

一种参数摄动的混沌异结构同步方法^{*}

韩 敏[†] 牛志强 韩 冰

(大连理工大学电子与信息工程学院, 大连 116023)

(2008 年 1 月 7 日收到, 2008 年 4 月 14 日收到修改稿)

研究了参数摄动情形下的混沌异结构同步问题, 基于 Lyapunov 稳定性定理并结合范数理论给出了系统参数摄动下实现混沌异结构同步的一个充分条件, 为同步控制器的设计提供了一般方法. 只要两混沌系统维数相等, 状态变量可测, 就可利用所提方法实现系统参数摄动下的异结构同步, 并能够保证在同步实现后同步控制量伴随误差变量一同收敛至零. 该方法鲁棒性强, 适用范围广, 通过对混沌系统、超混沌系统的同步仿真, 证实了该方法的有效性.

关键词: 混沌, 超混沌, 同步, Lyapunov 函数

PACC: 0545

1. 引 言

1990 年 Pecora 和 Carroll 在电子学试验中实现了混沌同步^[1], 此开创性工作激起了人们对混沌同步技术的研究高潮, 并展现了诱人的应用前景. 此后, 混沌同步的研究在通信、信息科学、医学、生物工程等领域显示出巨大的发展潜力, 现已成为非线性系统理论中的热点和难题.

迄今为止, 人们对混沌同步进行了大量研究并提出多种同步方法^[2-12], 如驱动-响应同步方法及其各种变型方法、脉冲同步法、变量耦合同步法、参数自适应同步法等. 但是上述同步方法大都是针对相同混沌系统的自结构同步, 而对异结构同步问题的研究较少, 且要求系统模型精确可知, 系统参数恒定不变, 但在实际问题中由于混沌系统受到外界因素的干扰, 系统参数的摄动是不可避免的, 因此设计出能够抑制参数摄动的异结构同步控制器是很有必要的, 虽然有一些文章给出了异结构同步的实现方法^[13-16], 但都是针对具体的系统而言的, 尚且缺乏一般性, 另外都要求知道系统的精确模型, 不适用于参数摄动情形混沌同步.

针对以上存在的问题, 本文基于 Lyapunov 稳定

性理论结合反馈控制思想提出一种针对参数摄动的混沌异结构同步的新方法, 该方法模型通用, 适用范围广, 对参数摄动的影响有较强的鲁棒性, 且能够保证同步实现后, 控制量收敛到零. 数值仿真证实了该方法能够实现参数摄动下的异结构同步.

2. 同步控制器的设计

考虑如下混沌系统:

$$\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 表示系统的状态向量,

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T,$$

表示系统连续可微的非线性向量场, 把(1)式表示的系统作为驱动系统, 把加入控制项的另一混沌系统作为响应系统, 如下式:

$$\dot{y} = g(y) + u, \quad (2)$$

其中 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ 表示响应系统的状态向量,

$$g(y) = (g_1(y), g_2(y), \dots, g_n(y))^T,$$

表示响应系统连续可微的非线性向量场, $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ 表示控制器函数项, 且 $f(\cdot) \neq g(\cdot)$.

由于实际过程中, 系统的模型参数总是会发生微小的摄动, 使得模型的精确表达式不是恒定不变

^{*} 国家自然科学基金(批准号 60674073), 国家科技支撑计划资助项目(批准号 2006BAB14B05), 国家重点基础研究发展计划(973)项目(批准号 2006CB403405)资助的课题.

[†] E-mail: minhan@dlut.edu.cn

的,所以由(1)式和(2)式所示的驱动系统和响应系统表达式应表示如下:

$$\dot{x} = f(x) + \Delta f, \quad (3)$$

$$\dot{y} = g(y) + \Delta g + u. \quad (4)$$

一般来说,系统参数的摄动都是在有界范围内的,即满足

$$\|\Delta f\| \leq \alpha_1 \|x\| + \alpha_2, \quad (5)$$

$$\|\Delta g\| \leq \beta_1 \|y\| + \beta_2, \quad (6)$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$. 令状态误差的轨道向量为 $e = y - x$, 误差系统的状态方程可以描述如下:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{y} - \dot{x} \\ &= g(y) + \Delta g - f(x) - \Delta f + u \\ &= g(x + e) - f(x) + \Delta g - \Delta f + u, \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)^T$. 异结构同步的目标就是要能找到合适的控制器函数 $u(t)$ 使误差向量随时间的演化趋近于零, 即使下式成立:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0. \quad (8)$$

