第 57 卷 第 12 期 2008 年 12 月
1000-3290/2008/57(12)/7415-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.57, No.12, December, 2008

两种构造 Birkhoff 表示的新方法

丁光涛†
(安徽师范大学物理与电子信息学院, 芜湖 241000)
(2008 年 3 月 18 日收到; 2008 年 5 月 17 日收到修改稿)

给出两种构造一阶系统 Birkhoff 表示的新方法, 可以从微分方程直接计算得到 Birkhoff 函数 B 和 Birkhoff 函数组 R_μ. 举例说明所得结果的应用.

关键词: 分析力学, Birkhoff 方程, Birkhoff 表示, 一阶微分方程
PACC: 0320

1. 引 言

Birkhoff 方程是一类比 Hamilton 方程更为普遍的动力学方程[1,2]. Birkhoff 系统已成为分析力学研究的一个重要领域. 文献[3]系统地表述了 Birkhoff 系统动力学的基本理论框架, 文献[4]全面研究了 Birkhoff 系统的对称性与守恒量. 近年来, Birkhoff 系统的研究取得了一系列的成果[5—9]. Birkhoff 方程是一阶微分方程, 而在力学、物理学以及其他领域中, 很多系统是用一阶微分方程来描述的. 从数学看, 高阶微分方程总可以化为一阶微分方程, 因此研究这些一阶系统可以利用 Birkhoff 方程的理论和方法. 把通常的一阶系统表示成 Birkhoff 方程形式, 就成了应用 Birkhoff 动力学的关键. 文献[2,3]给出了一些构造 Birkhoff 表示的方法, 本文将推导出两种新的构造 Birkhoff 表示的方法, 可以直接从运动方程得到 Birkhoff 函数和函数组. 最后举例说明所提出方法的应用.

2. Birkhoff 方程概述

设系统状态由 s 个变量 a^μ ($\mu=1,2,\cdots,s$) 描述, 其运动方程为

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu}+\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right)=0 \quad (\mu,\nu=1,2,\cdots,s), \tag{1}$$

式中对重复指标求和(下同). 方程(1)称为 Birkhoff 方程, 其中函数 $B(t,\boldsymbol{a})$ 称为 Birkhoff 函数, $R_\mu(t,\boldsymbol{a})$ ($\mu=1,2,\cdots,s$) 称为 Birkhoff 函数组. 定义

$$\omega_{\mu\nu}=\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \qquad (\mu,\nu=1,2,\cdots,s) \tag{2}$$

为 Birkhoff 张量. 若

$$\det(\omega_{\mu\nu})\neq 0, \tag{3}$$

则称 Birkhoff 方程为规则的. 由定义(2)式, 容易证明 $\omega_{\mu\nu}$ 具有下列重要性质:

$$\omega_{\mu\nu}=-\omega_{\nu\mu}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\omega_{\mu\nu}}{\partial a^\rho}+\frac{\partial\omega_{\nu\rho}}{\partial a^\mu}+\frac{\partial\omega_{\rho\mu}}{\partial a^\nu}=0. \tag{5}$$

性质(4)式决定了满足条件(3)式的规则 Birkhoff 系统, 状态变量只能为偶数, 即 $s=2n$ ($n=1,2,\cdots$). 对于 s 为奇数的系统, 可以通过引入一个补充变量, 以使状态变量成为偶数, 通常这个补充变量就是时间 t[3]. 下面的讨论中, 只涉及变量为偶数的规则 Birkhoff 系统.

对于具体系统, 通常给出的运动方程为

$$\dot{a}^\mu=\sigma^\mu(t,\boldsymbol{a}) \qquad (\mu=1,2,\cdots,2n), \tag{6}$$

由于条件(3)式的存在, Birkhoff 方程(1)写成方程(6)总是可行的. 反过来, 对于方程(6)形式的方程如何表示成 Birkhoff 方程(1)的形式就要有专门的方法, 即构造 Birkhoff 表示的方法. 构造 Birkhoff 表示的基本问题是从方程(6)出发, 求得 Birkhoff 函数 B 和 Birkhoff 函数组 R_μ ($\mu=1,2,\cdots,2n$), 以将方程(6)写成等效的方程(1)的形式.

