

# 一个分数阶新超混沌系统的同步<sup>\*</sup>

张若洵<sup>1)†</sup> 杨世平<sup>1)</sup>

1) (河北师范大学物理科学与信息工程学院, 石家庄 050016)

2) (邢台学院初等教育学院, 邢台 054001)

(2008 年 2 月 13 日收到, 2008 年 3 月 29 日收到修改稿)

研究了分数阶混沌系统的同步问题, 以分数阶新超混沌系统为例, 设计了三种同步方法, 运用拉普拉斯变换理论和分数阶线性稳定理论给以证明, 数值仿真或电路仿真证实了所提同步方法的有效性和可行性.

关键词: 分数阶, 混沌同步, 新超混沌系统

PACC: 0545

## 1. 引言

分数阶微积分 (fractional calculus) 已有 300 多年的历史, 其发展几乎与整数阶微积分同步, 但将其应用到物理学和工程学的研究热潮还是最近几十年兴起的. 许多物理系统能展现出分数阶动力学行为, 例如, 沾滞系统、介质极化、电极-电解液极化、(电缆的)管道边界层效应、有色噪声和电磁波等. 最近, 分数阶混沌系统又引起人们广泛的兴趣和深入的研究. 在 Chua 电路<sup>[1]</sup>、Lorenz 系统<sup>[2]</sup>、Chen 系统<sup>[3-5]</sup>、Lü 系统<sup>[6]</sup>、Liu 系统<sup>[7,8]</sup>、Duffing 系统<sup>[9]</sup>、Sprott 系统<sup>[10,11]</sup>以及 Rossler 混沌和超混沌系统<sup>[12]</sup>、新超混沌系统<sup>[13]</sup>中, 通过计算机数值仿真发现, 当系统的阶数为分数时, 系统仍呈现混沌状态, 且更能反映系统所呈现的物理现象.

另一方面, 自从 1990 年 Pecora 和 Carroll<sup>[14]</sup>发现了两个混沌系统可以实现同步以来, 就掀起了混沌同步问题研究的热潮. 分数阶混沌系统的同步控制由于其在保密通信等领域拥有潜在的应用前景成为了一个研究热点. 本文研究分数阶新超混沌系统<sup>[13]</sup>的同步问题, 设计了三种同步方法, 利用拉普拉斯变换理论和分数阶线性稳定理论, 证明了所提同步方法的有效性. 数值仿真或电路仿真说明了所提方法的有效性.

## 2. 分数阶微积分定义与系统描述

在分数阶微积分的研究过程中, 对分数阶导数的概念有多种定义, 本文采用 Caputo 微分定义来研究分数阶混沌动力学行为, Caputo 微分定义为

$$D_*^\alpha y(x) = J^{m-\alpha} y^{(m)}(x), \alpha > 0, \quad (1)$$

这里  $m = [\alpha]$ , 为第一个不小于  $\alpha$  的整数,  $y^{(m)}$  为  $y$  的  $m$  阶导数,  $J^\beta$  是  $\beta$  阶 Riemann-Liouville 积分算子, 即

$$J^\beta z(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-t)^{\beta-1} z(t) dt, \beta > 0, \quad (2)$$

其中  $\Gamma(\cdot)$  是 Gamma 函数.  $D_*^\alpha$  通常称为  $\alpha$  阶 Caputo 微分算子.

最近, 刘崇新<sup>[13]</sup>发现了一个超混沌系统, 并对其分数阶混沌电路的实现进行了研究, 这个分数阶超混沌系统的最低阶数为 0.4 阶, 系统模型为

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} &= -10x + yz + z, \\ \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} &= 2.5y - xz, \\ \frac{d^\alpha z}{dt^\alpha} &= xy - 4z - 2w, \\ \frac{d^\alpha w}{dt^\alpha} &= -0.25x, \end{aligned} \quad (3)$$

这里  $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = D_*^\alpha$ ,  $\alpha \in [0.1, 1]$ , 当  $\alpha = 1$  时, 系统(3)为

<sup>\*</sup> 河北省自然科学基金 (批准号: A2006000128) 资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: xtzhrx@126.com

整数阶超混沌系统,其吸引子见文献 [13];当  $\alpha = 0.9$  时,其分数阶混沌系统的吸引子如图 1 所示.

