第 57 卷 第 12 期 2008 年 12 月
1000-3290/2008/57(12)/7463-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57,No.12,December,2008

黑洞的 Hawking 辐射*

赵 仁† 张丽春 李怀繁

(山西大同大学物理系,大同 037009)

(2008 年 5 月 11 日收到;2008 年 7 月 31 日收到修改稿)

运用 Damour-Ruffini 方法研究黑洞的 Hawking 辐射.在保持时空中总能量守恒的条件下,考虑辐射粒子对时空的反作用后,得到了黑洞视界处粒子出射率与 Bekenstein-Hawking 熵有关,辐射谱不再是严格的纯热谱.所得结果与他人的工作一致,且满足量子力学的幺正性原理.

关键词:Damour-Ruffini 方法,Hawking 辐射,能量守恒

PACC:0420,9760L

1. 引 言

Hawking[1] 将黑洞的量子效应阐释为由事件视界发射热辐射谱,在黑洞物理学上建立了一个划时代的里程碑.这一效应的发现不仅解决了黑洞热力学中当时存在的矛盾,而且深刻地揭示了量子力学、热力学与引力理论之间的内在联系.考察各种类型黑洞的热性质已经成为黑洞物理学中的一个重要课题.Hawking 指出,黑洞表面附近的真空涨落产生虚粒子对,当其中负能虚粒子通过隧道效应而进入黑洞,黑洞的能量将减少,同时其中的正能粒子可能向外穿出黑洞外引力区,这相当于黑洞辐射了一个粒子. Gibbons 和 Hawking[2] 证明黑洞辐射谱是严格的黑体谱.这一发现对恒星演化的认识和进一步研究具有积极的意义,进而极大地推动了黑洞热力学的发展.在过去的几十年里,人们进行了大量有关黑洞辐射和黑洞热力学性质的研究,总结出黑洞热力学四定律[3,4],并对各种黑洞的热辐射进行了大量的研究[5—13],这些研究都给出了黑洞的辐射谱为精确的黑体谱这一相同的结论.此结论有明显的争议之处.其一是信息丢失.Hawking 辐射的提出,使人们认识到黑洞不再是恒星的终极状态,黑洞也将演化并最终消失.由于 Hawking 辐射谱是精确的黑体谱,而我们从黑体谱只能得到温度这一参数,那么黑洞辐射将不会给我们带来有关黑洞内部物质的任何信息.这意味者一旦黑洞蒸发完毕,黑洞所有的信息(包括幺正性)都将丢失而不会留下任何痕迹.黑洞信息丢失意味着纯量子态将衰变成混合态,这就违背了量子力学的幺正性原理,对量子力学的理论根基是一个严重的挑战.其二是辐射对时空的反作用.由于黑洞产生 Hawking 辐射,那么描述黑洞的态参量(能量、电荷和角动量)就要发生涨落,然而过去证明 Hawking 辐射过程中均没有考虑辐射对黑洞态参量的影响,即没有考虑辐射对时空的反作用,所以黑洞辐射纯热谱是在时空背景不变的前提下得到的.

2000 年,Parikh 和 Wilczek[14] 提出了一种计算黑洞 Hawking 辐射修正谱的半经典方法,出发点是将黑洞的 Hawking 辐射理解成一种量子隧穿,势垒强弱取决于出射粒子自身能量的大小.这种方法的关键是强调粒子出射过程的能量守恒,并且要找到一个在视界处表现良好的坐标系. Parikh 和 Wilczek 用这种方法计算了粒子穿过 Schwarzschild 黑洞和 Reissner-Nordstrom 黑洞视界的辐射谱,所得结论偏离纯热谱,满足幺正性原理,支持了信息守恒的结论.随后,人们用这一方法计算了各种黑洞的 Hawking 辐射修正谱[15—28],均满足幺正性原理,支持了信息守恒的结论.

Parikh 和 Wilczek 工作的核心思想是认为黑洞在辐射过程中时空的总能量守恒,而黑洞的能量可以产生涨落.本文将从证明 Hawking 辐射经典的 Damour-Ruffini[5] 方法出发,计算辐射粒子穿过黑洞

* 山西省自然科学基金(批准号:2006011012)和山西大同大学博士科研启动基金资助的课题.

