

周期场时间导数 Ornstein-Uhlenbeck 噪声 Fokker-Planck 方程的小参数展开求解^{*}

白占武[†] 蒙高庆

(华北电力大学数理系, 保定 071003)

(2008 年 5 月 12 日收到, 2008 年 7 月 18 日收到修改稿)

通过引入变量, 周期场中内部时间导数 Ornstein-Uhlenbeck 噪声驱动的布朗运动可用高维 Fokker-Planck 方程来描述. 上述系统不能直接应用通常的小参数展开和势谷中心展开近似求解. 用一种变通的小参数展开方法近似求解了系统的 Fokker-Planck 方程. 结果适用于小势垒高度、中等关联时间和较大的相空间区域, 近似解析解可获得系统的改进.

关键词: Fokker-Planck 方程, 周期势, 时间导数 Ornstein-Uhlenbeck 噪声, 小参数展开

PACC: 0540

1. 引言

弹道扩散是反常扩散的一个极限情形, 布朗粒子方均位移的长时间行为正比于时间平方. 产生弹道扩散的条件是热噪声的低频部分消失, 系统的有效阻尼为零^[1]. 速度相关的耦合是产生弹道扩散的物理起源之一^[2,3]. 有势系统的弹道输运表现出不同于通常的布朗运动、欠扩散和超扩散的特征. 对于无势系统加上一个常数力, 弹道输运的布朗粒子出现一个耗散加速度, 这是一种介于牛顿力学和朗之万随机力学之间的动力学^[4]. 对热简谐速度噪声驱动下的粒子在无界势和不对称周期势中运动的研究发现, 一个闪烁棘轮整流弹道输运所给出的定向流远大于整流正常输运的定向流^[5]. 已经得到广泛应用的 Ornstein-Uhlenbeck 噪声、简谐噪声可由高斯白噪声驱动一阶、二阶线性微分方程来实现. 这些噪声的时间导数的功率谱具有低频消失、有效阻尼为零的特点, 能够产生弹道扩散和非唯一的稳定态, 后者意味着各态历经的破坏^[6].

通过引入变量, 可以把热时间导数 Ornstein-Uhlenbeck 噪声(DOUN)对应的朗之万方程转化为一

个马尔科夫型朗之万方程组, 进而写出相应的 Fokker-Planck 方程(FPE). 由于没有明显的细致平衡, 目前无法获得方程的严格解. 对于大多数实际系统, 弱噪声近似是合理的. 在弱噪声近似下进行小参数展开和幂级数展开, 是求解不具有明显细致平衡的 FPE 定态解的两种主要方法^[7]. 由于系统地解决了展开中心、可解性、唯一性问题, 幂级数展开方法已发展成为一个系统而简单的实用方法, 容易计算到很高的幂级数^[8,9]. 这种方法主要处理稳定点附近的局域性质, 因而展开级数的收敛半径难以确定, 特别是不适用于非解析势函数情况. 小参数展开^[10,11]的优点是灵活, 能得到解的整体性质, 优于弱噪声近似下的局部线性化方法, 特别是能处理定态解在奇点不解析的情况. 缺点是计算方法不系统, 需要个别处理可解性条件, 高阶项的计算极为复杂.

目前, 对热时间导数噪声 FPE 的解析研究还很少. 文献[12]研究了周期场中热 DOUN 的 FPE, 通过近似解析求解相应的 FPE, 得到了零维布朗粒子存在从非各态历经到各态历经相变的结论. 本文结合小参数展开与势谷中心展开^[13]的思想, 用一种变通的小参数展开方法近似求解周期场中热 DOUN 的 FPE. 对于高阶项的计算较为系统和简单.

^{*} 国家自然科学基金(批准号:10647129)资助的课题.