† E-mail: dgt695@sina.com

3. 构造 Birkhoff 表示的直接方法一

将方程(6)代入方程(1),得

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\sigma^\nu-\left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu}+\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right)=0$$

$$(\mu,\nu=1,2,\cdots,2n).$$

设待求的 Birkhoff 函数具有下列形式：

$$B=R_\mu\sigma^\mu, \tag{7}$$

代入并展开后即得到 Birkhoff 函数组 R_μ 应满足的方程

$$\frac{\partial R_\mu}{\partial t}+\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\sigma^\nu+R_\nu\frac{\partial \sigma^\nu}{\partial a^\mu}=0$$

$$(\mu,\nu=1,2,\cdots,2n). \tag{8}$$

一般情况下,方程(8)的解是多值的,待求的 Birkhoff 函数组应满足条件(3)式,然后再由(7)式求得 Birkhoff 函数 B.

将求得的 B 和 R_μ $(\mu=1,2,\cdots,2n)$ 代入方程(1)得

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot a^\nu-\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\sigma^\nu+R_\nu\frac{\partial \sigma^\nu}{\partial a^\mu}+\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right)=0.$$

由于 R_μ 满足方程(8),故可得到

$$\omega_{\mu\nu}(\dot a^\nu-\sigma^\nu)=0\qquad(\mu,\nu=1,2,\cdots,2n). \tag{9}$$

由于条件(3)式成立,故从(9)式可得到方程(6). 换言之,(9)式是方程(6)的 Birkhoff 形式的方程.

4. 构造 Birkhoff 表示的直接方法二

将方程(1)写成如下形式：

$$\omega_{\mu\nu}\dot a^\nu=\frac{\partial B}{\partial a^\mu}+\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\qquad(\mu,\nu=1,2,\cdots,2n).$$

将方程(6)代入得

$$\omega_{\mu\nu}\sigma^\nu=\frac{\partial B}{\partial a^\mu}+\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\qquad(\mu,\nu=1,2,\cdots,2n). \tag{10}$$

(10)式两边对 a^ρ 求偏导数,得

$$\frac{\partial \omega_{\mu\nu}}{\partial a^\rho}\sigma^\nu+\omega_{\mu\nu}\frac{\partial \sigma^\nu}{\partial a^\rho}=\frac{\partial^2 B}{\partial a^\rho\partial a^\mu}+\frac{\partial^2 R_\mu}{\partial a^\rho\partial t}.$$

在式中交换指标 μ 和 ρ 可得

$$\frac{\partial \omega_{\rho\nu}}{\partial a^\mu}\sigma^\nu+\omega_{\rho\nu}\frac{\partial \sigma^\nu}{\partial a^\mu}=\frac{\partial^2 B}{\partial a^\mu\partial a^\rho}+\frac{\partial^2 R_\rho}{\partial a^\mu\partial t}.$$

两式相减后得

$$\left(\frac{\partial \omega_{\mu\nu}}{\partial a^\rho}-\frac{\partial \omega_{\rho\nu}}{\partial a^\mu}\right)\sigma^\nu+\omega_{\mu\nu}\frac{\partial \sigma^\nu}{\partial a^\rho}-\omega_{\rho\nu}\frac{\partial \sigma^\nu}{\partial a^\mu}=\frac{\partial \omega_{\rho\mu}}{\partial t}.$$

利用 Birkhoff 张量的性质(4)和(5)式可得

$$\frac{\partial \omega_{\mu\rho}}{\partial t}+\frac{\partial \omega_{\mu\rho}}{\partial a^\nu}\sigma^\nu-\omega_{\rho\nu}\frac{\partial \sigma^\nu}{\partial a^\mu}+\omega_{\mu\nu}\frac{\partial \sigma^\nu}{\partial a^\rho}=0$$

$$(\mu,\nu,\rho=1,2,\cdots,2n). \tag{11}$$

方程组(11)是确定 Birkhoff 张量的方程组. 由于 $\omega_{\mu\nu}$ 的反对称性质,方程组(11)只有 $n(2n-1)$个独立方程. 方程组(11)的解也是多值的,只有满足条件(3)式的才是待求的 Birkhoff 张量.

由方程组(11)求得 Birkhoff 张量 $\omega_{\mu\nu}$ 后,再代入(2)和(10)式,得到确定 Birkhoff 函数 B 和 Birkhoff 函数组 R_μ $(\mu=1,2,\cdots,2n)$的方程. 求解由(2)和(10)式导出的方程组,可以得到 B 和 R_μ. 在具体的求解过程中,可以根据情况先假定 Birkhoff 函数 B,或者先假设部分 R_μ,以简化求解过程.