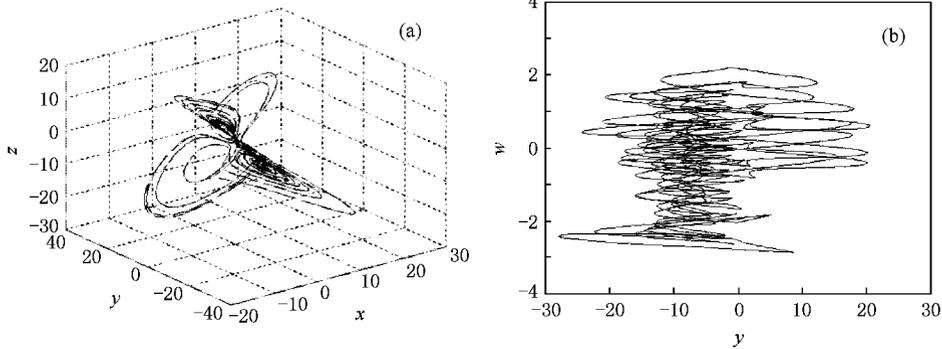


图 1 新超混沌系统分数阶混沌吸引子 ( $\alpha = 0.9$ ) (a)  $x$ - $y$ - $z$  空间吸引子 (b)  $y$ - $w$  平面吸引子

### 3. 分数阶新超混沌系统的同步设计

#### 3.1. 用驱动-响应法同步

为了观察两个分数阶超混沌系统的同步行为,我们以分数阶新超混沌系统为驱动系统(四个状态变量下标以  $m$  记),驱动系统为包含状态变量( $x, w$ )的子系统(状态变量下标以  $s$  记),用混沌信号  $y_m, z_m$  驱动响应子系统,控制器  $u = -(w_s - w_m)$ ,即驱动系统和响应系统分别为

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha x_m}{dt^\alpha} &= -10x_m + y_m z_m + z_m, \\ \frac{d^\alpha y_m}{dt^\alpha} &= 2.5y_m - x_m z_m, \\ \frac{d^\alpha z_m}{dt^\alpha} &= x_m y_m - 4z_m - 2w_m, \\ \frac{d^\alpha w_m}{dt^\alpha} &= -0.25x_m, \end{aligned} \quad (4)$$

和

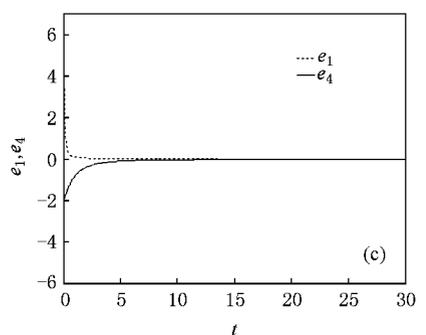
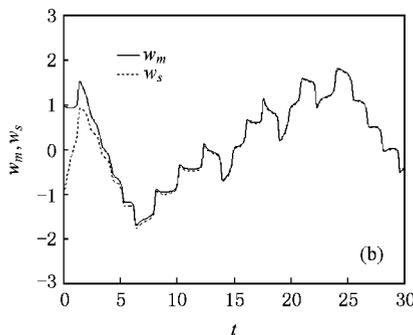
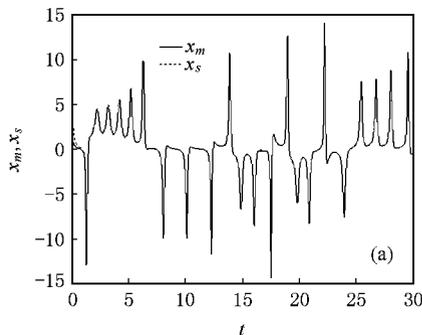


