方程描述的系统, 一些与介质特性相关的可控参数被映像为模型参数, 如一氧化碳在铂金表面催化氧化反应<sup>[7]</sup>中晶体表面温度, 一氧化碳和氧气的气压分别被映像为改进的 Fitzhugh-Nagumo equation 模型<sup>[8,9]</sup>中的三个参数  $a, b, \epsilon$ . 参数的分布区域决定了系统的动力学行为. 如在同一模型中, 不同的参数下系统可存在螺旋波, 反螺旋波, 时空混沌等<sup>[2,5]</sup>. 目前对于螺旋波的研究主要集中于螺旋波的诱导、螺旋波的控制<sup>[10-19]</sup>和螺旋波与其他斑图的转化<sup>[20,21]</sup>等. 研究发现, 激发介质中出现的螺旋波与心肌组织的螺旋波有很大相似性, 心肌组织中的螺旋波与心动过速有关, 心肌组织

中螺旋波的破裂往往是心颤发生的征兆<sup>[22,23]</sup>. 因此一些可描述激发特性的模型被用来研究螺旋波的演化和转变, 很多实际的系统往往不是均匀同性的, 如心肌组织就是非均匀的各向异性系统; 另外, 相同的模型在一定参数区域可描述激发介质, 而在另一参数区域则可描述振荡介质, 因此研究参数空间分布对斑图的转化问题就具有实际意义.

而实际的物理系统, 其主要特征参数一般在空间分布上存在一定程度的不均匀性, 即随着空间位置的不同, 各参数的值都会发生变化. 在下面的讨论和研究中, 我们假设描述可激发介质的反应扩散方程中的参数的值在空间各点呈正态分布. 在这种参数条件下, 来研究螺旋波斑图的形成, 将更加清楚各参数对螺旋波斑图形成的影响, 从而更有利于对螺旋波的认识及控制螺旋波的动力学行为.

## 2. 模 型

在激发介质和振荡介质中都可以观测到持续的螺旋波. 从本质上讲, 激发系统中的螺旋波形成于系统的全局失稳, 属于激发波; 振荡介质中的螺旋波形

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 10305005)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: ychen@lzu.edu.cn

成于系统的局部失稳,属于相波.本文采用一个双变量的反应扩散方程(Barkley 方程)<sup>[4,24]</sup>来研究非均匀可激介质对螺旋波斑图形成的影响.这个模型的形式如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{\epsilon} u(1-u) \left( u - \frac{b+v}{a} \right) + \nabla^2 u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= u - v. \end{aligned} \quad (1)$$

在这个模型中,参数  $a$  和  $b$  是一个决定系统可激发阈值的参数,  $\epsilon$  是快变量  $u$  和慢变量  $v$  之间的时间尺度,它决定了系统的可激发性.若  $\epsilon$  较小,那么系统的可激性较强,随着  $\epsilon$  的增大,系统的可激性逐渐下降以至于失去可激性,从而波不能在该系统中传播.  $b=0$  是这个系统的一个鞍结分岔点.当  $b>0$  且  $a<1+b$  时,系统是可激介质;当  $b<0$  时,系统是振荡的.由此可见,三个参数与系统介质的性质是密切相关的.本文只讨论  $b>0$  的情况,即只讨论可激发介质.

对于 Barkley 模型,研究表明<sup>[24]</sup>,当  $b=0.01$ ,  $\epsilon=0.02$  时,  $a$  从 0.3 至 1 之间都可以出现螺旋波;当  $a=0.84$ ,  $\epsilon=0.02$  时,  $b$  从 0 至 0.15 之间可以出现螺旋波;数值模拟表明,当  $a=0.84$ ,  $b=0.01$  时,  $\epsilon$  从 0.01 到 0.06 之间可以出现螺旋波.因此,本文的数值模拟主要以这个为依据,考察各参数的值在能够出现螺旋波的范围,满足空间正态涨落分布情况下,研究螺旋波斑图的形成和演化.

在本文的数值模拟中,我们采用欧拉向前差分

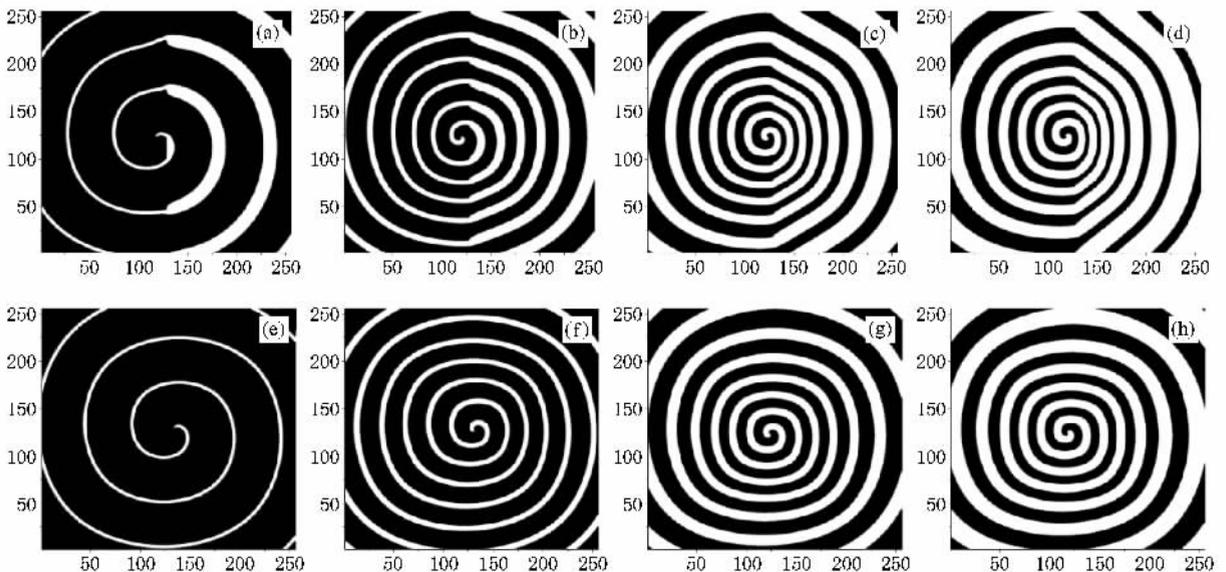


图 1 同一网格左右两边参数  $a$  取不同和相同值时的螺旋波,  $b=0.01$ ,  $\epsilon=0.02$ , 时间步长 0.02, 30 时间单位, 参数  $a$  的值分别为(a) 0.35 (左) 0.84 (右) (b) 0.4 (左) 0.9 (右) (c) 0.5 (左) 1.0 (右) (d) 0.6 (左) 1.0 (右) (e) 0.35 (f) 0.6 (g) 0.9 (h) 1.0

