

外磁场下 XY 模型中两量子位热纠缠的性质及其调控研究^{*}

杜秀梅 满忠晓 夏云杰[†]

(曲阜师范大学物理工程学院, 曲阜 273165)

(2007 年 12 月 9 日收到, 2008 年 8 月 21 日收到修改稿)

在海森堡 XY 模型中, 为了统一研究均匀磁场和非均匀磁场对系统热纠缠的影响, 在两个量子位分别施加独立可控的外磁场 $(B + b)$ 和 $(B - b)$. 发现在均匀磁场和低温条件下的纠缠度有一个稳定的平台区并发生纠缠突变. 控制磁场不均匀度 b 和选择合适的材料就可以获得最有利的纠缠, 并大大提高系统退纠缠的临界温度 T_c . 调节磁场的 B 值, 可以在更宽的温度范围内实现此体系的纠缠开关.

关键词: 热纠缠度, 密度矩阵, XY 模型

PACC: 0365, 4250

1. 引 言

纠缠是量子信息技术中最基本的资源. 早期对纠缠态的研究局限于处于绝对零度的体系, 这一条件在真实的物理系统中是难以实现的, 例如核磁共振系统中量子计算的初态就是热平衡态. 近年来, 为了量子信息技术的实用化, 各种自旋链模型^[1-6]在热平衡状态下的纠缠特性得到了广泛的研究. 人们已经研究了均匀磁场^[7,8]、非均匀磁场^[9,10]情况下两比特间的纠缠问题. 对于非均匀磁场, 以往的研究仅限于两磁场的强度相同方向相反的特殊情况, 而事实上非均匀磁场还包括方向相同强度不等以及强度和方向都不同的情况. 自旋自由度在许多物理系统中可以看作量子比特, 而自旋之间的海森堡相互作用可以在量子点^[11,12]、原子核自旋^[13]、电子自旋和光学晶格中的冷原子^[14]等许多物理系统中实现.

本文主要研究开放边界条件下两量子比特在外加磁场中的热纠缠性质及其对纠缠的调控. 为了与以前的研究相比较, 统一研究均匀磁场和非均匀磁场对系统热纠缠的影响, 我们在两个自旋量子位上分别施加独立的可调磁场 $(B + b)$ 和 $(B - b)$, 通过

调节磁场的 B 和 b 值以及它们之间的相对值, 实现了均匀磁场和各种非均匀磁场的转换, 对磁场的控制范围也变得更大. 研究表明, 通过控制磁场不均匀度和选择合适的材料, 可以获得最有利的纠缠, 并大大提高系统退纠缠的临界温度 T_c . 此外, 调节 B 值可以在更宽的温度范围内实现此体系的纠缠开关, 这使得我们更加容易地控制纠缠开关.

2. 纠缠度的计算

对于一个处于热平衡的系统, 表示其量子态的 Gibbs 算子为

$$\rho(T) = \exp\left(-\frac{H}{kT}\right) / Z,$$

其中

$$Z = \text{Tr}\left[\exp\left(-\frac{H}{kT}\right)\right]$$

是配分函数, k 是玻尔兹曼常数. 两个量子位的纠缠我们用共生纠缠度 C 来表示^[15,16],

$$C = \max\{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, 0\}. \quad (1)$$

这里 $\lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 满足 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$, λ_i 是算符 $R_{12} = \rho_{12} S \rho_{12}^* S$ 本征值的平方根, 其中 ρ_{12} 是两量

^{*} 国家自然科学基金(批准号:10774088) 国家自然科学基金重点项目(批准号:10534030)和曲阜师范大学科研基金(批准号:XJ0621)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: yjxia@mail.qfnu.edu.cn

子位的密度矩阵, $S = \sigma_1^x \otimes \sigma_2^y$, σ_1^x 和 σ_2^y 是泡利算符, ρ^* 代表 ρ 的复共轭. $C = 0$ 时表示没有纠缠, $C = 1$ 对应于最大纠缠, $0 < C < 1$ 为部分纠缠.

在正交基矢 $\{|0,0\rangle, |0,1\rangle, |1,0\rangle, |1,1\rangle\}$ 下, 如果密度矩阵可以写成 X 态^[17]的形式

$$\rho^{12} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \omega \\ 0 & b & z & 0 \\ 0 & z^* & c & 0 \\ \omega^* & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \quad (2)$$

则很容易得到共生纠缠度

$$\mathcal{C}(\rho^{12}) = 2 \max\{0, |z| - \sqrt{ad}, |\omega| - \sqrt{bc}\}, \quad (3)$$

其中 $a + b + c + d = 1$.