图 2 系统 (4) 和 (5) 同步历程与误差系统演化曲线 (a)  $x_m, x_s$  同步历程; (b)  $w_m, w_s$  同步历程; (c) 误差  $e_1, e_4$  演化曲线

$$\frac{d^\alpha x_s}{dt^\alpha} = -10x_s + y_m z_m + z_m,$$

$$\frac{d^\alpha w_s}{dt^\alpha} = -0.25x_s + u. \quad (5)$$

令同步误差  $e_1 = x_s - x_m, e_4 = w_s - w_m$ , (5) 式减去 (4) 式, 得

$$\frac{d^\alpha e_1}{dt^\alpha} = -10e_1,$$

$$\frac{d^\alpha e_4}{dt^\alpha} = -0.25e_1 - e_4. \quad (6)$$

(6) 式改写为

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ -0.25 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_4 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_4 \end{pmatrix}.$$

通过计算得到  $A$  的两个特征值  $\lambda_i (i = 1, 2)$  均为负实数, 即  $|\arg(\lambda_i)| = \pi > \alpha\pi/2$ , 根据分数阶线性系统稳定原理<sup>[15]</sup>, 误差系统 (6) 的零点是渐进稳定的, 即有  $\lim_{n \rightarrow \infty} e_1 = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} e_4 = 0$ .

以上分析表明分数阶驱动系统 (4) 和分数阶响应系统 (5) 在信号  $y_m, z_m$  驱动下同步. 采用预估-校

正解法(the predictor-corrector algorithm)<sup>[16,17]</sup>进行数值仿真,时间步长为 0.01,  $\alpha = 0.9$ , 状态初始值  $x_m(0)=2, y_m(0)=1, z_m(0)=3, w_m(0)=1; x_s(0)=10, w_s(0)=-1$ , 仿真结果如图 2, 也证实了系统(3)和(4)渐进同步.

### 3.2 通过单向耦合同步

仍用(3)式为驱动系统, 响应系统为

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha x_s}{dt^\alpha} &= -10x_s + y_s z_s + z_s, \\ \frac{d^\alpha y_s}{dt^\alpha} &= 2.5y_s - x_s z_s - k_2(y_s - y_m), \\ \frac{d^\alpha z_s}{dt^\alpha} &= x_s y_s - 4z_s - 2w_s, \\ \frac{d^\alpha w_s}{dt^\alpha} &= -0.25x_s - k_4(w_s - w_m), \end{aligned} \quad (7)$$

这里  $k_2, k_4$  是耦合强度, 令同步误差  $e_1 = x_s - x_m, e_2 = y_s - y_m, e_3 = z_s - z_m, e_4 = w_s - w_m$ . 从(7)式减去(4)式得误差系统

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha e_1}{dt^\alpha} &= -10e_1 + y_s e_3 + z_m e_2 + e_3, \\ \frac{d^\alpha e_2}{dt^\alpha} &= 2.5e_2 - x_s e_3 - z_m e_1 - k_2 e_2, \\ \frac{d^\alpha e_3}{dt^\alpha} &= x_s e_2 + y_m e_1 - 4e_3 - 2e_4, \\ \frac{d^\alpha e_4}{dt^\alpha} &= -0.25e_1 - k_4 e_4. \end{aligned} \quad (8)$$

对(8)式两端进行拉普拉斯变换, 令  $E_i(s) = \mathcal{L}\{e_i(t)\} (i=1, 2, 3, 4)$ , 并且利用  $\mathcal{L}\{d^\alpha e_i/dt^\alpha\} = s^\alpha E_i(s) - s^{\alpha-1} e_i(0) (i=1, 2, 3, 4)$ , 我们得到

$$\begin{aligned} & s^\alpha E_1(s) - s^{\alpha-1} e_1(0) \\ &= -10E_1(s) + \mathcal{L}\{y_s e_3\} + \mathcal{L}\{z_m e_2\} + E_3(s), \\ & s^\alpha E_2(s) - s^{\alpha-1} e_2(0) \\ &= (2.5 - k_2)E_2(s) - \mathcal{L}\{x_s e_3\} - \mathcal{L}\{z_m e_1\}, \\ & s^\alpha E_3(s) - s^{\alpha-1} e_3(0) \\ &= \mathcal{L}\{x_s e_2\} + \mathcal{L}\{y_m e_1\} - 4E_3(s) - 2E_4(s), \\ & s^\alpha E_4(s) - s^{\alpha-1} e_4(0) \\ &= -0.25E_1(s) - k_4 E_4(s). \end{aligned} \quad (9)$$