方法计算,数值模拟在一个含有  $256 \times 256$  个格点的二维平面上进行,计算的时间步长取为  $\Delta t = 0.02$ , 空间步长取为  $\Delta x = \Delta y = 0.5$ , 初始值为  $u(122:123, 1:128) = 0.9$ ,  $v(122:123, 1:128) = 0.0$ ,  $u(124:125, 1:128) = 0.7$ ,  $v(124:125, 1:128) = 0.7$ ,  $u(126:127, 1:128) = 0.0$ ,  $v(126:127, 1:128) = 0.9$ , 其他格点值为 0, 采用无流边界条件.

### 3. 数值模拟与讨论

非均匀介质的不均匀性有很多种情况,为了比较全面地了解介质非均匀性对螺旋波斑图形成的影响,下面对各种情况分别进行数值模拟和分析.这里侧重于参数正态分布下螺旋波的演化问题,将采用灰度表示的瞬态闪图来刻画螺旋波的演化,采用近似公式计算螺旋波的旋转频率来进行相关解释.

#### 3.1. 单参数涨落

假设在某些条件下,可以近似认为只有一个参数的值是不均匀分布的,其他的参数我们认为不变,或变化很小,可以忽略不计.

##### 3.1.1. 参数 $a$ 为正态分布的情况

为了研究参数  $a$  的值对螺旋波的影响,我们把同一空间分为左右两半,在其他参数固定的情况下,设定左右两边参数  $a$  的值不同及相同来进行比较.图 1 分别给出(1)式在同一网格内左右两边  $a$  值不

同和相同的情况下快变量  $u$  的闪图。

Barkley 给出了参数  $a, b, \epsilon$  和螺旋波旋转角频率关系的近似计算公式<sup>[25, 26]</sup>

$$\omega = \frac{0.692\mu}{\epsilon^{1/3}} - \frac{0.926}{a};$$

$$\mu \approx 2.70 \left[ \frac{\nu^s(1 - \nu^2)}{a} \right]^{2/3};$$

$$\nu^s = \frac{a}{2} - b. \quad (2)$$

在图 1 的参数下,即固定参数  $b$  和  $\epsilon$  的值,可以画出参数  $a$  与螺旋波旋转角频率  $\omega$  的关系曲线如图 2 所示。

从图 1 和图 2 可以看出,参数  $a$  在 0.35—0.8 范围内,随着  $a$  值的增大,螺旋波旋转角频率增大,螺旋波的波纹变粗,同时波纹密集。也就是说,螺旋波旋转得越快,螺旋波的波纹越粗,螺旋波波纹越密集。当  $a$  取值为 1.1, 1.2 时,即  $a$  的值大于 1,并不能形成螺旋波,但是由于另一半空间的诱导也会形成螺旋波。因此,当参数  $a$  的值为一个正态分布时, $a$

值的正态分布范围可以较大。

以下考虑在其他参数保持不变的情况下,参数  $a$  处于不同的正态分布时螺旋波斑图。图 3 给出参数  $a$  分别处于正态分布为 [0.3, 0.6] [0.6, 0.9], [0.8, 1.0] [0.3, 1.2], 即正态分布的均值分别为 0.45 0.75 0.9 0.75 时的螺旋波斑图。

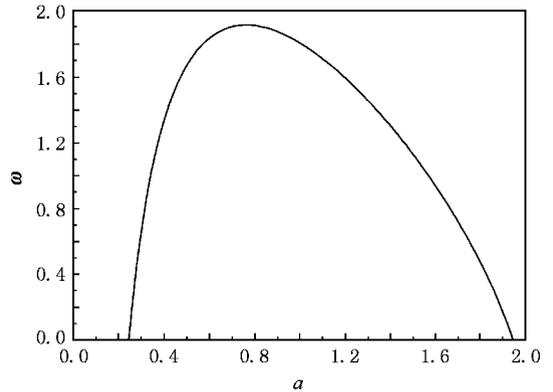


图 2 在其他参数固定下,参数  $a$  与螺旋波旋转角频率的近似关系曲线 ( $b = 0.01, \epsilon = 0.02$ )

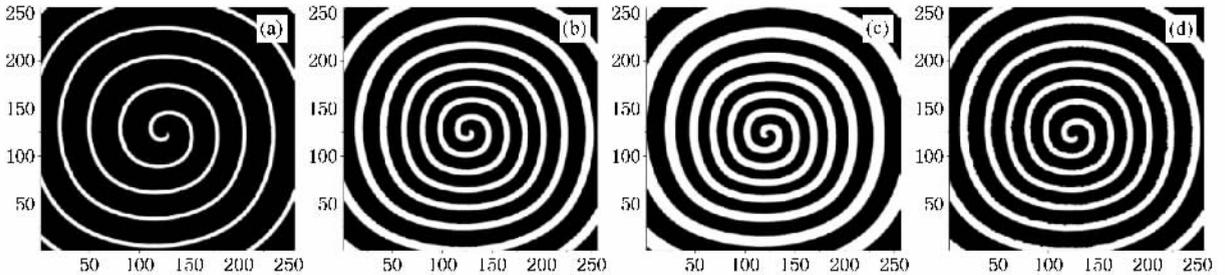


图 3 参数  $a$  为不同范围的正态分布情况下的螺旋波, $a$  值的正态分布范围分别为(a) [0.3, 0.6] (b) [0.6, 0.9] (c) [0.8, 1.0] (d) [0.3, 1.2] 其他参数  $b = 0.01, \epsilon = 0.02$  时间步长 0.02, 30 时间单位