由于异结构同步中两系统的吸引子处在不同的空间区域上, 从而不具有相容性, 要实现同步则需要有外部控制作用对一个混沌系统的轨道进行切换, 使两个系统在同一混沌轨道上运行. 同时还要保证在误差向量为零时, 控制器函数的量也为零,

$$\lim_{\|e(t)\| \rightarrow 0} \|u(t)\| = 0, \quad (9)$$

即在同步达到后, 控制作用也随即为零, 驱动系统与响应系统在无外界控制时能够保持长时间的同步行为. 同步实现后, 同步的性态是否需要由外界控制作用来维持是混沌控制与混沌同步的区别.

一般说来, 由于异结构同步中非线性函数 $f(\cdot)$ 与 $g(\cdot)$ 的数学形式不一样, 使得其差 $g(\cdot) - f(\cdot)$ 很难表示成关于误差向量的线性形式, 设计出的同步控制器中都含有误差变量 e_i 和驱动系统变量 x_i ($i = 1, 2, \dots$). 如果设计出的控制器有独立的驱动系统变量的函数项 $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 则很难保证(9)式成立. 针对这个问题, 本文基于变结构控制思想, 采用符号函数与范数方法对控制器的形式进行数学处理, 来保证控制量在同步到达后也随即衰减到零.

定理 对于(3)式所表示的误差系统, 选取如下控制器函数:

$$\begin{aligned} u &= Ke - \gamma (\|g\| + \|f\| + \alpha_1 \|x\| \\ &\quad + \alpha_2 + \beta_1 \|y\| + \beta_2) \text{sign}(e), \end{aligned} \quad (10)$$

可以使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$, 且能够保证同步到达时, 控制量为零. 其中, K 为任意一负定矩阵, 参数 $\gamma >$

1 , $\|\cdot\|$ 为欧式空间的 2-范数,

$$\text{sign}(e) = \begin{cases} 1, & e > 0, \\ 0, & e = 0, \\ -1, & e < 0 \end{cases}$$

为符号函数.

证明 选取如下形式的 Lyapunov 函数:

$$V = \frac{1}{2} e^T e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i^2, \quad (11)$$

对(11)式关于时间求导, 并把控制器表达式(10)代入可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e^T \dot{e} \\ &= e^T (g - f + \Delta g - \Delta f + u) \\ &= e^T [g - f + \Delta g - \Delta f + Ke \\ &\quad - \gamma (\|g\| + \|f\| + \alpha_1 \|x\| \\ &\quad + \alpha_2 + \beta_1 \|y\| + \beta_2) \text{sign}(e)] \\ &= e^T Ke + e^T (g - f) + e^T (\Delta g - \Delta f) \\ &\quad - \gamma (\|g\| + \|f\| + \alpha_1 \|x\| \\ &\quad + \alpha_2 + \beta_1 \|y\| + \beta_2) e^T \text{sign}(e), \end{aligned}$$

根据范数不等式定理可知

$$\begin{aligned} e^T \text{sign}(e) &= \sum_{i=1}^n |e_i| \\ &\geq \sqrt{\sum_{i=1}^n |e_i|^2} = \|e\|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^T (g - f) &= \sum_{i=1}^n e_i (g_i - f_i) \\ &\leq \|e\| \|g - f\| \\ &\leq \|e\| (\|g\| + \|f\|), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^T (\Delta g - \Delta f) &= \sum_{i=1}^n e_i (\Delta g_i - \Delta f_i) \\ &\leq \|e\| \|\Delta g - \Delta f\| \\ &\leq \|e\| (\|\Delta g\| + \|\Delta f\|). \end{aligned}$$