† E-mail:zhao2969@sina.com

视界的辐射谱. Hawking 是在没有考虑辐射对时空的反作用时得到的纯热谱. 当考虑时空总能量守恒和辐射对时空的反作用后,用黑洞的状态参量表述黑洞的辐射谱,同样得到与以往文献中相同的 Hawking 辐射修正谱. 而我们的方法简单直观,物理意义清楚,并且具有普适性.

2. Klein-Gordon 方程

Schwarzschild 时空线元为

$$\mathrm{d}s^2 = -f(r)\mathrm{d}t^2 + f^{-1}(r)\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2), \tag{1}$$

式中

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r},$$

其中 M 为黑洞质量. 黑洞视界半径为

$$r_+ = 2M. \tag{2}$$

弯曲时空中的 Klein-Gordon 方程为

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Phi - \mu_0^2\Phi = 0, \tag{3}$$

式中 μ_0 为标量粒子的静质量.

把度规(1)式代入(3)式可得

$$\left[-f^{-1}(r)\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f(r)\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{(f(r)r^2)'}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\Phi = \mu_0^2\Phi. \tag{4}$$

对(4)式分离变量后可得

$$\Phi = \exp[-\mathrm{i}\omega t]\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)R(r), \tag{5}$$

由此(4)式化为

$$\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\mathrm{Y}_{lm} = l(l+1)\mathrm{Y}_{lm}, \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[f(r)r^2]\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r} = \left[l(l+1) + \mu_0^2r^2 - \frac{\omega^2r^2}{f(r)}\right]R(r), \tag{7}$$

式中 l 和 m 分别为角量子数和磁量子数, $\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)$ 为球谐函数. 我们只研究沿径向传播的辐射,因此我们只对径向方程进行讨论.

3. 乌龟坐标变换

对 Schwarzschild 时空,定义乌龟坐标变换

$$r_* = r + \frac{1}{2\kappa_+}\ln\frac{r - r_+}{r_+}, \tag{8}$$

式中

$$\kappa_+ = \frac{1}{2r_+}.$$

由此可得

$$\mathrm{d}r_* = \frac{1}{f(r)}\mathrm{d}r,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{f(r)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}, \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} = \frac{1}{f^2(r)}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r_*^2} - \frac{2Mr}{r^3f^2(r)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}. \tag{10}$$

将(9)和(10)式代入(7)式得

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R(r)}{\mathrm{d}r_*^2} + 2rf(r)\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r_*} = [f(r)(l(l+1) + \mu_0^2) - r^2\omega^2]R(r). \tag{11}$$

当 $r\to r_+$ 时, $f(r_+)\to 0$, 由此(11)式在黑洞视界附近化为

$$\frac{\mathrm{d}^2R(r)}{\mathrm{d}r_*^2} + \omega^2R(r) = 0. \tag{12}$$

方程(12)的解为

$$R = \exp[\pm\mathrm{i}\omega r_*]. \tag{13}$$

所以,径向波函数为

$$\Psi = \exp[-\mathrm{i}\omega t \pm \mathrm{i}\omega r_*]. \tag{14}$$

黑洞视界表面处的入射波解

$$\Psi_{\mathrm{in}} = \exp[-\mathrm{i}\omega(t + r_*)] = \exp[-\mathrm{i}\omega v], \tag{15}$$

出射波解

$$\Psi_{\mathrm{out}}(r > r_+) = \exp[-\mathrm{i}\omega(t - r_*)] = \exp[-\mathrm{i}\omega v + 2\mathrm{i}\omega r_*]. \tag{16}$$

这里 $v = t + r_*$ 为 Eddington-Finkelstein 坐标. 将(8)式代入(16)式得

$$\Psi_{\mathrm{out}}(r > r_+) = \exp[-\mathrm{i}\omega v + 2\mathrm{i}\omega r]\left(\frac{r - r_*}{r_+}\right)^{\mathrm{i}\omega/\kappa_+}. \tag{17}$$

由(17)式可以看出,出射波解在视界面 r_+ 奇异,(17)式只能描述视界 r_+ 外的出射粒子,不能描述视界内的出射粒子.