从图 3 (a)到(c)可以看出,螺旋波的波纹由细变粗,由疏变密。对比(b)和(d),这两幅图的螺旋波波形非常接近,这是因为这两幅图的参数  $a$  的正态分布的均值是一样的,都是 0.75,所以正态分布的均值对螺旋波的疏密及波纹粗细的影响起决定作用。但是由于两幅图的  $a$  的正态分布的方差不一样(d)的方差较大,所以(d)图的螺旋波边缘较粗糙。这主要是由于空间各点参数  $a$  值不一样,从而各点的波纹粗细不一致,所以螺旋波的边缘粗糙。而且正态分布的方差越大,螺旋波越粗糙,如图(d)所示。可以推测,如果参数  $a$  的值在空间为均匀分布时,那么螺旋波波纹的锯齿状将会更加明显,如图 4 所示。

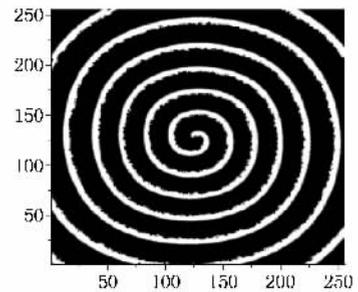


图 4 参数  $a$  值为均匀分布的螺旋波, $a$  均匀分布范围 [0.3, 1.0],  $b = 0.01, \epsilon = 0.02$  时间步长 0.02, 30 时间单位

### 3.1.2. 参数 $b$ 为正态分布的情况

与 3.1.1 节类似,为了研究参数  $b$  的值对螺旋波的影响,我们把同一空间分为左右两半,在其他参数固定的情况下,设定左右两边参数  $b$  值不同及相

同来进行比较.图 5 分别给出(1)式在同一网格内左右两边  $b$  值不同和相同的情况下快变量  $u$  的闪图.

同时给出在其他参数不变的情况下,参数  $b$  与螺旋波旋转角频率  $\omega$  的关系曲线如图 6 所示.

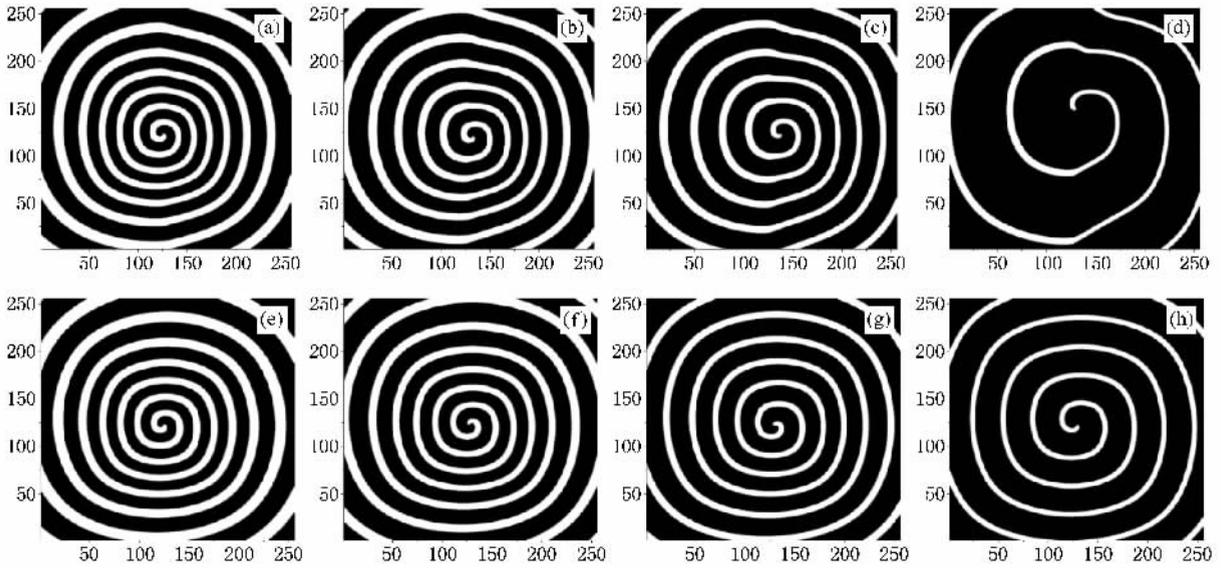


图 5 同一网格内左右两边参数  $b$  取不同和相同值时的螺旋波,  $a=0.84$ ,  $\epsilon=0.02$  时间步长 0.02, 30 时间单位, 从左至右参数  $b$  的值分别为 (a) 0.0 (左) 0.0 (右) (b) 0.0 (左) 0.0 (右) (c) 0.0 (左) 0.0 (右) (d) 0.0 (左) 0.14 (右) (e) 0.0 (f) 0.04 (g) 0.08 (h) 0.12

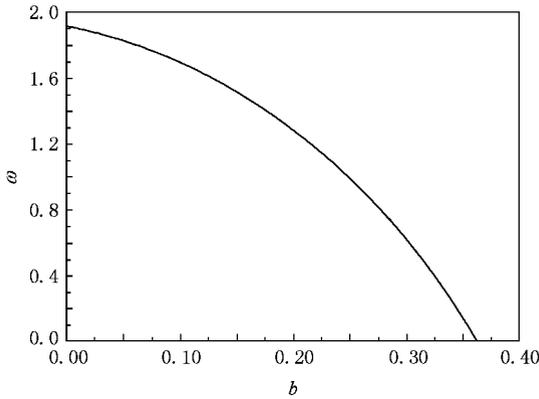


图 6 在其他参数固定下,参数  $b$  与螺旋波旋转角频率的近似关系曲线 ( $a=0.84$ ,  $\epsilon=0.02$ )

从图 5 和图 6 可以看出,与  $a$  参数的情况相反,随着参数  $b$  值的增大,螺旋波旋转的角频率减小,从整体来看,螺旋波的波纹变得越来越细,同时波变

得稀疏.但是从(c)和(d)明显看出,右半边的波纹比左半边密集,这是由于右半边螺旋波在形成过程中受到了左半边螺旋波的影响.