由(9)式得到

$$\begin{aligned} E_1(s) &= \frac{\mathcal{L}\{y_s e_3\} + \mathcal{L}\{z_m e_2\} + E_3(s) + s^{\alpha-1} e_1(0)}{s^\alpha + 10}, \\ E_2(s) &= \frac{-\mathcal{L}\{x_s e_3\} - \mathcal{L}\{z_m e_1\} + s^{\alpha-1} e_2(0)}{s^\alpha + k_2 - 2.5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_3(s) &= \frac{\mathcal{L}\{x_s e_2\} + \mathcal{L}\{y_m e_1\} - 2E_4(s) + s^{\alpha-1} e_3(0)}{s^\alpha + 4}, \\ E_4(s) &= \frac{-0.25E_1(s) + s^{\alpha-1} e_4(0)}{s^\alpha + k_4}. \end{aligned} \quad (10)$$

根据拉普拉斯变换理论的终值性质, 有

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) &= \lim_{s \rightarrow 0^+} sE_1(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s\mathcal{L}\{y_s e_3\} + s\mathcal{L}\{z_m e_2\} + sE_3(s)}{10}, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e_2(t) &= \lim_{s \rightarrow 0^+} sE_2(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{-s\mathcal{L}\{x_s e_3\} - s\mathcal{L}\{z_m e_1\}}{k_2 - 2.5}, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e_3(t) &= \lim_{s \rightarrow 0^+} sE_3(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s\mathcal{L}\{x_s e_2\} + s\mathcal{L}\{y_m e_1\} - 2sE_4(s)}{4}, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e_4(t) &= \lim_{s \rightarrow 0^+} sE_4(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{-0.25sE_1(s)}{k_4} \\ &= -\frac{0.25}{k_4} \lim_{t \rightarrow 0^+} e_1(t) \\ &= -\frac{0.25}{k_4} \lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t). \end{aligned} \quad (11)$$

如果假设  $E_3(s)$  有限,  $E_1(s)$  或  $E_4(s)$  有限, 那么可得  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_3(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} e_4(t) = 0$ , 由于混沌吸引域的有限性, 存在某一个正数  $M$ , 使得  $\max(|x_m|, |y_m|, |z_m|) \leq M$ , 所以  $\mathcal{L}\{z_m e_1\} \leq ME_1(s)$ . 又  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = 0$ , 于是  $x_s$  有限, 不失一般性, 设  $|x_s| \leq M$ , 则  $\mathcal{L}\{x_s e_3\} \leq ME_3(s)$ . 所以由(11)式可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_2(t) = 0.$$

因此, 在假设  $E_3(s)$  有限,  $E_1(s)$  或  $E_4(s)$  有限的情况下, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

这表明系统(4)和系统(7)达到同步.

用电子仿真软件 Multisim2001 进行仿真, 同步电路图如图 3 所示, 其中运放(LM741)及其外围可实现加、减、反相、传递函数<sup>[13]</sup>运算; 模拟乘法器(AD633)可实现非线性乘积项. 图 3(I)为分数阶驱动系统(4)的电路, (II)为响应系统(7)的电路.  $k_2 = 10^6/R_2, k_4 = 10^6/R_4$ , 所以改变  $R_2, R_4$  的大小即可调节增益  $k_2, k_4$ . 电路仿真时, 以 5 k $\Omega$  为步长, 调节  $R_2, R_4$  的大小, 结果表明,  $R_4$  取值任意,  $R_2$  取值