再由(5)式和(6)式可知

$$\begin{aligned} e^T (\Delta g - \Delta f) &\leq \|e\| (\|\Delta g\| + \|\Delta f\|) \\ &\leq \|e\| (\beta_1 \|y\| + \beta_2 + \alpha_1 \|x\| + \alpha_2), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e^T Ke + e^T (g - f) + e^T (\Delta g - \Delta f) \\ &\quad - \gamma (\|g\| + \|f\| + \alpha_1 \|x\| \\ &\quad + \alpha_2 + \beta_1 \|y\| + \beta_2) e^T \text{sign}(e) \\ &\leq e^T Ke + \|e\| (\|g\| + \|f\|) \\ &\quad + \|e\| (\beta_1 \|y\| + \beta_2 + \alpha_1 \|x\| + \alpha_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\gamma(\|g\| + \|f\| + \alpha_1\|x\| \\
 & + \alpha_2 + \beta_1\|y\| + \beta_2)\|e\| \\
 & = e^T K e + (1 - \gamma)\|e\|(\|g\| + \|f\| \\
 & + \alpha_1\|x\| + \alpha_2 + \beta_1\|y\| + \beta_2).
 \end{aligned}$$

由于 V 是正定函数, 取矩阵 K 为负定矩阵且参数 $\gamma > 1$, 则可保证 $\dot{V} \leq 0$. 根据 Lyapunov 稳定性定理可以误差系统 (7) 的零解是渐进稳定的, 即其解满足 (8) 式, 驱动系统和响应系统能够达到同步. 当误差变量为零, 即 $e = 0$ 时, 根据 (10) 式可以得出 $u = 0$, 从而满足 (9) 式, 证毕.

注 1 因为混沌变量是有界的, $f(\cdot)$ 与 $g(\cdot)$ 均为连续可微的非线性函数, 根据闭区域上的连续函数有界定理可知, $f(\cdot)$ 与 $g(\cdot)$ 的各个分量函数是有界的, 从而其 2-范数也是有界的, 即 $\|g\|, \|f\|, \|x\|, \|y\|$ 都是有界的, 所以根据 (10) 式可知, u 不会趋于无穷大, 即用有限能量可以实现同步.

注 2 从控制器表达式 (10) 可以看出, 由于控制器函数中符号函数的引入, 控制器项的形式在不同的相空间是不同的, 使得该同步控制器不是连续控制, 这类似于变结构控制方法. 正是这种类似变结构的不连续控制方式使两混沌系统在参数摄动情形下实现了同步. 另外, 若驱动系统与响应系统结构相同的自结构同步, 则控制器的形式可以适当简化.

3. 仿真算例

3.1. Liu 系统与 Lü 系统的异结构同步仿真

考虑如下方程所描述的 Liu 系统^[15]

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= f(x) + \Delta f \\
 &= \begin{bmatrix} a(x_2 - x_1) \\ bx_1 - kx_1x_3 \\ -cx_3 + hx_1^2 \end{bmatrix} + \Delta f, \quad (12)
 \end{aligned}$$

当参数取 $a = 10, b = 40, k = 1, c = 2.5, h = 4$ 时, 系统处于混沌状态, Δf 为系统参数的摄动项, 以 Liu 系统为驱动系统, 选取受控的 Lü 系统为响应系统, 响应系统方程如下:

$$\begin{aligned}
 \dot{y} &= g(y) + \Delta g + u \\
 &= \begin{bmatrix} \rho(y_2 - y_1) \\ -y_1y_3 + \nu y_2 \\ y_1y_2 - \mu y_3 \end{bmatrix} + \Delta g + u, \quad (13)
 \end{aligned}$$

其中参数取 $\rho = 36, \mu = 3, \nu = 20$, Δg 为响应系统的参数摄动项. 假定驱动系统与响应系统的参数摄动项满足下式关系:

$$\begin{aligned}
 \Delta f &= [0.3\cos(t)\|x\| + 0.1\sin(2t)]I_n, \\
 \Delta g &= [0.3\cos(t)\|y\| + 0.1\sin(2t)]I_n,
 \end{aligned}$$

其中 I_n 为正的单位矩阵. 根据 (5) 式和 (6) 式可知, 参数 $\alpha_1 = \beta_1 = 0.3, \alpha_2 = \beta_2 = 0.1$. 根据 (10) 式所表示的控制器函数, 取 $K = -3I$, 参数 $\gamma = 1.2$. 驱动系统初值取 $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (3, 1.5, 2)$, 响应系统初值取 $(y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (5, 3, 0.8)$, 采用四阶 Runge-Kutta 法进行计算, 仿真结果如图 1 所示.