3. 理论模型

对每个量子位施加不同的磁场, 两比特 XY 模型系统的哈密顿量为

$$\rho^{12} = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} \exp(2B/kT) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m+n & -s & 0 \\ 0 & -s & m-n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(-2B/kT) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

其中

$$m = \cosh\left(\frac{\sqrt{D}}{kT}\right),$$

$$n = \frac{2b}{\sqrt{D}} \sinh\left(\frac{\sqrt{D}}{kT}\right),$$

$$s = \frac{J}{\sqrt{D}} \sinh\left(\frac{\sqrt{D}}{kT}\right),$$

$$Z = 2 \cosh \frac{2B}{kT} + 2 \cosh \frac{\sqrt{4b^2 + J^2}}{kT}.$$

在以下的计算中我们取玻尔兹曼常数 $k = 1$. 由 (2)(3) 和 (6) 式可知, 有限温度下的热纠缠度可以写为

$$\mathcal{C}(\rho^{12}) = \frac{2}{Z} \max\{0, |s| - 1\}. \quad (7)$$

显然, $T \rightarrow 0$ 极限下纠缠度的表达式变为

$$\mathcal{C}(\rho^{12})_{T \rightarrow 0} = \max\left\{0, \lim_{T \rightarrow 0} \left| \frac{J}{\sqrt{D}} \frac{1}{\exp\left(\frac{2B - \sqrt{D}}{kT}\right) + 1} \right| \right\}. \quad (8)$$

$$H = J(S_1^x S_2^x + S_1^y S_2^y) + (B + b)S_1^z + (B - b)S_2^z, \quad (4)$$

其中 J 是耦合参数, $J > 0$ 对应反铁磁情形, $J < 0$ 对应铁磁情形; $S^\alpha = \sigma^\alpha/2$ ($\alpha = x, y, z$) 是自旋 $1/2$ 算符; σ^α 是泡利算符; B 和 b 是施加在两量子位上的两个独立磁场, 显然 b 控制磁场的非均匀度.

在正交基矢 $\{|0,0\rangle, |0,1\rangle, |1,0\rangle, |1,1\rangle\}$ 下, 哈密顿量可以表示为

$$H = \begin{pmatrix} -2B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2b & J & 0 \\ 0 & J & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2B \end{pmatrix}. \quad (5)$$

这一矩阵的四个本征值很容易求出, 它们是 $\{-2B, 2B, \pm\sqrt{D}\}$ 相应的本征矢为 $\{|00\rangle, |11\rangle, |\psi_\pm\rangle = \frac{1}{N_\pm} \left(|10\rangle - \frac{2b \pm \sqrt{D}}{J} |01\rangle \right)\}$, 其中 $D = 4b^2 + J^2$, N_\pm 为归一化系数. 系统在任意温度下的密度矩阵可以表示为

从 (8) 式容易看出, 在零温或近零温下, 当 $2B > \sqrt{D}$ 时, $C = 0$; 当 $2B < \sqrt{D}$ 时, $C = \left| \frac{J}{\sqrt{D}} \right|$. 这说明在 $2B = \sqrt{D}$ 处会出现纠缠突变, 纠缠度由 $C = \left| \frac{J}{\sqrt{D}} \right|$ 突然变为 $C = 0$.

4. 数值计算和分析

4.1. 均匀磁场和非均匀磁场两种情况下纠缠度的变化对比

由 (4) 式可知, 当 $b = 0, B \neq 0$ 对应的是均匀磁场的情况, 而 $b \neq 0, B = 0$ 时对应的是非均匀磁场的情况. 图 1 给出上述两种情况下热纠缠度随着磁场的变化对比.

图 1 所示的结果概括起来有以下四个特点. (1) 无论均匀磁场还是非均匀磁场, 系统的纠缠度都

随着温度的升高而降低. 因为温度越高热起伏越大, 系统成了纠缠态和非纠缠态的混合态. 随着温度的升高, 非纠缠态所占的比例增大, 从而系统的纠缠度降低. (2) 均匀磁场比非均匀磁场情况下的热纠缠度变化缓慢. 这是由于在零温下基态为非纠缠态 $|00\rangle$, $|11\rangle$ 和纠缠态 $|\psi^-\rangle$ (其中 $|\psi^-\rangle$ 的本征值为 $-\sqrt{D} = -\sqrt{4b^2 + J^2}$) 三者之一. 非均匀磁场下 $|\psi^-\rangle$ 对应的本征能量显然比均匀磁场下的本征能量低, 因而在有限温度下非均匀磁场造成纠缠态的概率 (正比于 $\exp\left(\frac{\sqrt{D}}{kT}\right)$) 较大, 纠缠度降低的速度也就缓慢. 这说明在一定温度下非均匀强磁场比均匀强