5. 算　例

研究线性阻尼振子

$$\ddot x+x+\gamma\dot x=0 \tag{12}$$

的 Birkhoff 表示[2,3].

设

$$a^1=x,$$

$$a^2=\dot x,$$

则有

$$\begin{aligned}\dot a^1&=a^2=\sigma^1,\\ \dot a^2&=-(a^1+\gamma a^2)=\sigma^2.\end{aligned} \tag{13}$$

利用方法一,由方程(8)得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial R_1}{\partial t}+\frac{\partial R_1}{\partial a^1}a^2-\frac{\partial R_1}{\partial a^2}(a^1+\gamma a^2)-R_2=0,\\ &\frac{\partial R_2}{\partial t}+\frac{\partial R_2}{\partial a^1}a^2-\frac{\partial R_2}{\partial a^2}(a^1+\gamma a^2)+R_1-\gamma R_2=0.\end{aligned} \tag{14}$$

方程(14)满足条件(3)式的解有很多组,下面列出三组解：

$$\begin{aligned}R_1&=\frac12 a^2\mathrm e^{\gamma t},\\ R_2&=-\frac12 a^1\mathrm e^{\gamma t},\\ B&=\frac12\mathrm e^{\gamma t}[(a^1)^2+(a^2)^2+\gamma a^1a^2];\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}R_1'&=a^1\mathrm e^{\gamma t},\\ R_2'&=(\gamma a^1+a^2)\mathrm e^{\gamma t},\\ B'&=-\gamma\mathrm e^{\gamma t}[(a^1)^2+(a^2)^2+\gamma a^1a^2];\end{aligned} \tag{16}$$

$$R''_1 = (a^1 + \gamma a^2)\mathrm{e}^{\gamma t},$$
$$R''_2 = a^2\mathrm{e}^{\gamma t}, \tag{17}$$
$$B'' = 0.$$

利用方法二，方程(11)只有一个独立方程，将(13)式中的 σ^1 和 σ^2 代入得

$$\frac{\partial\omega_{12}}{\partial t} + a^2\frac{\partial\omega_{12}}{\partial a^1} - (a^1 + \gamma a^2)\frac{\partial\omega_{12}}{\partial a^2} - \gamma\omega_{12} = 0. \tag{18}$$

方程(18)满足条件(3)式的一个解为

$$\omega_{12} = \mathrm{e}^{\gamma t}. \tag{19}$$

代入(2)和(10)式得

$$\mathrm{e}^{\gamma t} = \frac{\partial R_2}{\partial a^1} - \frac{\partial R_1}{\partial a^2}, \tag{20}$$

$$-\mathrm{e}^{\gamma t}(a^1 + \gamma a^2) = \frac{\partial B}{\partial a^1} + \frac{\partial R_1}{\partial t}, \tag{21}$$

$$-\mathrm{e}^{\gamma t}a^2 = \frac{\partial B}{\partial a^2} + \frac{\partial R_2}{\partial t}. \tag{22}$$

为了简化求解过程，可以先假定函数 B.

例 1　设

$$B = 0,$$

则有

$$R_1 = -\left(\frac{a^1}{\gamma} + a^2\right)\mathrm{e}^{\gamma t},$$
$$R_2 = -\frac{a^2}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma t}. \tag{23}$$

例 2　设

$$B = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\gamma t}[(a^1)^2 + (a^2)^2 + \gamma a^1 a^2],$$

则有

$$R_1 = -\frac{1}{2}a^2\mathrm{e}^{\gamma t},$$
$$R_2 = \frac{1}{2}a^1\mathrm{e}^{\gamma t}. \tag{24}$$

例 3　设

$$B = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\gamma t}[(a^1)^2 + (a^2)^2],$$

则有

$$R_1 = -a^2\mathrm{e}^{\gamma t},$$
$$R_2 = 0. \tag{25}$$

例 4　设

$$B = -\mathrm{e}^{\gamma t}\left[\frac{1}{2}(a^1)^2 + \gamma a^1 a^2\right],$$

则有

$$R_1 = 0,$$
$$R_2 = \left(a^1 - \frac{a^2}{\gamma}\right)\mathrm{e}^{\gamma t}. \tag{26}$$

例 5　设

$$B = \frac{1}{2}[(a^1)^2 + (a^2)^2],$$

则有

$$R_1 = -a^1 t - \left(\frac{a^1}{\gamma} + a^2\right)\mathrm{e}^{\gamma t},$$
$$R_2 = -a^2 t - \frac{a^2}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma t}. \tag{27}$$

为了简化方程(20)—(22)的求解过程，也可以先选定 R_1 或 R_2 中的一个.