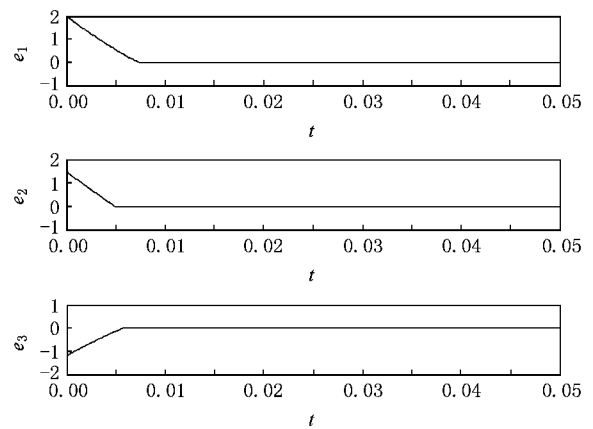


图 1 Liu 系统和 Lü 系统的误差同步曲线图

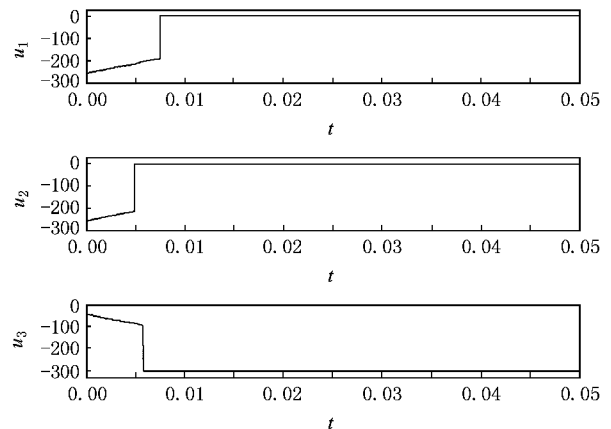


图 2 Liu 系统和 Lü 系统的同步控制量曲线图

从图 1 中可以看出, 采用 (10) 式所示的控制器, 能够使 Liu 系统与 Lü 系统达到同步, 且同步过程较为迅速, 误差变量都是无振荡地单侧渐进收敛. 从图 2 中可以看出, 控制量能在同步到达时收敛到零. 通过计算可知 Liu 系统的 Lyapunov 指数谱为 1.677,

-0.103, -1.924, 同步前 Li 系统的 Lyapunov 指数谱为 1.298, -0.043, -1.460, 同步实现后, 两混沌系统的动力学轨道趋于一致, Lyapunov 指数谱也相同. 控制器引入只是改变了响应系统的混沌轨道, 使之向驱动系统的混沌轨道切换, 但没有破坏响应系统的稳定性和混沌特性.

3.2. 超混沌 Chen 系统与超混沌 Rössler 系统的异结构同步仿真

超混沌系统是比一般的低维混沌系统的运动形式更为复杂的一类混沌系统, 其主要特点是至少在四维及更高维的非线性系统中具有两个以上的正的 Lyapunov 指数, 即在多个方向上具有不稳定流形. 总体来说, 对异结构超混沌系统的同步比常规混沌系统的同步难度要大.

考虑以有摄动项的超混沌 Chen 系统为驱动系统, 系统方程如下:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \Delta f \\ &= \begin{bmatrix} a_1(x_2 - x_1) + x_4 \\ d_1 x_1 - x_1 x_3 + c_1 x_2 \\ x_1 x_2 - b_1 x_3 \\ x_2 x_3 + r x_4 \end{bmatrix} + \Delta f, \end{aligned} \quad (14)$$

其中参数取 $a_1 = 35, b_1 = 3, c_1 = 12, d_1 = 7, r = 0.5$, 响应系统为受控的超混沌 Rössler 系统, 表达式如下:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= g(y) + \Delta g + u \\ &= \begin{bmatrix} -y_2 - y_3 \\ y_1 + a_2 y_2 + y_4 \\ b_2 + y_1 y_3 \\ -c_2 x_3 + d_2 x_4 \end{bmatrix} + \Delta g + u, \end{aligned} \quad (15)$$

参数取 $a_2 = 0.25, b_2 = 3, c_2 = 0.5, d_2 = 0.05$, 把(15)式与(14)式相减得到误差系统方程

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \end{bmatrix} = g(y) - f(x) + \Delta g - \Delta f + u \\ &= \begin{bmatrix} -y_2 - y_3 \\ y_1 + a_2 y_2 + y_4 \\ b_2 + y_1 y_3 \\ -c_2 x_3 + d_2 x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1(x_2 - x_1) + x_4 \\ d_1 x_1 - x_1 x_3 + c_1 x_2 \\ x_1 x_2 - b_1 x_3 \\ x_2 x_3 + r x_4 \end{bmatrix} \\ &\quad + \Delta g - \Delta f + u. \end{aligned} \quad (16)$$