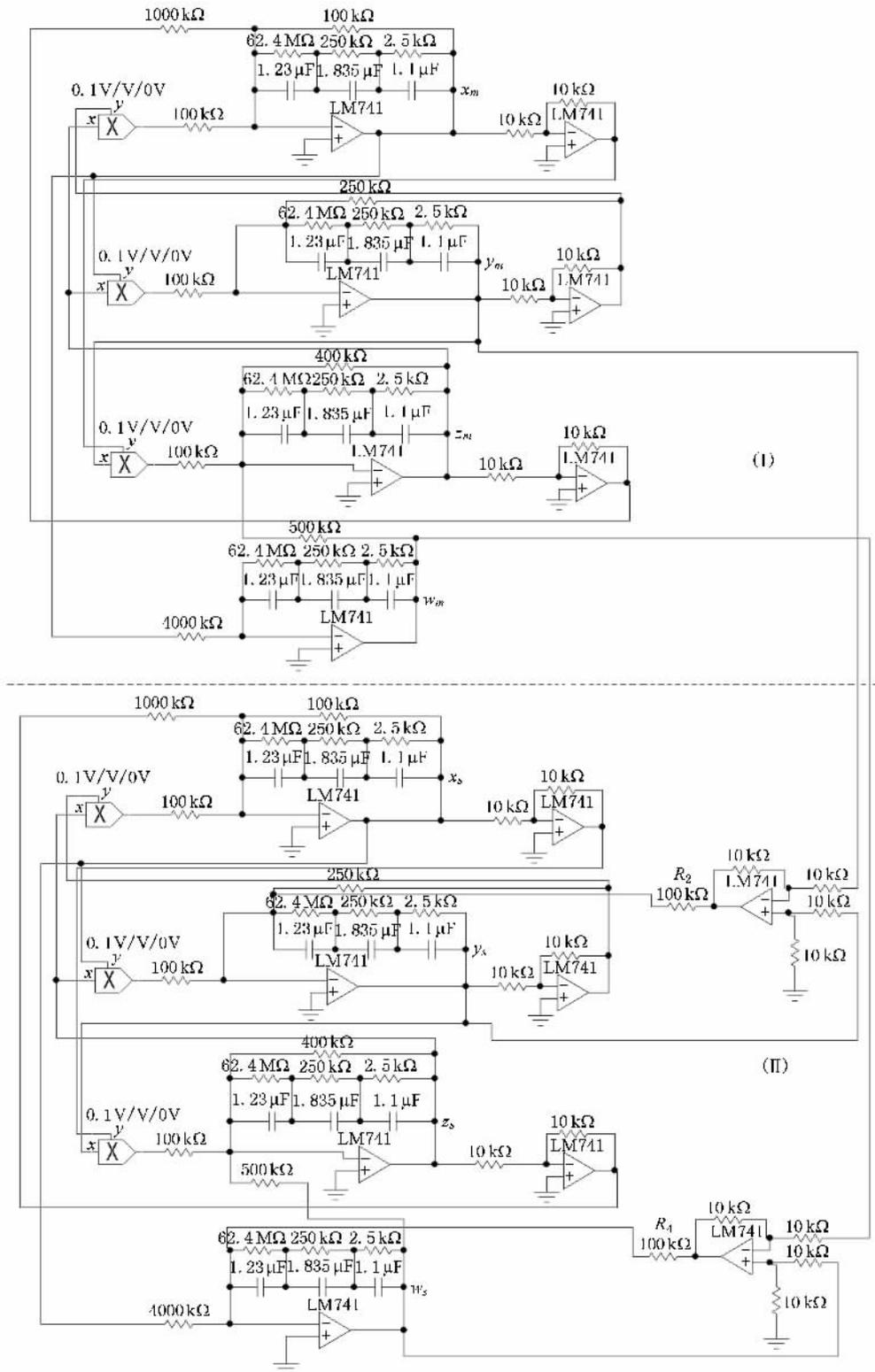


图3 分数阶新超混沌同步电路图( $\alpha = 0.9$ ) (I) 驱动系统电路 (II) 受控的响应系统电路

在  $350\text{ k}\Omega$ — $25\text{ k}\Omega$  (即  $k_2$  取 3—40) 之间时, 系统 (4) 和 (7) 同步, 同步仿真图如图 4 所示 (取  $R_2 = R_4 = 100\text{ k}\Omega$ ). 仿真结果表明, 分数阶系统 (4) 和 (7) 同步.

由于 Multisim2001 软件采用的是实际电路元件模型, 所以其仿真实验与实际电路应该是基本相符的, 因而仿真实验结果是有效的.