[†] E-mail: baizhanwu@126.com

2. FPE 及其近似解析解

在一维周期势 $V(x)$ 和 DOUN 环境中的布朗粒子运动由如下的广义朗之万方程描述:

$$m\ddot{x} + m \int_0^t dt' \beta(t-t') \dot{x}(t') + V'(x) = \dot{y}(t), \quad (1)$$

这里取 $V(x) = u_0(1 - \cos(x))$ 撇号表示空间导数, 点号表示时间导数, y 是通常的 Ornstein-Uhlenbeck 噪声, 满足如下的随机微分方程:

$$\dot{y}(t) = -\frac{1}{\tau}y + \xi(t), \quad (2)$$

式中 τ 是 $y(t)$ 的关联时间, $\xi(t)$ 是 Gaussian 白噪声, 其系综平均为零, 关联满足

$$\xi(t)\xi(t') = D\delta(t-t'). \quad (3)$$

这里 $D = k_B T$ 是白噪声强度, 其中 k_B 是玻尔兹曼常量, T 是环境温度. DOUN $\dot{y}(t)$ 是内部噪声, 满足如下的涨落耗散定理:

$$\dot{y}(t)\dot{y}(t') = mk_B T \beta(t-t'). \quad (4)$$

$\dot{y}(t)$ 的功率谱具有低频消失的特点, 会导致自由粒子的弹道扩散和各态历经性破坏. 由于涨落耗散定理, 记忆核函数 $\beta(t) \propto \delta$ 函数项已移出, 满足方程 (2) 相应的齐次方程

$$\beta + \frac{1}{\tau}\beta = 0. \quad (5)$$

通过引入变量

$$w = -m \int_0^t dt' \dot{x}(t') \beta(t-t'),$$

可以把方程 (1) 连同方程 (2) (5) 变换成一个马尔科夫型朗之万方程组 (已取自然单位制, 其中 $k_B = 1$, $m = 1$)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -\frac{1}{\tau^2}v - V'(x) + w - \frac{1}{\tau}y + \xi(t), \\ \dot{w} &= -\frac{1}{\tau}w - \beta(0)v, \\ \dot{y} &= -\frac{1}{\tau}y + \xi(t). \end{aligned} \quad (6)$$

对应的稳态 FPE 为

$$\begin{aligned} -v \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial v} \left[-\frac{1}{\tau^2}v - V'(x) + w - \frac{1}{\tau}y \right] \rho \\ - \frac{\partial}{\partial w} \left[-\frac{1}{\tau}w + \frac{1}{\tau}v \right] \rho - \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{1}{\tau}y \right] \rho + D \frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2} \\ + D \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + 2D \frac{\partial^2 \rho}{\partial v \partial y} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

通常的小参数展开是先做弱噪声展开再做小参数展开, 但对于本文研究的情况, 弱噪声展开的最低阶近似不存在稳态解. 我们这里采用一种变通的方法, 在做弱噪声展开前, 首先考虑 $u_0 = 0$ 的情形. 这对应一个线性过程, 此时方程 (7) 可写作

$$\begin{aligned} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} [A_{ij} x_j \rho(\mathbf{x}, t)] \\ + \sum_i \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [D_{ij} \rho(\mathbf{x}, t)] = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

其形式解 ρ_0 为

$$\rho_0 = N \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma_{ij}^{-1} x_i x_j\right) \quad (i, j = 2, 3, 4) \quad (9)$$

σ 矩阵满足如下关系:

$$A\sigma + \sigma A = 2D. \quad (10)$$

这里已令 $\mathbf{x} = (x, v, w, y)$, 重复指标表示求和, σ^{-1} 是 σ 的逆矩阵. 方程 (10) 的解为

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= \frac{2\gamma(1-2\gamma)}{(2\gamma^3 + \gamma^2 - \gamma)(2\gamma^3 + 3\gamma^2 - 1)}, \\ \sigma_{21} &= \left(\gamma^2 + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2\gamma}\right) \sigma_{22}, \\ \sigma_{23} &= -\frac{2}{2\gamma^2 + \gamma} + \left[-\gamma\left(\gamma^2 + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2\gamma}\right) - \frac{1}{2}\right] \sigma_{22}, \\ \sigma_{32} &= \frac{1}{2\gamma} \sigma_{22}, \\ \sigma_{33} &= -\frac{1}{2} \sigma_{22}, \\ \sigma_{43} &= \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2\gamma^2 + \gamma} + \left[\frac{\gamma}{2}\left(\gamma^2 + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2\gamma}\right) + \frac{1}{4}\right] \sigma_{22}. \end{aligned} \quad (11)$$

这里 $\gamma = 1/\tau$.