驱动系统与响应系统的摄动项如下:

$$\Delta f = [0.5 \sin(3t) \|x\| + 0.3 \sin(2t)] I_n,$$

$$\Delta g = [0.5 \cos(4t) \|y\| + 0.2 \sin(2t)] I_n,$$

其中 I_n 为正的单位矩阵. 根据(10)式所表示的控制器函数, 取矩阵 $K = -5I$, 参数取 $\gamma = 1.5, \alpha_1 = \beta_1 = 0.5, \alpha_2 = 0.3, \beta_2 = 0.2$, 驱动系统初值 $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (3, -4, 2, 2)$, 响应系统初值 $(y_1(0), y_2(0), y_3(0), y_4(0)) = (1, -2.5, 0.7, -0.4)$, 数值仿真结果如图 3 所示.

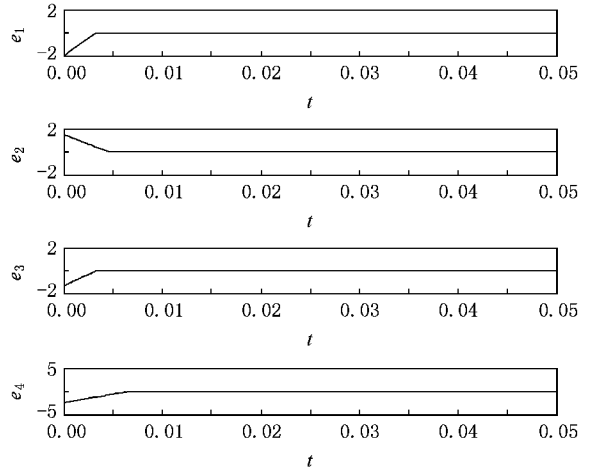


图 3 超混沌 Chen 系统和超混沌 Rössler 系统的同步误差曲线图

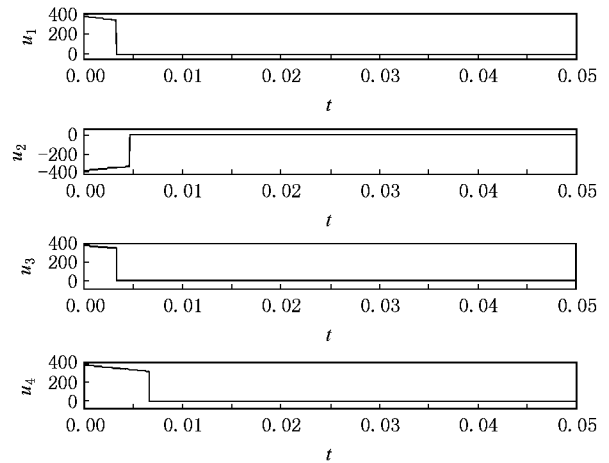


图 4 超混沌 Chen 系统和超混沌 Rössler 系统的同步控制量曲线图

从图 3 和图 4 所示的仿真结果可以看出, 本文所提方法也能够适用于超混沌系统的异结构同步, 而且各误差变量均能快速实现单侧渐进收敛, 控制量也能在同步后收敛到零. 同步前超混沌 Rössler 系统的 Lyapunov 指数为 0.159, 0.035, -0.041, -6.497, 同步后响应系统的 Lyapunov 指数与驱动系

统超混沌 Chen 系统一致,为 $0.573, 0.118, -0.003, -4.841$. 对比同步前后的 Lyapunov 指数可以看出, 控制器通过切换响应系统的混沌轨道使两超混沌系统在有限时间内实现同步, 并使响应系统在同步过程中保持了稳定性和具有两个正的 Lyapunov 指数的超混沌的特性.

从上述数值仿真算例可以看出, 本文所提出的方法不仅对一般的同维异结构混沌系统能够实现同步, 而且对异结构超混沌系统也能实现同步, 且同步过程所需时间短, 控制量能够在同步实现后过渡到零, 不同于一般的非线性控制那样, 要使控制器一直处于工作状态. 另外从仿真图中还可看出该方法可使误差变量实现单侧渐进收敛, 同步过程在大范围内无振荡.