4. 解析延拓

研究黑洞辐射感兴趣的是出射波解,然而由(17)式知,出射波解在 $r = r_+$ 处奇异,为此我们把 Ψ_{out} 解析延拓到视界内. 以奇点 $r = r_+$ 为圆心,

以 $|r-r_+|$ 为半径，沿下半复 r 平面作解析延拓，转动 $-\pi$ 角[13]，这时

$$r-r_+\to|r-r_+|\exp[-\mathrm{i}\pi]=(r_+-r)\exp[-\mathrm{i}\pi].\tag{18}$$

于是得到视界面 r_+ 内的出射波解

$$\begin{aligned}\Psi_{\rm out}(r<r_+)&=\exp[-\mathrm{i}\omega v+2\mathrm{i}\omega r]\left(\frac{r_+-r}{r_+}\right)^{\mathrm{i}\omega/\kappa_+}\\&\quad\times\exp[\pi\omega/\kappa_+]\\&=\exp[\pi\omega/\kappa_+]\exp[-\mathrm{i}\omega v+2\mathrm{i}\omega r_*].\end{aligned}\tag{19}$$

(19)和(16)式分别描述了黑洞内外的出射波解.因此能量为 ω 粒子的出射波解，在黑洞视界面上的出射率为

$$\Gamma=\left|\frac{\Psi_{\rm out}(r>r_+)}{\Psi_{\rm out}(r<r_+)}\right|^2=\exp[-2\pi\omega/\kappa_+].\tag{20}$$

5. 黑洞的辐射谱

在上述讨论中，我们知道 Schwarzschild 黑洞具有能量 M，辐射粒子的能量为 ω，所以时空中的总能量为 $M+\omega$.粒子的能量是在辐射过程中由黑洞中带出的，因此，黑洞在辐射前的能量为 $M+\omega$.(20)式所给出的辐射粒子在视界面上出射率的表达式是用粒子的态参量——能量 ω 描述的.这样的描述没有考虑辐射粒子对时空的反作用，而黑洞辐射必然对时空具有反作用.为此我们将(20)式中的参量改用黑洞本身的参量，这样给出的结论体现了辐射对时空的影响.在改用黑洞参量描述时，要满足时空的总能量守恒，即

$$-\omega=M-(M+\omega)=\Delta M,\tag{21}$$

式中 ΔM 是黑洞辐射中能量的变化量.

将(21)式代入(20)式，得到用黑洞参量描述的辐射粒子的出射率为

$$\Gamma=\exp[\Delta M/T_+],\tag{22}$$

式中 T_+ 为黑洞的 Hawking 辐射温度，

$$T_+=\frac{\kappa_+}{2\pi}.$$

将黑洞的热力学第一定律[3,4]

$$\Delta M=T_+\Delta S\tag{23}$$

代入(22)式，可得

$$\Gamma=\exp[\Delta S],\tag{24}$$

式中 ΔS 为黑洞辐射前后的 Bekenstein-Hawking 熵差，

$$\Delta S=4\pi[M^2-(M+\omega)^2].$$

这个结果完全与 Parikh 和 Wilczek 的工作以及文献[29,30]等工作一致，符合量子力学的幺正性原理.然而本文采用的是一个计算简单，物理意义清楚的新方法.

6. 结　　论

在保持时空中总能量守恒的条件并考虑辐射粒子对时空的反作用后，得到了黑洞辐射波的出射率对精确黑洞谱的修正结果.这个结果与他人的工作完全一致，且满足量子力学的幺正性原理.由上述讨论可知，在计算中不必考虑辐射粒子的静质量是否为零.整个计算过程的物理意义清楚，计算简单直观.这为研究各种复杂时空黑洞的热辐射提供了简单易行的方法，也为研究 Dirac 粒子以及动态时空辐射奠定了基础.