另外,对比图 5 和图 1,可以发现,参数  $b$  对螺旋波波纹疏密的影响比参数  $a$  的影响大,参数  $b$  数值很小的变化都会引起波纹疏密很大的变化,从而可以看到(a)~(d)左右两边有较明显的变形.而参数  $a$  对螺旋波波纹粗细的影响要比参数  $b$  明显.

下面我们考虑在其他参数保持不变的情况下,参数  $b$  处于不同的正态分布时螺旋波斑图.图 7 给出参数  $b$  分别处于正态分布范围为 [0, 0.05], [0.05, 0.1], [0.075, 0.125], [0.1, 0.15] 的螺旋波.

从图 7 可以看出,随着参数  $b$  正态分布的均值的增加(参数  $b$  正态分布的均值分别为(a) 0.025, (b) 0.075 (c) 0.1 (d) 0.125),螺旋波的波纹变细,同时变得稀疏,而且这种变化比参数  $a$  的影响要明

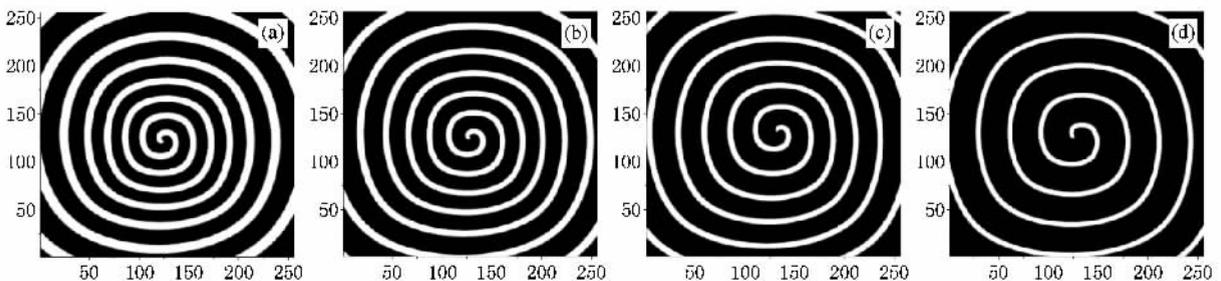


图 7 参数  $b$  为不同范围的正态分布情况下的螺旋波,  $b$  值的正态分布范围分别为(a) [0, 0.05] (b) [0.05, 0.1] (c) [0.075, 0.125] (d) [0.1, 0.15], 其他参数  $a=0.84$ ,  $\epsilon=0.02$  时间步长 0.02, 30 时间单位

显,虽然参数  $a$  的变化范围较大.另外, $b$  正态分布的方差变化似乎对螺旋波的影响也不明显,即使让  $b$  的值从 0 到 0.14 之间均匀分布,螺旋波的波形也没有明显的变化,很显然,这是因为一方面  $b$  取值范围较小,另一方面  $b$  值的变化对螺旋波波形粗细的影响较小.

### 3.1.3. 参数 $\epsilon$ 为正态分布的情况

同样地,为了研究参数  $\epsilon$  的值对螺旋波的影响,在其他参数固定的情况下,设定左右两边参数  $\epsilon$  值不同及相同来进行比较.图 8 分别给出(1)式在同一网格内左右两边  $\epsilon$  值不同和相同的情况下快变量  $u$  的闪图,同时给出在其他参数不变的情况下,参数

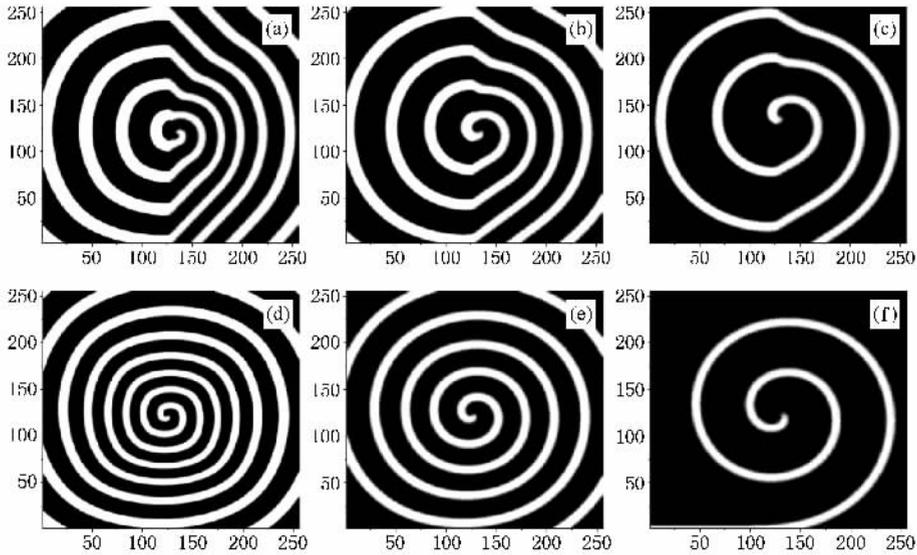


图 8 同一网格左右两边参数  $\epsilon$  取不同和相同值时的螺旋波,  $a = 0.84, b = 0.01$ , 时间步长 0.02, 30 时间单位, 参数  $\epsilon$  的值分别为(a)0.0(左)0.03(右)(b)0.03(左)0.05(右)(c)0.05(左)0.07(右)(d)0.03(左)0.05(右)(e)0.03(左)0.07(右)(f)0.07(左)0.05(右)

$\epsilon$  与螺旋波旋转角频率  $\omega$  的关系曲线如图 9 所示.