### 3.3. 基于反馈线性化的同步

通过非线性反馈使得非线性的混沌同步误差系统转变成线性系统, 从而将复杂的非线性混沌系统

的同步控制问题转化为线性系统的控制问题, 我们称之为基于反馈线性化的混沌同步法. 本节用此方法实现分数阶新超混沌的同步. 仍用(4)式为驱动系统, 并改写为

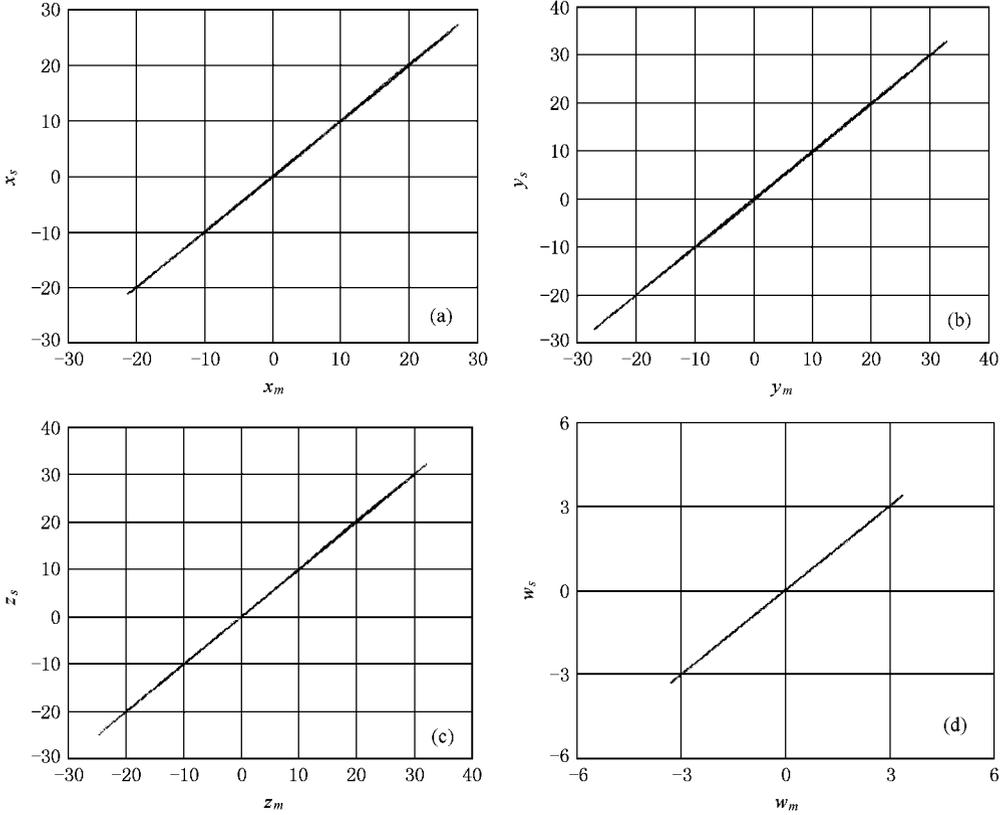


图4 系统(4)和系统(7)电路仿真同步图 (a)  $x_m - x_s$  同步 (b)  $y_m - y_s$  同步 (c)  $z_m - z_s$  同步 (d)  $w_m - w_s$  同步

$$\begin{pmatrix} \frac{d^\alpha x_m}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha y_m}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha z_m}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha w_m}{dt^\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \\ w_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_m z_m \\ -x_m z_m \\ x_m y_m \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4')$$

则响应系统为

$$\begin{pmatrix} \frac{d^\alpha x_s}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha y_s}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha z_s}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha w_s}{dt^\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \\ w_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_s z_s \\ -x_s z_s \\ x_s y_s \\ 0 \end{pmatrix} + u. \quad (12)$$

选取如下控制器：

$$u = \begin{pmatrix} y_m z_m \\ -x_m z_m \\ x_m y_m \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_s z_s \\ -x_s z_s \\ x_s y_s \\ 0 \end{pmatrix} - BKe, \quad (13)$$