4. 结 论

本文提出一种系统参数摄动情形下的混沌异结构同步方法, 根据 Lyapunov 稳定性理论证明了方法的可靠性, 有效地实现了一大类混沌系统的异结构同步, 并指出控制量能够在同步实现后衰减为零, 其物理意义是避免控制的长期作用, 保证系统能够在有限的能量作用下实现长程同步. 由于系统的参数摄动问题在实际的混沌系统是存在的, 且异结构同步问题在混沌同步研究中更具有一般性, 若能实现参数摄动下的异结构混沌系统的同步, 则明显能够增强信号传送的保密性和抗破译性, 在保密性通信领域有更大的应用价值.

-
- [1] Pecora L M ,Carroll T L 1990 *Physical Review Letters* **64** 821
- [2] Li D M ,Lu J A ,Wu X Q 2004 *Wuhan University Journal* **50** 280 (in Chinese) [李大美、陆君安、吴晓群 2004 武汉大学学报 **50** 280]
- [3] Liu Y Z ,Lin C S ,Fei S M 2006 *Systems Engineering and Electronics* **28** 591 (in Chinese) [刘扬正、林长圣、费树岷 2006 系统工程与电子技术 **28** 591]
- [4] Wu X J ,Wang X Y 2006 *Acta Physica Sinica* **55** 6261 (in Chinese) [武相军、王兴元 2006 物理学报 **55** 6261]
- [5] Zhang Y P ,Sun J T 2004 *Chaos ,Solitons and Fractals* **22** 199
- [6] Jiang G P ,Wallace Kit-Sang Tang ,Chen G R 2003 *Chaos ,Solitons and Fractals* **15** 925
- [7] Sun J T ,Zhang Y P 2004 *Chaos ,Solitons and Fractals* **19** 93
- [8] Lü J H ,Zhou T S ,Zhang S C 2002 *Chaos ,Solitons and Fractals* **14** 529
- [9] Zhou T S ,Lü J H ,Chen G R *et al* 2002 *Physics Letters A* **301** 231
- [10] Yue D ,Jun Y 2003 *Acta Physica Sinica* **52** 292 (in Chinese) [岳 东、Jun Y 2003 物理学报 **52** 292]
- [11] Huang W ,Zhang H G ,Wang Z L 2005 *Journal of System Simulation* **17** 2689 (in Chinese) [黄 玮、张化光、王智良 2005 系统仿真学报 **17** 2689]
- [12] Lei Y M ,Xu W ,Shen J W 2007 *Chaos ,Solitons and Fractals* **31** 371
- [13] Ning D ,Lu J A 2005 *Acta Physica Sinica* **54** 4590 (in Chinese) [宁 娣、陆君安 2005 物理学报 **54** 4590]
- [14] Agiza H N ,Yassen M T 2001 *Physics Letters A* **278** 191
- [15] Liu C X ,Liu T ,Liu L *et al* 2002 *Chaos ,Solitons and Fractals* **22** 1031
- [16] Cai G L ,Huang J J 2006 *Acta Phys . Sin .* **55** 3997 (in Chinese) [蔡国梁、黄娟娟 2006 物理学报 **55** 3997]

A new approach to synchronization between two different chaotic systems with parametric perturbation^{*}

Han Min[†] Niu Zhi-Qiang Han Bing

(School of Electronic and Information Engineering ,Dalian University of Technology ,Dalian 116023 ,China)

(Received 7 January 2008 ; revised manuscript received 14 April 2008)

Abstract

The problem of chaotic synchronization between two different chaotic systems with parametric perturbation is studied. Based on Lyapunov stability law and norm theory ,a sufficient condition to synchronize two different chaotic systems with parametric perturbation is given and a general way of choosing the controller is proposed. This method can realize the synchronization of two chaotic systems with parametric perturbation if the dimensions of the chaotic systems are equal and the state variables are measurable. And it is required that the control must decay to zero together with the errors as soon as the synchronization is reached. The proposed method is robust and can be used widely. Numerical simulations of synchronization between two chaotic systems and synchronization between two hyperchaotic systems are provided to show the effectiveness and feasibility of the method.

Keywords : chaos , hyperchaos , synchronization , Lyapunov function

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60674073) ,the National Key Technology R&D Program (Grant No. 2006BAB14B05) ,the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. 2006CB403405).

[†] E-mail :minhan@dlut.edu.cn