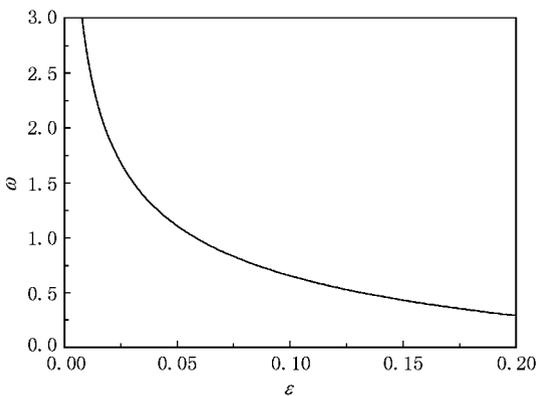


图 9 其他参数固定, 参数  $\epsilon$  与螺旋波旋转角频率的近似关系曲线 ( $a = 0.84, b = 0.01$ )

从图 8 图 9 可以看出,随着  $\epsilon$  值的增大,螺旋波旋转的角频率在减小,而且减小的速度比图 6 的要快一些,所以图 8 左右两边对比的情况非常明显,但都可以形成完整的螺旋波.随着  $\epsilon$  值的增大,螺旋波旋转角频率减小,从整体来看螺旋波波纹变得稀

疏,同时波纹变细.但比较(a)-(c)左右两边的情况恰好相反,左边  $\epsilon$  值较小,波纹比右边粗,同时波纹比右边要稀疏.这是非均匀介质与均匀介质不同的地方,在非均匀介质中,由于介质之间有相互影响,导致螺旋波的某些特点与均匀介质出现完全相反的结果.

下面再考虑在其他参数保持不变的情况下,参数  $\epsilon$  处于不同的正态分布时螺旋波斑图.图 11 给出参数  $\epsilon$  分别处于正态分布范围为[0.01, 0.03], [0.03, 0.05], [0.05, 0.07], [0.01, 0.07]的螺旋波,正态分布的均值分别为 0.02, 0.04, 0.06, 0.04.

从图 10 可以看出,随着参数  $\epsilon$  正态分布均值的增加,波纹变细,同时波纹变得稀疏.这一点和参数  $b$  的情况类似.并且波纹的粗细变化也很小,但波纹稀疏的变化比参数  $a$  的影响明显.

另外,对比图 10 中的(b)和(d),虽然二者  $\epsilon$  的值正态分布的方差相差很大,但波形几乎一样,可见正态分布的均值对螺旋波波形的影响非常明显.

从以上三种参数的正态分布对应的螺旋波及这

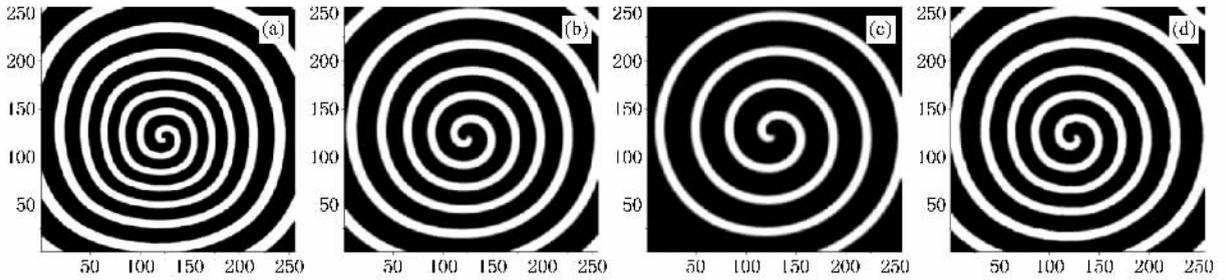


图 10 参数  $\epsilon$  为不同范围的正态分布情况下的螺旋波,  $\epsilon$  值的正态分布范围分别为 (a)  $[0.01, 0.03]$  (b)  $[0.03, 0.05]$  (c)  $[0.05, 0.07]$  (d)  $[0.01, 0.07]$  其他参数  $a = 0.84, b = 0.01$  时间步长 0.02, 30 时间单位

三种参数对应的螺旋波的角频率来看,可以看出:在均匀介质中,螺旋波旋转的角频率与螺旋波波纹的疏密以及波纹的粗细是有一定关系的,即螺旋波旋转的角频率越大,螺旋波的波纹越粗,同时波纹越密集.但在非均匀介质中,由于介质之间的相互影响,螺旋波旋转的角频率与波纹稀疏之间的这种关系不一定成立,还可能出现相反的结果.

另外可以看出,参数的正态分布对螺旋波的影响主要取决于正态分布的均值,这一点比较符合正态分布的特点,因为正态分布的参数的值主要集中于均值附近.

### 3.2. 两参数涨落

在某些条件下,可以近似认为有两个参数的值是不均匀分布的,另外一个参数认为不变,或变化很小,可以忽略不计.这个在实际的物理模型中也是经常遇到的,比方说,在一些物理系统中,可以近似认为气体的温度、压强在变化,但气体的体积保持不变.

我们把三个参数对螺旋波斑图的影响大致分为两类,第一类就是参数  $a$  的变化,在其他参数取本文给的定值时,在一定范围内,随着  $a$  值的增大,螺旋波旋转的角频率在增大,螺旋波波纹变粗,波纹变

得密集.第二类是  $b$  和  $\epsilon$  的变化,这两个参数的变化对螺旋波外形的影响相似,即在  $a$  为本文给定的值的情况下,随着  $b$  和  $\epsilon$  的增加,螺旋波旋转的角频率在减小,螺旋波波纹变细,波纹变得稀疏.因此,在两个参数同时变化的情况下,为了能够得到各种情况下的波形,我们在取值的时候,采取这样的方法,对于  $a$  和其他两个参数的组合,我们选择它们的正态分布的均值为同时增加的情况,同时也选取一组值为相反的情况.因为  $a$  和其他两个参数对螺旋波的影响作用几乎是相反的,而  $b$  和  $\epsilon$  的组合,我们让它们的正态分布的均值为一个增加一个减小,同样,也取一组相反的情况,即均值都较大的情况进行对比.

#### 3.2.1. 参数 $a$ 和 $b$ 同时涨落

由于参数  $a$  和  $b$  对螺旋波的影响是相反的,所以我们取参数  $a$  和参数  $b$  正态分布均值按相同的方向变化,即让  $a$  和  $b$  的正态分布的均值都是不断增加的,同时我们也验证了当参数  $a$  正态分布均值取较大值,而参数  $b$  正态分布均值取较小值的情况,数值模拟结果如图 11 所示.