其中  $B \in R^{4 \times 1}$ ,  $K \in R^{1 \times 4}$ ,  $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)^T$ ,  $e_1 = x_s - x_m$ ,  $e_2 = y_s - y_m$ ,  $e_3 = z_s - z_m$ ,  $e_4 = w_s - w_m$ . 用 (12) 式减去 (4') 式并把 (13) 式代入得误差系统

$$\begin{pmatrix} \frac{d^\alpha e_1}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha e_2}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha e_3}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha e_4}{dt^\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e - BKe$$

$$= (A - BK)e. \quad (14)$$

选取  $B = (0 \ 1 \ 0 \ 1)^T$  则  $(A, B)$  满足可控性条件, 故总可以选取适当的  $K$ , 使  $(A - BK)$  特征值  $\lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$  都具有负实部, 即  $|\arg(\lambda_i)| > \pi/2 > \alpha\pi/2$ . 根据分数阶线性系统稳定原理, 误差系统 (14) 的零点是渐进稳定的, 即有  $\lim_{n \rightarrow \infty} e_i = 0 (i = 1, 2, 3, 4)$ .

选取位置极点  $P = (-10, -7.5, -4, -1)$ , 通过极点配置得  $K = (0.0307, 14.0345, 0.0432, -3.0345)$ . 采用预估-校正解法进行数值仿真, 时间步长为 0.01,  $\alpha = 0.9$ , 状态初始值  $x_m(0) = 2, y_m(0) = 1, z_m(0) = 3, w_m(0) = 1; x_s(0) = -10, y_s(0) = 10, z_s(0) = 10, w_s(0) = -1$ , 仿真结果如图 5 所示. 图 5 (f) 是受控的响应系统的吸引子, (a)~(d) 是对应状态同步历程, (e) 为同步误差随时间的变化, 表明系统 (4') 和系统 (12) 渐进同步.