磁场更能抑制热起伏的影响并能提高热纠缠度. (3) 当温度 $T \geq 0.4$ 时, 非均匀强磁场下的热纠缠度始终大于同等温度下均匀强磁场下的纠缠度. 但是在图 1(a) 中均匀强磁场下的纠缠度随 B 发生突变, 纠缠度曲线呈现 $C=1$ 的平台区. 图 1(a) 中的温度近似为零温, 此温度下基态能量取决于 $2B$ 的值与 \sqrt{D} 的值. 如果 $2B > \sqrt{D}$ 系统处于 $|00\rangle$ 态, 反之则处于纠缠态 $|\psi^-\rangle$, 即恰好处于最大纠缠态. (4) 由图 1(b)(c) 和 (d) 可知, 随着温度的升高非均匀强磁场下的纠缠度由一个峰分裂为两个峰, 在 $T=1.2$ 时出现了一段消纠缠区域. 利用这一现象, 可将外磁场作为纠缠开关, 使系统在纠缠与非纠缠之间转换.

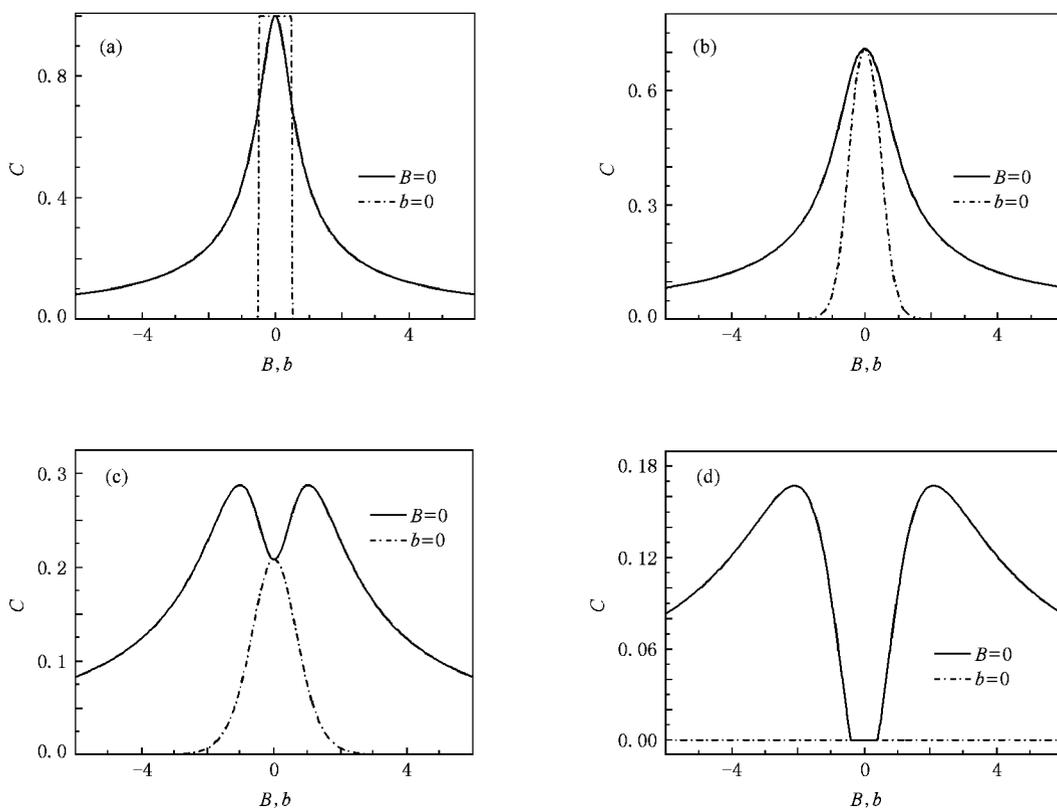


图 1 当 $b=0$ 时纠缠度 C 随 B 的变化与 $B=0$ 时纠缠度 C 随 b 的变化对比 $J=1$. (a) $T=0.01$, (b) $T=0.4$, (c) $T=0.8$, (d) $T=1.2$