例 6　设

$$R_2 = 0,$$

则有

$$R_1 = -a^2\mathrm{e}^{\gamma t},$$
$$B = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\gamma t}[(a^1)^2 + (a^2)^2]. \tag{28}$$

这与例 3 一致.

例 7　设

$$R_2 = a^2 t,$$

则有

$$R_1 = -a^2\mathrm{e}^{\gamma t},$$
$$B = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\gamma t}[(a^1)^2 + (a^2)^2] - \frac{1}{2}(a^2)^2. \tag{29}$$

例 8　设

$$R_1 = -\left(\frac{a^1}{\gamma} + a^2\right)\mathrm{e}^{\gamma t},$$

则有

$$R_2 = -\frac{a^2}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma t},$$
$$B = 0. \tag{30}$$

这与例 1 一致.

这里顺便指出

$$\omega_{12} = -\mathrm{e}^{\gamma t} \tag{31}$$

也是方程(18)一个满足条件(3)式的解.重复上述过程，又可以得到若干组函数 B 和 R_1，R_2，由这些不同的函数 B 和 R_1，R_2 得出的 Birkhoff 方程，都是线性阻尼振子方程(12)等效的 Birkhoff 表示.

6. 结　论

本文给出了两种构造一阶微分方程系统的 Birkhoff 表示的新方法.与已有的构造 Birkhoff 表示的方法相比较，本文提出的方法不需要先将一阶微分方程(6)写成自伴随协变形式，也不需要先得到微分方程(6)的全部独立第一积分.本文方法一是通

过解方程(8)直接确定 Birkhoff 函数组 R_μ，然后利用关系式(7)求得 Birkhoff 函数 B，构造 Birkhoff 表示的过程比较简单一些，但是由于关系式(7)的限制，使求解的范围比较狭小，失去了一些可能的表示. 本文方法二是普遍的方法，通过求解方程(11)直接确定 Birkhoff 张量 $\omega_{\mu\nu}$，然后再求得 B 和 R_μ. 其求解的范围比方法一更广泛，但是构造 Birkhoff 表示的程序要复杂一些. 具体应用两种方法时，可通过预先假设函数 B 或部分 R_μ 的形式，以简化求解过程.

[1] Birkhoff G D 1927 *Dynamical Systems* (Providence R I: AMS College Publ.)

[2] Santilli R M 1983 *Foundations of Theoretical Mechanics* (Ⅱ) (New York: Springe-Verlag)

[3] Mei F X, Shi R C, Zhang Y F, Wu H B 1996 *Dynamics of Birkhoffian System* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、史荣昌、张永发、吴惠彬 1996 Birkhoff 系统动力学(北京 北京理工大学出版社)]

[4] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性和守恒量(北京 北京理工大学出版社)]

[5] Xu Z X 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4971 (in Chinese) [许志新 2005 物理学报 **54** 4971]

[6] Ge W K, Mei F X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2479 (in Chinese) [葛伟宽、梅风翔 2007 物理学报 **56** 2479]

[7] Zhang Y 2002 *Chin. Phys.* **11** 437

[8] Li R J, Qiao Y F, Zhao S H 2006 *Chin. Phys.* **15** 2777

[9] Guo Y X, Mei F X, Shang M 2007 *Chin. Phys.* **16** 292

Two new methods for construction of Birkhoffian representation

Ding Guang-Tao†

(*College of Physics and Electronic Information, Anhui Normal University, Wuhu 241000, China*)

(Received 18 March 2008; revised manuscript received 17 May 2008)

Abstract

Two new methods for the construction of the Birkhoffian representation of first-order systems are presented. The Birkhoffian functions R_μ and B can be computed from the differential equations. An example is given to illustrate the application of the methods.

Keywords: analytical mechanics, Birkhoff's equation, Birkhoffian representation, first-order differential equation

PACC: 0320

† E-mail: dgt695@sina.com