对照图 11 的 (a)–(c) 可以看出,在参数  $a$  和  $b$  正态分布的共同影响下,螺旋波的波形变化较小.这是因为参数  $a$  值的增加使螺旋波旋转的角频率增加,而参数  $b$  值的增加使螺旋波旋转的角频率减

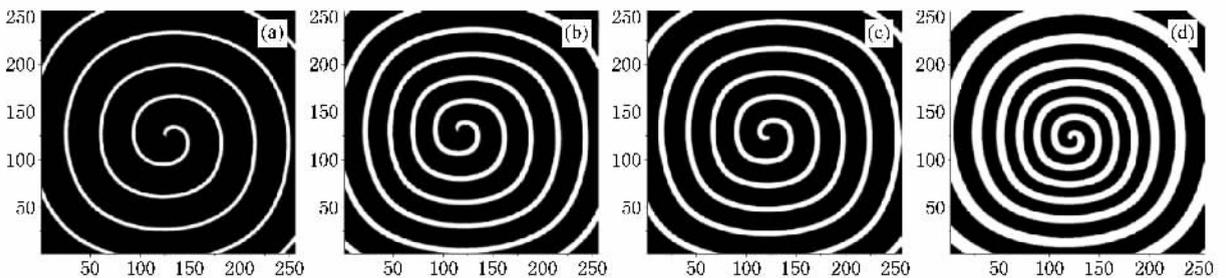


图 11 参数  $a$  和  $b$  同时为正常态分布的螺旋波,从左至右  $a$  和  $b$  值正态分布分别为 (a)  $a [0.3, 0.6], b [0.0, 0.05]$  (b)  $a [0.6, 0.9], b [0.05, 0.1]$  (c)  $a [0.8, 1.0], b [0.1, 0.15]$  (d)  $a [0.8, 1.0], b [0.0, 0.05]$  ( $\epsilon = 0.02$ , 时间步长为 0.02, 30 时间单位)

小,在参数  $a$  和参数  $b$  的共同作用下,螺旋波的变化不是很明显,但仍然可以看出,螺旋波的波纹变得密集.从(d)可以看出,当  $a$  的正态分布均值取较大值,同时  $b$  的正态分布均值取较小值,螺旋波的波纹变得最粗,而且波纹也是最密集的.这时两参数对波形的影响是一致的.

### 3.2.2. 参数 $a$ 和 $\epsilon$ 同时涨落

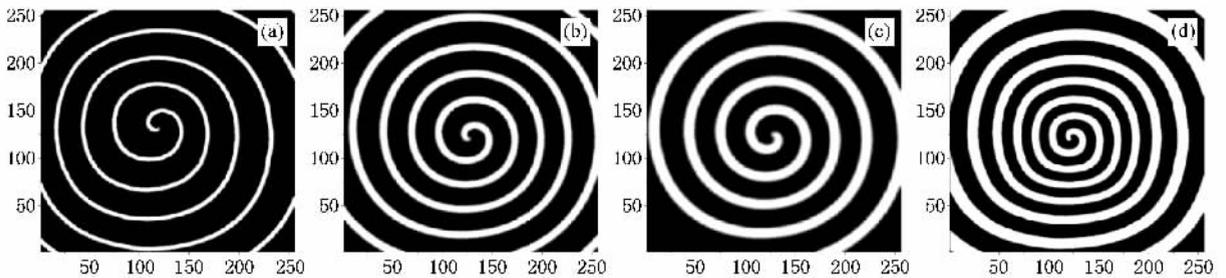


图 12 参数  $a$  和  $\epsilon$  同时为正态分布的螺旋波,  $a$  和  $\epsilon$  值正态分布分别为(a)  $a [0.3, 0.6], \epsilon [0.01, 0.03]$  (b)  $a [0.6, 0.9], \epsilon [0.03, 0.05]$ ; (c)  $a [0.8, 1.0], \epsilon [0.05, 0.07]$  (d)  $a [0.8, 1.0], \epsilon [0.01, 0.03]$   $b = 0.01$  时间步长为 0.02, 30 时间单位)

从图 12(a)–(c)可以看出,随着参数  $a$  和  $\epsilon$  正态分布均值的增加,螺旋波波纹在不断地变粗,而波纹疏密的变化比较复杂,虽然(b)的波纹比(a)密集,但(c)的波纹又比(a)稀疏.可见参数  $\epsilon$  对波纹疏密的影响比参数  $a$  大.由波纹不断地变粗,可以看出,参数  $a$  对波纹的粗细比  $\epsilon$  影响大.同样,从(d)可以看出,两者的影响是相互加强的,所以波纹最粗,同时波纹最密集.

参数  $a$  和  $\epsilon$  对螺旋波旋转的角频率以及波纹疏密的影响都是相反的,所以我们取参数  $a$  和参数  $\epsilon$  正态分布均值按相同的方向变化,即让  $a$  和  $\epsilon$  的正态分布的均值都不断增加,观察螺旋波斑图的变化情况,同样,也取一组参数  $a$  正态分布均值取较大值,而参数  $\epsilon$  正态分布均值取较小值的情况,数值模拟结果如图 12 所示.

### 3.2.3. 参数 $b$ 和 $\epsilon$ 同时涨落

参数  $b$  和  $\epsilon$  对螺旋波旋转的角频率以及波纹疏密的影响都是相同的,所以我们取参数  $b$  和参数  $\epsilon$  正态分布均值按相反的方向变化,即让  $b$  的正态分布的均值增加,而让  $\epsilon$  正态分布的均值不断地减小,研究螺旋波斑图的变化情况,为了对比,我们也取一组值让参数  $b$  和  $\epsilon$  的正态分布的均值都较小的情况,数值模拟结果如图 13 所示.