4.2. 恒定磁场下不同温度热纠缠度随磁场不均匀度 b 的变化

由图 2 可知, 当 $T=0.01$ 时纠缠度曲线存在消纠缠区域, 随着温度的升高 ($T=0.4, 0.8$) 再次出现了纠缠现象, 继续升高温度 ($T=1.2$) 两比特之间的纠缠又消失了. 这是由于系统随着温度的升高由分

离态转化成分离态和纠缠态的混合态, 所以纠缠度不再为零. 随着温度的进一步升高, 纠缠态所占比例越来越小直至为零, 这时系统又回到了分离态. 另外, 与图 1 中 $B=0$ 的情况对比可以发现: 在 $T=0.01, 0.4$ 时都出现了两个纠缠峰值, 且在 $T=0.01$ 时有纠缠开关, 这个纠缠开关较图 1(d) 中 $T=1.2$ 处的纠缠突变更好, 此时的纠缠开关更易控制.

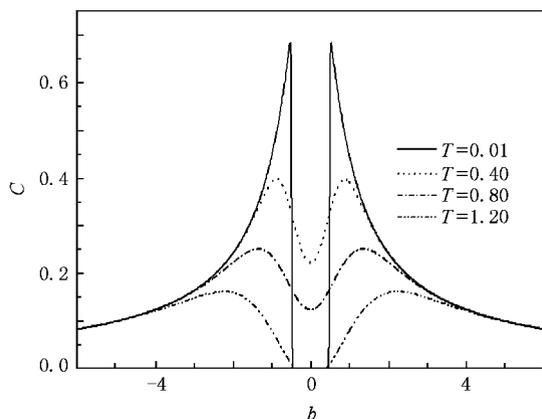


图2 不同温度下热纠缠度 C 随 b 的变化 $B=0.7, J=1$

4.3. 恒定温度下 B 取不同值时热纠缠度随磁场不均匀度 b 的变化

由图3可知,同一温度下 B 值越大系统最大纠缠度的值就越小,且随着 B 值的增大,系统不仅从无消纠缠到有消纠缠出现,而且消纠缠区域范围变大.由此可知,消纠缠的磁场不均匀度 b 的临界值随着 B 值的增大而增大.在 $B=0.7$ 的情况下,对比图3(a)与(b)可以发现,虽然温度升高,但在 $T=0.8$

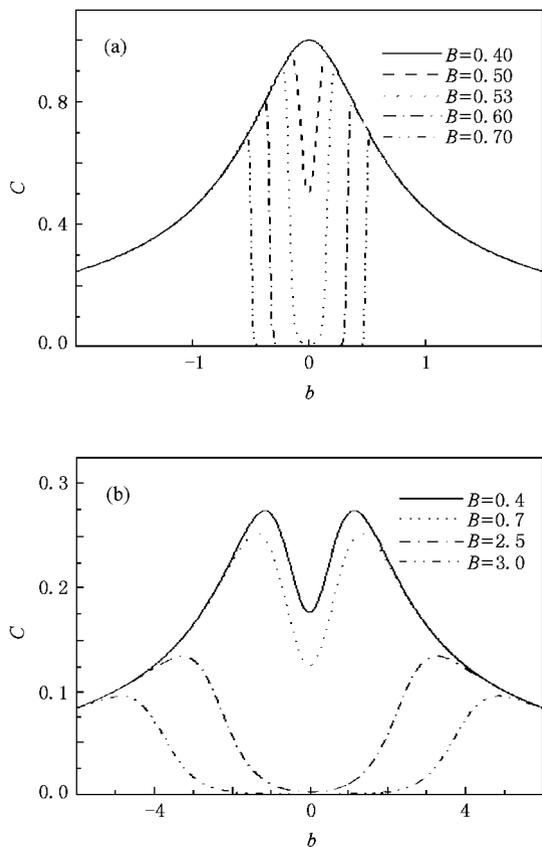


图3 B 取不同值时纠缠度 C 随 b 的变化 $J=1$. (a) $T=0.01$ (b) $T=0.8$

时系统仍有纠缠,这进一步说明了外磁场对抑制热起伏有较大的作用.并且随着温度的升高,要想出现消纠缠现象所需的 B 值应更大(如图3(a)中的 $B=0.53$ 变为图3(b)中的 $B=2.5$).由图3与图1(a)(c)对比可知,在非均匀磁场时 $T=0.01, 0.8$ 没有纠缠开关的情况下,只要 B 增大到一定的值时总会出现消纠缠区域,即有纠缠开关.与文献[18]相比较可知,控制 B 的值可以在更宽温度范围内实现纠缠开关这一重要而有用的现象.