[1] Hawking S W 1975 *Commun. Math. Phys.* **43** 199

[2] Gibbons G W, Hawking S W 1977 *Phys. Rev.* D **15** 2752

[3] Bardeen J M, Carter B, Hawking S W 1973 *Commun. Math. Phys.* **31** 161

[4] Wald R M 1984 *General Relativity* (Chicago, London: University of Chicago Press)

[5] Damour T, Ruffini R 1976 *Phys. Rev.* D **14** 332

[6] Unruh W G 1976 *Phys. Rev.* D **14** 870

[7] Hartle J B, Hawking S W 1976 *Phys. Rev.* D **13** 2188

[8] Sannan S 1988 *Gen. Rel. Grav.* **20** 239

[9] Zhang J Y, Zhao Z 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2096 (in Chinese) [张靖仪、赵　峥 2003 物理学报 **52** 2096]

[10] Zhang J Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2354 (in Chinese) [张靖仪 2003 物理学报 **52** 2354]

[11] Zhao R, Zhang L C, Zhao Z 1996 *Sci. China* A **26** 1020 (in Chinese) [赵　仁、张丽春、赵　峥 1996 中国科学 A **26** 1020]

[12] Zhao R, Zhao Z 1992 *Chin. Phys. Lett.* **9** 501

[13] Zhao Z 1999 *Black Hole Thermodynamics and Singularity of Spacetime* (Beijing: Beijing Normal University Press) (in Chinese) [赵　峥 1999 黑洞的热性质与时空奇异性 (北京：北京师范大学出版社)]

[14] Parikh M K, Wilczek F 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 5042

[15] Kerner R, Mann R B 2006 *Phys. Rev.* D **73** 104010

[16] Zhang J Y, Zhao Z 2006 *Phys*. *Lett*. B **638** 110
[17] Zhang J Y, Fan J H 2007 *Phys*. *Lett*. B **648** 133
[18] Zhang J Y, Zhao Z 2005 *Phys*. *Lett*. B **618** 14
[19] Zhang J Y, Zhao Z 2005 *Nucl*. *Phys*. B **725** 173
[20] Zhang J Y, Zhao Z 2005 *JHEP* (10) 055
[21] Wu X, Gao S 2007 *Phys*. *Rev*. D **75** 044027
[22] Arzano M, Medved A J M, Vagenas E C 2005 *JHEP* (9) 037
[23] Jiang Q Q, Wu S Q, Cai X 2007 *Phys*. *Rev*. D **75** 064029
[24] Li R, Ren J R 2008 *Phys*. *Lett*. B **661** 370
[25] Peng J J, Wu S Q 2008 *Phys*. *Lett*. B **661** 300
[26] Li H L, Jiang Q Q, Yang S Z 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 539 (in Chinese) [李慧玲、蒋青权、杨树政 2006 物理学报 **55** 539]
[27] Zhang J Y, Zhao Z 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 3796 (in Chinese) [张靖仪、赵 峥 2006 物理学报 **55** 3796]
[28] Jiang Q Q, Wu S Q, Cai X 2007 *Acta Phys*. *Sin*. **56** 3083 (in Chinese) [蒋青权、吴双清、蔡 勖 2007 物理学报 **56** 3083]
[29] Liu W B 2007 *Acta Phys*. *Sin*. **56** 6164 (in Chinese) [刘文彪 2007 物理学报 **56** 6164]
[30] Zhao R, Zhang L C, Hu S Q 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 3898 (in Chinese) [赵 仁、张丽春、胡双启 2006 物理学报 **55** 3898]

Hawking radiation of black hole*

Zhao Ren† Zhang Li-Chun Li Huai-Fan

(*Department of Physics*, *Shanxi Datong University*, *Datong* 037009, *China*)

(Received 11 May 2008; revised manuscript received 31 July 2008)

Abstract

Taking into consideration the radiation particle reaction with the total energy of spacetime conservation, Hawking radiation from black hole is re-investigated using the Damour-Ruffini method. It is found that the tunneling probability relates to Bekenstein-Hawking entropy, and the radiation spectrum is not exactly thermal. The result is consistent with the works of other researchers, and satisfies the unitary theory of quantum mechanics.

Keywords: Damour-Ruffini method, Hawking radiation, energy conservation

PACC: 0420, 9760L

* Project supported by the Natural Science Foundation of Shanxi Province, China (Grant No. 2006011012) and the Scientific Research Foundation for Doctors of Shanxi Datong University, China.

† E-mail: zhao2969@sina.com