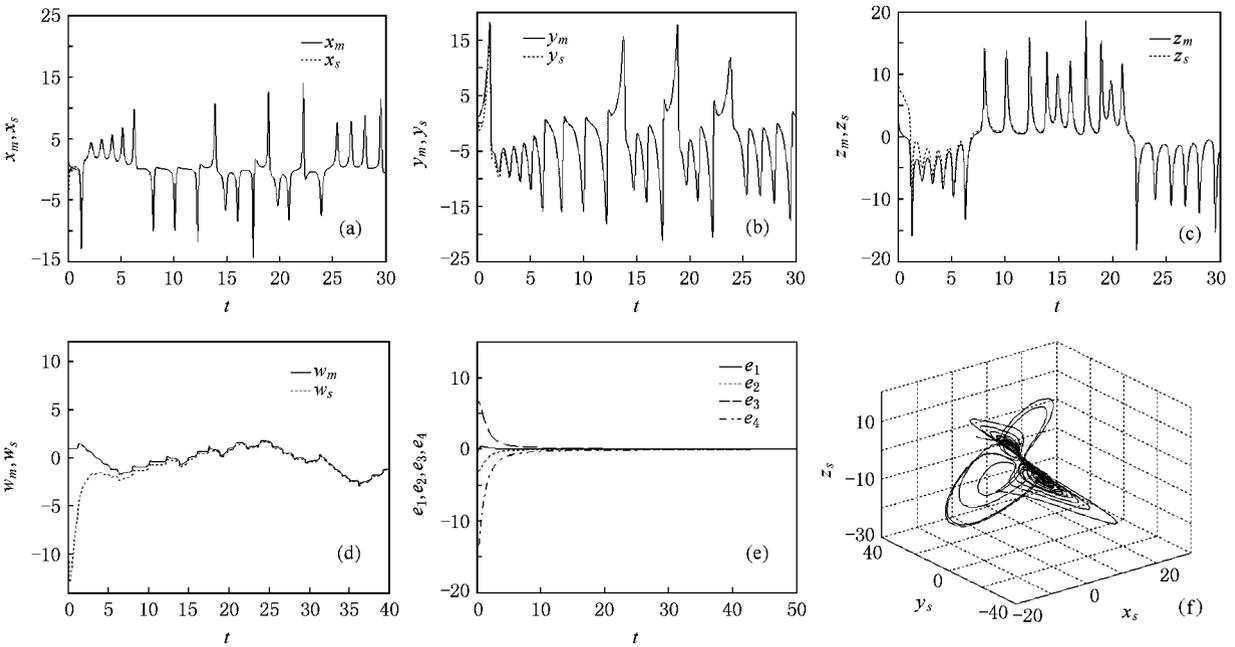


图 5 分数阶系统 (4) 和系统 (12) 同步仿真结果 (a)~(d) 对应状态同步历程 (e) 分数阶误差系统 (14) 的误差  $e$  的演化曲线 (f) 响应系统的吸引子

### 4. 结 论

文中设计了三种同步分数阶新超混沌系统的方法, 理论上证明了所设计控制器的正确性. 数值仿真

或电路仿真进一步说明了所提方法的可行性和有效性, 所提同步方法具有一定的普适性, 可应用于其他分数阶混沌系统的同步. 数值仿真和电路仿真方法亦可用于其他分数阶混沌系统的同步仿真.

- [ 1 ] Hartly T T , Lorenzo C F , Qammer H K 1995 *IEEE Trans. Circuits and Systems* **42** 485
- [ 2 ] Grigorenko I , Grigorenko E 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 034101
- [ 3 ] Li C P , Peng G J 2004 *Chaos, Solitons & Fractals* **22** 443
- [ 4 ] Li C G , Chen G R 2004 *Chaos, Solitons & Fractals* **22** 549
- [ 5 ] Lu J G , Chen G R 2006 *Chaos, Solitons & Fractals* **27** 685
- [ 6 ] Deng W H , Li C P 2005 *Physica A* **353** 61
- [ 7 ] Wang F Q , Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3922 ( in Chinese )  
[ 刘发强、刘崇新 2006 物理学报 **55** 3922 ]
- [ 8 ] Chen X R , Liu C X , Wang F Q , Li Y X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1416 ( in Chinese ) [ 李向荣、刘崇新、刘发强、李永勋 2008 物理学报 **57** 1416 ]
- [ 9 ] Gao X , Yu J B 2005 *Chaos, Solitons & Fractals* **24** 1097
- [ 10 ] Ahamd W M , Sprott J C 2003 *Chaos, Solitons & Fractals* **16** 339
- [ 11 ] Gao X , Yu J B 2005 *Chin. Phys. Lett.* **14** 908
- [ 12 ] Li C G , Chen G R 2004 *Physica A* **341** 55
- [ 13 ] Liu C X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6865 ( in Chinese ) [ 刘崇新 2007 物理学报 **56** 6865 ]
- [ 14 ] Pecora L M , Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [ 15 ] Matignon D 1996 *In: IMACS, IEEE-SMC, Lille, France* 963
- [ 16 ] Diethelm K , Ford J , Freed A 2004 *Numer. Algorithms* **36** 31
- [ 17 ] Diethelm K , Ford J 2004 *Appl. Math. Comput.* **154** 621

## Designing synchronization schemes for a fractional-order hyperchaotic system \*

Zhang Ruo-Xun<sup>1)†</sup> Yang Shi-Ping<sup>1)</sup>

1) ( College of Physics Science and Information Engineering , Hebei Normal University , Shijiazhuang 050016 , China )

2) ( College of Elementary Education , Xingtai University , Xingtai 054001 , China )

( Received 13 February 2008 ; revised manuscript received 29 March 2008 )

### Abstract

Synchronization in a chaotic fractional-order differential system is studied. Three schemes are designed to achieve chaos synchronization of the fractional-order hyperchaotic system. Sufficient conditions on synchronization are also derived based on the Laplace transformation theory and stability theory of fractional-order linear systems. Numerical simulation or circuit simulation results are presented to demonstrate the effectiveness and feasibility of the proposed method.

**Keywords :** fractional-order , chaos synchronization , new hyperchaotic systems

**PACC :** 0545

\* Project supported by the Natural Science Foundation of Hebei Province , China ( Grant No. A2006000128 ).

† Email : xtzhxr@126.com