4.4. 基态纠缠度与 B, b, J 之间的关系

对图4(a)的分析可知,低温下的纠缠随着 B 值的增大有纠缠突变(和以上分析相同),当 $2B > \sqrt{D}$ 时为消纠缠,反之为纠缠态.纠缠度的值由 J 和 b 决定.由图4可以看出,随着 b 的增大,最大纠缠平

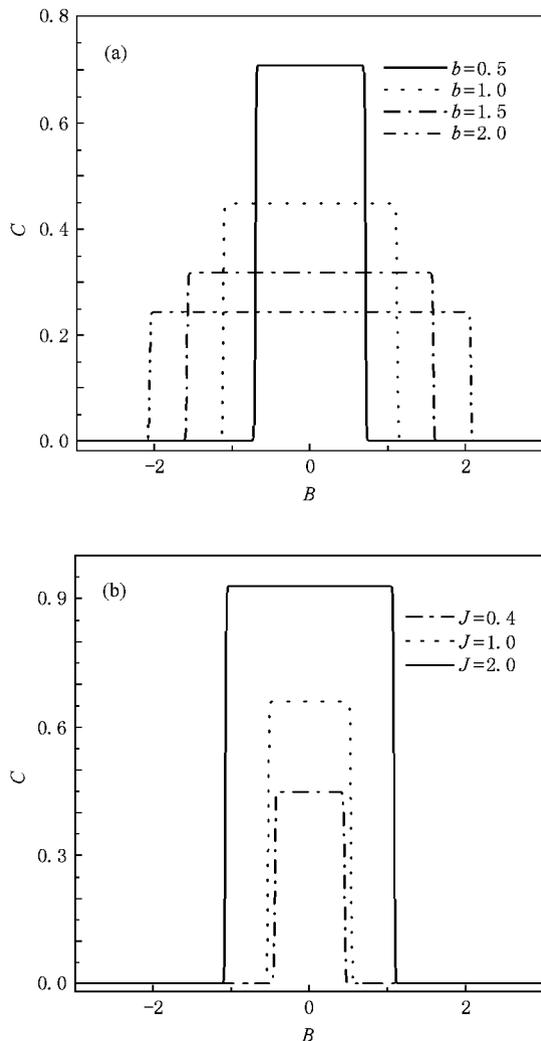


图4 当 $T=0.01$ 时, J 和 b 取不同值的情况下纠缠度 C 随磁场 B 的变化 (a) $J=1.0, b$ 取不同值的情况; (b) $b=0.4, J$ 取不同值的情况

台区变宽,纠缠度 C 值减小.随着 J 的增大,平台区和纠缠度 C 值均增大.由此可知,我们可以通过控制磁场不均匀度 b 及选择合适耦合参数 J 的材料得到最有利的纠缠.

4.5. 临界温度 T_c 与 B 和 b 的关系

由(7)式可知,热纠缠度的值与 J 的符号无关.因此,无论是铁磁性物质还是反铁磁性物质都有热纠缠.

当 $|s| - 1 \leq 0$ 即 $\left| \frac{J}{\sqrt{D}} \sinh \frac{\sqrt{D}}{kT} \right| \leq 1$ 时存在临界温度

$$T_c = \frac{|J|}{\sqrt{D}} \operatorname{arcsinh} \frac{\sqrt{D}}{kT}, \quad (9)$$

即当温度大于 T_c 时纠缠消失.由(9)式可知,临界温度与 B 无关,只与 b 和 J 有关.图 5 给出了在 J

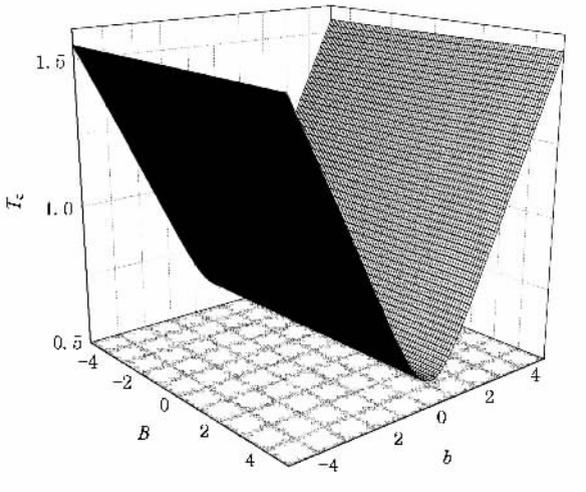


图 5 临界温度 T_c 与 B 和 b 的关系 $J = 1$

一定的情况下纠缠的临界温度 T_c 随 b 的变化关系,显然纠缠的临界温度 T_c 随 $|b|$ 的增大而增大.这说明控制磁场不均匀度的大小和选择合适的材料能够提高退纠缠的临界温度.