令 $\rho = \rho_0 \rho_1$, 代入方程 (7), ρ_1 满足

$$\begin{aligned} -A_{ij} x_j \frac{\partial \rho_1}{\partial x_i} + D_{ij} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x_i \partial x_j} \\ + D_{ij} \left[\frac{\partial \ln \rho_0}{\partial x_i} \frac{\partial \rho_1}{\partial x_j} + \frac{\partial \ln \rho_0}{\partial x_j} \frac{\partial \rho_1}{\partial x_i} \right] \\ = -V'(x) \frac{\partial \ln \rho_0}{\partial v} \rho_1. \end{aligned} \quad (12)$$

在弱噪声近似下, 可将 ρ_1 展开成如下形式:

$$\rho_1 = N_1 \exp\left[-\frac{1}{D}(\varphi_0 + D\varphi_1 + \dots)\right], \quad (13)$$

式中 φ_0, φ_1 分别满足

$$\begin{aligned} A_{ij} x_j \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i} + D_{ij} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_j} \\ + D_{ij} \left[-D \frac{\partial \ln \rho_0}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_j} - D \frac{\partial \ln \rho_0}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i} \right] \end{aligned}$$

$$= -DV'(x) \frac{\partial \ln \rho_0}{\partial v}, \tag{14}$$

$$A_{ij}x_j \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} - D_{ij} \left[D \frac{\partial \ln \rho_0}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + D \frac{\partial \ln \rho_0}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} \right] = D'_{ij} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{15}$$

这里 $D'_{ij} = D_{ij}/D$. 当 u_0 很小时, 再将 φ_i 展开为 u_0 的幂级数, 即

$$\varphi_i = \varphi_{ij}u_0^j \quad (j = 1, 2, \dots). \tag{16}$$

比较两边 u_0 的各次幂, 可将方程(14)进一步展开为各级线性方程. 对于 φ_0 展开中 u_0 的 1 次幂,

$$A_{ij}x_j \frac{\partial \varphi_{01}}{\partial x_i} + D'_{ij} \left[-D \frac{\partial \ln \rho_0}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_{01}}{\partial x_j} - D \frac{\partial \ln \rho_0}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_{01}}{\partial x_i} \right] = -D \sin(x) \frac{\partial \ln \rho_0}{\partial v}, \tag{17}$$

u_0 的 2 次幂,

$$A_{ij}x_j \frac{\partial \varphi_{02}}{\partial x_i} + D'_{ij} \left[-D \frac{\partial \ln \rho_0}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_{02}}{\partial x_j} - D \frac{\partial \ln \rho_0}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_{02}}{\partial x_i} \right] = -D'_{ij} \frac{\partial \varphi_{01}}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_{01}}{\partial x_j}. \tag{18}$$

对于 φ_1 展开中 u_0 的 1 次幂,

$$A_{ij}x_j \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x_i} - D'_{ij} \left[\frac{\partial \ln \rho_0}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x_j} + \frac{\partial \ln \rho_0}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x_i} \right] = D'_{ij} \frac{\partial^2 \varphi_{01}}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{19}$$

式中 $D'_{ij} = D_{ij}/D$. 这些方程都是一阶线性偏微分方程, 系数是自变量的线性函数, 可用特征线方法求解.

将方程(17)重写为

$$d_{ij}x_j \frac{\partial \varphi_{01}}{\partial x_i} = \sin(x) (\sigma_{2i}^{-1}x_i). \tag{20}$$

其解为

$$\varphi_{01} = \int dx_i \sin(x) \frac{\sigma_{2j}^{-1}x_j}{d_{ij}x_j} \quad (i, j = 2, 3, 4). \tag{21}$$

(21) 式对指标 i 不求和. 由于 φ_{01} 的齐次方程的标度不变性要求和变量 x 的周期性条件, 解的任意函数项为零(对于 $\varphi_{02}, \varphi_{11}$ 等也有类似结果). 为得到一个解析表达式, 我们将 φ_{01} 展开为幂级数. 由于 D 很小, 只取前几项就能得到较好的近似结果. (21) 式 φ_{01} 的形式表明, 可能存在一个势谷中心, 满足

$$\left(\frac{\partial \varphi_{01}}{\partial x_i} \right)_0 = 0 \quad (i = 2, 3, 4). \tag{22}$$