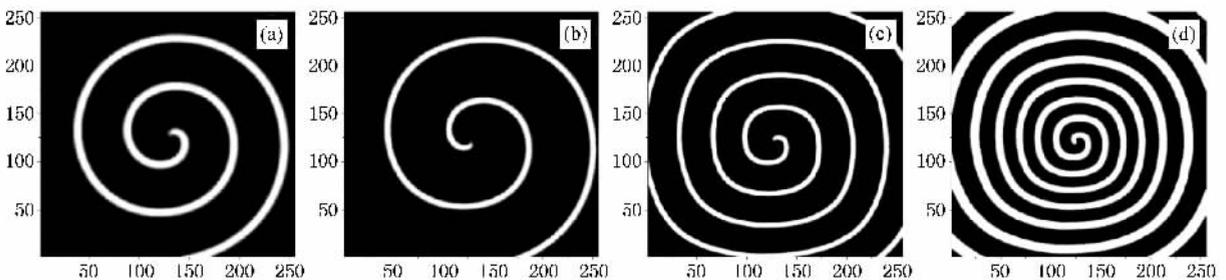


图 13 参数  $b$  和  $\epsilon$  同时为正态分布的螺旋波,  $b$  和  $\epsilon$  值正态分布分别为(a)  $b [0, 0.05], \epsilon [0.05, 0.07]$  (b)  $b [0.05, 0.1], \epsilon [0.03, 0.05]$ ; (c)  $b [0.1, 0.15], \epsilon [0.01, 0.03]$  (d)  $b [0.0, 0.05], \epsilon [0.01, 0.03]$   $a = 0.84$  时间步长为 0.02, 30 时间单位)

从图 13 可以看出,在参数  $b$  和  $\epsilon$  同时为正态分布的情况下,由于两者对螺旋波旋转的角频率的影响是一致的,所以我们在选取正态分布的均值时,让二者的正态分布均值一个逐渐增大,一个逐渐减小,这样,由于参数  $b$  的正态分布均值的增加,螺旋波旋转的角频率减小,而参数  $\epsilon$  正态分布均值的减

小,又使得螺旋波旋转的角频率在增大,从(a)–(c)来看,螺旋波的波纹在变细,同时波纹变得稀疏,但(c)波纹反而比(b)的要密集,说明  $\epsilon$  较小时,对波纹疏密的影响比  $b$  明显.这与  $\epsilon$  对螺旋波旋转的角频率的影响是一致的.

最后,从(d)可以看出,在两参数正态分布的均

值都较小时,螺旋波的波纹最粗,同时波纹最密集.

### 3.3. 三参数同时涨落

对于三个参数同时为正态分布的情况,很显然,不是任何一种正态分布的组合都能形成螺旋波,因此,在选取参数正态分布的时候,始终保证  $\epsilon$  正态分布的均值较小,从而保证系统具有较强的可激发性,让参数  $a$  和参数  $b$  的正态分布均值发生变化,

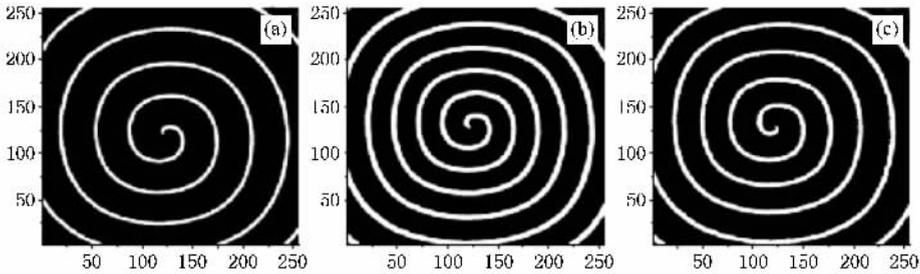


图 14 参数  $a$ ,  $b$  和  $\epsilon$  同时为正态分布的螺旋波,  $a$ ,  $b$  和  $\epsilon$  值正态分布分别为 (a)  $a [0.3, 0.6]$ ,  $b [0.0, 0.05]$ ,  $\epsilon [0.01, 0.03]$  (b)  $a [0.6, 0.9]$ ,  $b [0.05, 0.15]$ ,  $\epsilon [0.01, 0.03]$  (c)  $a [0.3, 1.0]$ ,  $b [0.0, 0.1]$ ,  $\epsilon [0.01, 0.03]$  [时间步长为 0.02, 30 时间单位]

## 4. 结 论

研究了非均匀可激发介质对螺旋波斑图形成的影响.在测试模拟中让各参数的值在空间中符合正态分布,数值计算结果表明:各参数的正态分布的均值及方差对螺旋波斑图形成有很大的影响,主要归纳如下:

1. 螺旋波有很强的稳定性,在同一空间同一参数的值相差很大时,仍然能形成螺旋波,虽然波形发生了严重的扭曲.
2. 螺旋波波纹的粗细与疏密和螺旋波旋转的角频率有一定的关系,螺旋波旋转的角频率越大,波纹越粗,螺旋波密集;反之,角频率越小,波纹越细,螺旋波越稀疏.
3. 各参数对螺旋波斑图形成的影响.参数  $a$  值的增加会导致螺旋波旋转的角频率增大,同时波纹变粗,螺旋波波纹密集;参数  $b$  和  $\epsilon$  值的增加会导致螺旋波旋转的角频率减小,同时波纹变细,螺旋波稀疏.而且通过比较还发现,在其他条件相同的情况下,参数  $a$  对螺旋波波纹的粗细的影响比  $b$  和  $\epsilon$  大,而  $b$  和  $\epsilon$  对波纹疏密的影响比  $a$  明显.
4. 参数正态分布的均值对螺旋波的影响.由于正态分布的特点,参数的值主要集中在正态分布的

数值模拟结果如图 14 所示.

从图 14 的结果来看,在三个参数都为正态分布的情况下,螺旋波波纹明显变得粗糙,这是由于三个参数都会影响到螺旋波波纹的粗细状况.同时可以看到,在  $\epsilon$  正态分布的均值不变的情况下,参数  $a$  和  $b$  正态分布均值的增加,会使得螺旋波变得密集,同时波纹变粗.而当  $a$  和  $b$  正态分布均值取一大一小时,由于影响相互抵消,所以波纹变得稀疏,波纹变细.

均值附近,所以参数正态分布的均值决定了螺旋波的主要特点.对于参数  $a$  来说,正态分布均值越大,螺旋波角频率越大,同时波纹变粗,螺旋波密集.参数  $b$  和  $\epsilon$  正态分布的均值对螺旋波波形影响与  $a$  相反,即均值越大,螺旋波旋转的角频率越小,波纹越细,螺旋波稀疏.