5. 结 论

采用海森堡 XY 模型,对两个量子位分别施加可控的外磁场,计算了系统的共生纠缠度.通过控制磁场 B 和 b 的值,使 $B = 0$ 或 $b = 0$ 实现了均匀磁场和非均匀磁场的转换.对两种情况下的纠缠进行了对比,发现系统存在着纠缠温度,当大于该纠缠温度时,非均匀磁场中的热纠缠度始终大于同样温度下均匀磁场中的热纠缠度;当小于该纠缠温度时,在某些区域出现均匀磁场下的纠缠度大于非均匀磁场下的纠缠度.在均匀磁场和温度很低时纠缠度有一个稳定的平台区并发生纠缠突变,最大纠缠平台区随着磁场不均匀度 b 的增大而变宽,纠缠度的值减小.随着 J 的增大平台区及纠缠度值均增大,这样可以通过控制 b 值及选择合适的材料获得最有利的纠缠.另外,我们研究了系统退纠缠的临界温度 T_c ,发现 T_c 只与 b 的值和 J 的值有关, b 的值越大, T_c 就越大,但与 B 的值无关.XY 自旋链系统的这些性质对于认识和控制系统的热纠缠具有较重要的意义,对利用这一系统进行量子信息技术的实验研究具有参考价值.

[1] Wang X G 2001 *Phys. Rev. A* **64** 012313
 [2] Syljuasen O F 2003 *Phys. Rev. A* **68** 060301
 [3] Shou L, Song H S, Guo Y Q, Li C 2003 *Phys. Rev. A* **68** 024301
 [4] Rossignoli R, Schmiegelow C T 2007 *Phys. Rev. A* **75** 012320
 [5] Wang X G, Wang Z D 2006 *Phys. Rev. A* **73** 064302
 [6] Shan C J, Cheng W W, Liu T K, Huang Y X, Li H 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2687 (in Chinese)[单传家、程维文、刘堂昆、黄燕霞、李宏 2008 物理学报 **57** 2687]
 [7] Lidar D A, Bacon D, Whaley K B 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 4556
 [8] Divincenzo D P, Bacon D, Kempe J, Burkard G, Whaley K B 2000 *Nature* **408** 339

[9] Kamta G L 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 107901
 [10] Asoodeh M, Karimipour V 2005 *Phys. Rev. A* **71** 022308
 [11] Loss D, Divincenzo D P 1998 *Phys. Rev. A* **57** 120
 [12] Burkard G, Loss D, Divincenzo D P 1999 *Phys. Rev. B* **59** 2070
 [13] Kane B E 1998 *Nature* **393** 133
 [14] Ekert A K 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 661
 [15] Hill S, Wootters W K 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 5022
 [16] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245
 [17] Yu T, Eberly J H 2007 *Quantum Infor. Comput.* **7** 459
 [18] Sun Y, Chen Y, Chen H 2003 *Phys. Rev. A* **68** 044301

On the properties and controlling of thermal entanglement in a two-qubit Heisenberg XY model with external magnetic fields^{*}

Du Xiu-Mei Man Zhong-Xiao Xia Yun-Jie[†]

(College of Physics and Engineering , Qufu Normal University , Qufu 273165 , China)

(Received 9 December 2007 ; revised manuscript received 21 August 2008)

Abstract

We investigate the thermal entanglement of Heisenberg-type coupled two-qubit system in the presence of two controllable magnetic fields $(B + b)$ and $(B - b)$. We find that under the condition of low temperature and uniform magnetic field, the entanglement between the two qubits exhibits platform-like behavior. By controlling the inhomogeneous magnetic field b and selecting suitable material we can optimize the thermal entanglement and enhance the critical temperature T_c of dead entanglement. We also find that the entanglement switch can be realized in a broader region of temperature by modulating the uniform field B .

Keywords : thermal entanglement , density matrix , XY model

PACC : 0365 , 4250

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10774088), the Key Program of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10534030) and the Scientific Research Foundation of Qufu Normal University , China (Grant No. XJ0621).

[†] Corresponding author. E-mail : yjxia@mail.qfnu.edu.cn