只要 $\sigma_{2j}^{-1}x_j = 0$ 且 $d_{ij}x_j \neq 0$ ($i, j = 2, 3, 4$). 取势谷中心为 $y_0 = 0, \sigma_{22}^{-1}v_0 + \sigma_{23}^{-1}w_0 = 0$, 则

$$\varphi_{01} = \frac{1}{2} \sin(x) \left(\frac{dx}{dx_i} \right)_0 \sigma_{2j}^{-1} \left(\frac{dx_j}{dx_i} \right)_0 \times (x_i - x_{i0}) \wedge (x_j - x_{j0}) + \dots, \tag{23}$$

$$\varphi_{02} = -\frac{1}{6v_0} D'_{lm} \left(\frac{dx}{dx_k} \right)_0 \left(\frac{\partial f_l}{\partial x_i} \right)_0 \left(\frac{\partial f_m}{\partial x_j} \right)_0 \times (x_i - x_{i0}) \wedge (x_j - x_{j0}) \wedge (x_k - x_{k0}) + \dots \tag{24}$$

$$\varphi_{11} = -\frac{1}{v_0} D'_{ij} \sin(x) \left(\frac{dx}{dx_j} \right)_0 \sigma_{2k}^{-1} \left(\frac{dx_k}{dx_i} \right)_0 \left(\frac{dx}{dx_k} \right)_0 \times (x_k - x_{k0}) + \dots, \tag{25}$$

式中 $\left(\frac{dx}{dx_i} \right)_0, \left(\frac{dx_j}{dx_i} \right)_0$ 等是势谷中心处沿特征线的导数, $i, j, k, l = 2, 3, 4$,

$$f_l = \frac{\sigma_{2j}^{-1}x_j}{d_{ij}x_j}.$$

上述结果可系统计算到高阶项, 从而使精度得到系统改进. 完成对 w, y 的积分, 就可以得到布朗粒子相空间的分布函数. 取任意量 $v_0 = 1$, 相当于所有的量用 v_0 标度^[14]. 以下只计及 $\varphi_{01}, \varphi_{02}, \varphi_{11}$ 的最低阶项给出一些数值结果.

数值结果表明, 对于中等的 γ 值(如 γ 大约位于 [0.3, 1.3] 时), 确实存在一个势谷中心. 分布函数的主导阶由 φ_{01} 给出. 计及 φ_{02} 的修正不大, φ_{11} 项的修正则更小. $D = 0.1, u_0 = 0.1, \gamma = 0.8$ 时约化分布函数随 v 变化的结果示于图 1、图 2. 我们已将精确的分布函数写为 $\rho = \rho'_0 \rho'_1 \rho'_2 \dots$. 在势 $V(x)$ 的势垒顶部、势谷底部的一个小区域内势谷中心展开不成立, 上述结果是 $x \in [0.1, 3.0]$ 时的约化分布函数, 已将 ρ 的归一化常数取为 1. 数值计算表明, φ_{03} 和 φ_{12} 的贡献可以忽略. 由于方程(17)–(19)在反演 $x_i \rightarrow -x_i$ 下的不变性, 类似地可讨论 $x < 0, v < 0$ ($v_0 < 0$) 的分布函数.

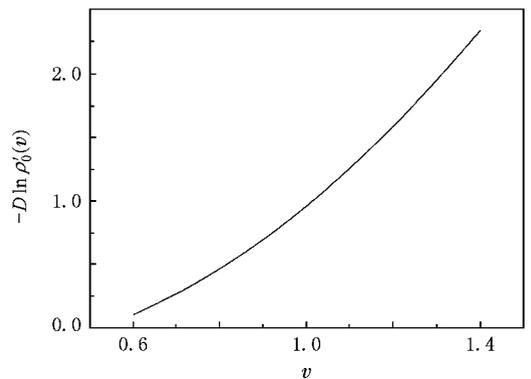


图 1 $-D \ln \rho_0(v)$ 随 v 的变化. $\rho_0(v)$ 为只计及主导项 φ_{01} 时的约化分布函数. $D = 0.1, u_0 = 0.1, \gamma = 0.8$