5. 参数正态分布的方差对螺旋波的影响.在这方面本文没有给出详细的数据模拟结果,仅对参数  $a$  给了一个结果,不过也足以说明方差的影响.正态分布的方差越大,说明参数的值越分散,从而各参数对螺旋波的影响也更加明显.比如,参数  $a$  正态分布的方差增加时,由于各点参数值差别增大,所以螺旋波波纹变得很粗糙.在均匀分布的极限情况下,即参数在空间均匀分布时,参数能形成螺旋波的取值范围会大大缩小.而且数值模拟表明,当两参数同时为均匀分布且分布范围稍大时,就无法形成螺旋波.

6. 两个或三个参数同时为正态分布时对螺旋波的影响.在两个参数为正态分布的情况下,通过各参数正态分布均值的不同,可以看出,两参数为正态分布时,对螺旋波的影响有相互抵消的情况,也有相互加强的情况.三个参数为正态分布的情况比较复杂,因为不是任何一种正态分布的组合都能形成螺旋波,因此,我们固定  $\epsilon$  正态分布的均值为最小,而让参数  $a$  和  $b$  正态分布的均值变化.从数值模拟的

结果可以看出,在三个参数同时为正态分布的情况下,螺旋波的波纹变得非常粗糙。

比较细致地研究了一类反应扩散方程描述的激

发介质中螺旋波在参数正态分布下的演化问题,该结果可进一步为研究系统参数涨落和部分真实系统的螺旋波控制提供理论依据。

- [ 1 ] Winfree A T 1987 *When Time Breaks Down* ( Princeton University Press ,Princeton ,NJ )
- [ 2 ] Cross M C ,Hohenberg P 1993 *Rev. Mod. Phys.* **65** 851
- [ 3 ] Mikhailov A S ,Showalter K 2006 *Phys. Rep.* **425** 79
- [ 4 ] Hildebrand M ,Bär M ,Eiswirth M 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 1503
- [ 5 ] Mermin N D 1979 *Rev. Mod. Phys.* **51** 591
- [ 6 ] Tomita K ,Ito A ,Ohta T 1977 *J. Theor. Biol.* **68** 459
- [ 7 ] Bär M ,Gottschalk N ,Eiswirth M ,Ertl G 1994 *J. Chem. Phys.* **100** 1202
- [ 8 ] Zhang H ,Cao Z J ,Wu N J *et al* 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 188301
- [ 9 ] Dauby P C ,Desaive T ,Croisier H *et al* 2006 *Phys. Rev. E* **73** 021908
- [ 10 ] Zhang H ,Holden A V 1995 *Chaos ,Solitons & Fractals* **5** 661
- [ 11 ] Qian Y ,Song X Y ,Shi W *et al* 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4420 ( in Chinese ) [ 钱 郁、宋宣玉、时 伟等 2006 物理学报 **55** 4420 ]
- [ 12 ] Wang P Y ,Xie P ,Yin H W 2003 *Chin. Phys.* **12** 674
- [ 13 ] Ma J ,Jin W Y ,Yi M ,Li Y L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2832 ( in Chinese ) [ 马 军、靳伍银、易 鸣、李延龙 2008 物理学报 **57** 2832 ]
- [ 14 ] Liu F C ,Wang X F ,Li X C *et al* 2007 *Chin. Phys.* **16** 2640
- [ 15 ] Ma J ,Pu Z S ,Feng W J ,Li W X 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4602 ( in Chinese ) [ 马 军、蒲忠胜、冯旺军、李维学 2005 物理学报 **54** 4602 ]
- [ 16 ] Ma J ,Ying H P ,Li Y L 2007 *Chin. Phys.* **16** 955
- [ 17 ] Ma J ,Jin W Y ,Li Y L *et al* 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2456 ( in Chinese ) [ 马 军、靳伍银、李延龙等 2007 物理学报 **56** 2456 ]
- [ 18 ] Zhang H ,Cao Z J ,Wu N J *et al* 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 188301
- [ 19 ] Zhang H ,Li B W ,Sheng Z M *et al* 2006 *Europhys. Lett.* **76** 1109
- [ 20 ] Gong Y F ,Christini D J 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 088302
- [ 21 ] Bruschi L ,Nicola M E ,Bär M 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 89801
- [ 22 ] Winfree A T 1994 *Science* **266** 1003
- [ 23 ] Nash M P ,Panfilov A V 2004 *Prog. Biophys. & Molec. Biol.* **85** 501
- [ 24 ] Barkley D 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 164
- [ 25 ] Margerit D ,Barkley D 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 175
- [ 26 ] Margerit D ,Barkley D 2002 *Phys. Rev. E* **66** 036214

## Spiral wave in an inhomogeneous excitable medium<sup>\*</sup>

Zhang Guo-Yong<sup>1,2)</sup> Ma Jun<sup>3)</sup> Gan Zheng-Ning<sup>1)</sup> Chen Yong<sup>1,4)†</sup>

1) *Institute of Theoretical Physics ,Lanzhou University ,Lanzhou 730000 ,China )*

2) *Department of Computer Science ,Hubei Normal University ,Huangshi 435002 ,China )*

3) *Department of Physics ,Lanzhou University of Technology ,Lanzhou 730050 ,China )*

4) *Key Laboratory for Magnetism and Magnetic Materials of the Ministry of Education ,Lanzhou University ,Lanzhou 730000 ,China )*

( Received 15 December 2007 ; revised manuscript received 2 April 2008 )

### Abstract

Using a Barkley model as an example ,the pattern formation of spiral waves in inhomogeneous excitable medium is investigated. The normal distribution of parameters fluctuations is introduced to depict the inhomogeneous medium. It is found that the parameter fluctuations play an important role in the formation of spiral pattern. For a larger variance of the parameter fluctuations ,the spiral waves are rough. In the case of the uniform distribution of fluctuations in two parameters ,spiral wave cannot be observed for fluctuations beyond a certain range. It is conjectured that these results are induced by the rotating frequency of spiral wave for different parameters. For the larg rotating frequency ,the spiral wave pattern is finely crowded ,while it is sparse for small frequencies.

**Keywords :** spiral waves , inhomogeneous excitable medium , Barkley model

**PACC :** 0545

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science of Foundation of China ( Grant No. 10305005 ).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail : ychen@lzu.edu.cn