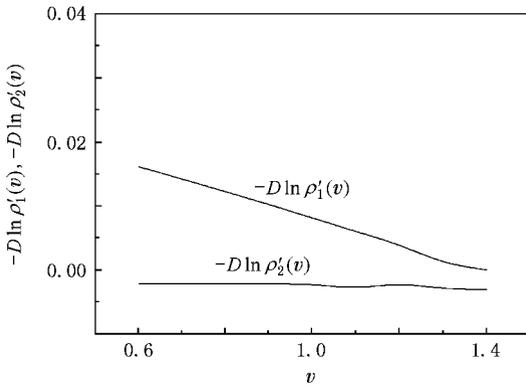


图 2 计及 $\varphi_{02}, \varphi_{11}$ 时 $-D \ln \rho_1'(v), -D \ln \rho_2'(v)$ 随 v 的变化
 $D = 0.1, u_0 = 0.1, \gamma = 0.8$

3. 结 论

通过引入变量, DOUN 系统可由高维 FPE 来描

述. 周期场中的 DOUN 系统稳态 FPE 的近似解析解不能直接用小参数方法求得. 通常的势谷中心展开方法也不能应用, 因为不存在势谷中心, 展开方程只有零解. 势谷中心展开中的漂移系数为零意味着势场力与随机力的和为零, 因而对应一个势谷; 而 DOUN 系统出现在漂移系数中只是随机力的一部分, 另外一个白噪声分量和扩散项相联系. 我们用一种变通的小参数展开方法得到了分布函数的近似解析解, 结果适用于 u_0 值较小、中等关联时间和较大的相空间区域. 通常的势谷中心展开方法适用于小关联时间和大关联时间情形, 无法给出中间关联时间出现的相变. 本文的结果适用于 D 值较小、 u_0 值较小、中等关联时间和受限的相空间区域, 在这样的区域能给出较为准确的分布函数, 可较容易地系统计算到高阶项, 但不能像文献 [12] 那样给出相变的结论.

- [1] Bao J D, Zhuo Y Z 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 138104
 [2] Bao J D, Zhuo Y Z 2005 *Phys. Rev. E* **71** R010102
 [3] Bai Z W, Bao J D, Song Y L 2005 *Phys. Rev. E* **72** 061105
 [4] Bao J D, Hänggi P, Zhuo Y Z 2005 *Phys. Rev. E* **72** 061107
 [5] Bao J D 2004 *Phys. Rev. E* **69** 016124
 [6] Bai Z W 2007 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **48** 112
 [7] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [胡 岗 1994 随机力与非线性系统 (上海: 上海

科技教育出版社)]

- [8] Hu G 1988 *Phys. Rev. A* **38** 3693
 [9] Hu G 1991 *Phys. Rev. A* **44** 2450
 [10] Graham R, Schenzle A 1983 *Z. Phys.* B **52** 61
 [11] Graham R, Tel T 1984 *J. Stat. Phys.* **35** 729
 [12] Bai Z W 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 1213
 [13] Hu G 1991 *Phys. Rev. A* **43** 700
 [14] Risken H 1984 *The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications* (Berlin: Springer)

The small parameter expansion solution to Fokker-Planck equation for Brownian motion in a periodic potential with internal time derivative Ornstein-Uhlenbeck noise ^{*}

Bai Zhan-Wu[†] Meng Gao-Qing

(*Department of Mathematics and Physics , North China Electric Power University , Baoding 071003 , China*)

(Received 12 May 2008 ; revised manuscript received 18 July 2008)

Abstract

By introducing suitable variables , the Brownian particles' motion in a periodic potential with internal time derivative Ornstein-Uhlenbeck noise can be described by a high-dimensional Fokker-Planck equation. The equation can not be solved by the usual small parameter expansion method and potential valley expansion method. An alternative small parameter expansion method is proposed to deal with the equation , and the result is applicable for small potential barrier height , intermediate correlation time and in a larger phase space domain , the approximation can be improved systematically .

Keywords : Fokker-Planck equation , periodic potential , time derivative Ornstein-Uhlenbeck noise , small parameter expansion

PACC : 0540

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10647129).

[†] E-mail : baizhanwu@126.com