

二值噪声驱动下二阶线性系统的随机共振^{*}

郭立敏 徐 伟[†] 阮春蕾 赵 燕

(西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

(2008 年 3 月 23 日收到, 2008 年 7 月 15 日收到修改稿)

研究了二值噪声驱动下二阶线性系统的随机共振问题. 采用平均法推导出系统输出幅值增益的表达式, 考察了幅值增益与系统频率、输入信号频率、噪声强度和噪声相关时间的关系, 发现系统输出幅值增益随这些参量呈单峰共振变化. 另外, 二值噪声的非对称性对共振峰值具有很大影响.

关键词: 随机共振, 幅值增益, 二值噪声, 二阶线性系统

PACC: 0540, 0630L

1. 引 言

随机共振的概念是 Benzi 等^[1]在研究第四季冰川问题时提出的. 20 多年来, 随机共振的研究在理论和实验方面都取得了巨大的成就, 特别是关于一阶非线性双稳或多稳系统的研究已经相当透彻^[2-7]. 近年来的一些研究表明, 由于色噪声或色关联噪声的扰动, 在一阶线性系统中也会出现随机共振现象^[8,9]. 对于二阶线性系统的随机共振, Gitterman^[10,11]研究了白噪声和色噪声驱动的二阶线性系统, 其他类似的研究却很少见.

传统的随机共振一般表现为信噪比或系统输出幅值随噪声强度的非单调变化, 而广义的随机共振^[12,13]包括系统输出幅值或信噪比随系统参数、输入信号频率、噪声强度及相关时间等参量的变化曲线出现最大值.

本文研究了由二值噪声驱动的二阶线性系统. 二值噪声可以表示随机电报过程, 有实际的物理背景, 其非对称性也对系统的动力学特征有重要影响. 本文推导出系统输出幅值增益, 发现它随系统频率、输入信号频率、噪声强度及噪声相关时间具有单峰共振现象. 同时发现二值噪声的非对称性对共振峰值也有很大影响.

2. 二值噪声驱动下二阶线性系统的输出幅值增益

考虑受谐和扰力 $F = F_0 \cos \Omega t$ 作用的 1 自由度线性阻尼系统. 由牛顿定律可知其系统模型为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \Omega t, \quad (1)$$

式中 m 表示物体质量, k 表示弹簧的弹性系数, c 表示阻力系数, 阻力与速度成反比, 方向相反. 令

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

$$a = \frac{F_0}{m},$$

$$\zeta = \frac{c}{2m},$$

则 (1) 式可简化为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\zeta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = a \cos \Omega t. \quad (2)$$

考虑系统固有频率受到二值噪声 $\xi(t)$ 的扰动, 系统模型为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\zeta \frac{dx}{dt} + [\omega^2 + \xi(t)] x = a \cos \Omega t. \quad (3)$$

系统 (3) 为一个二阶线性随机系统. 系统 (3) 中 $\xi(t)$ 为非对称的二值噪声^[14], 它有 $-E$ 和 kE 两个取值, 其中 $k, E > 0$. 令 $\Delta = kE - E$ 表示 $\xi(t)$ 的非对称性, 当 $\Delta = 0$ 时, $\xi(t)$ 为对称噪声.

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10872165)资助的课题.

[†] E-mail: weixu@nwpu.edu.cn

设 p_1 是从 $-E$ 到 kE 的转移概率, p_2 是从 kE 到 $-E$ 的转移概率. $\xi(t)$ 的统计性质为

$$\begin{aligned} \xi(t) &= 0, \\ \xi(t)\xi(t') &= D \exp(-\lambda |t - t'|). \end{aligned} \quad (4)$$

这里

$$\lambda = p_1 + p_2 = \frac{1}{\tau},$$

其中 τ 是噪声的相关时间. 定义 $\xi(t)$ 的噪声强度为

$$D = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\tau)\xi(0) d\tau = kE^2. \quad (5)$$

将二阶微分方程(3)转化为一阶微分方程组,

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad (6)$$

$$\frac{dy}{dt} = -2\zeta y - [\omega^2 + \xi(t)]x + a \cos \Omega t. \quad (7)$$

对(6)(7)式分别作平均,得到一阶矩的微分方程

$$\frac{d \langle x \rangle}{dt} = y, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d \langle y \rangle}{dt} &= -2\zeta \langle y \rangle - \omega^2 \langle x \rangle \\ &\quad - \langle \xi(t) \rangle \langle x \rangle + a \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (9)$$

对于关联函数 $\langle \xi(t)x \rangle$ 利用 Shapiro-Loginov^[15]公式可得

$$\frac{d \langle \xi(t)x \rangle}{dt} = \langle \xi(t) \rangle \frac{dx}{dt} - \lambda \langle \xi(t)x \rangle. \quad (10)$$

将(6)式代入(10)式可得

$$\frac{d \langle \xi(t)x \rangle}{dt} = \langle \xi(t) \rangle y - \lambda \langle \xi(t)x \rangle. \quad (11)$$

对于关联函数 $\langle \xi(t)y \rangle$, 利用 Shapiro-Loginov 公式可得

$$\frac{d \langle \xi(t)y \rangle}{dt} = \langle \xi(t) \rangle \frac{dy}{dt} - \lambda \langle \xi(t)y \rangle. \quad (12)$$

将(7)式代入(12)式可得

$$\begin{aligned} \frac{d \langle \xi(t)y \rangle}{dt} &= -2\zeta \langle \xi(t)y \rangle - \omega^2 \langle \xi(t)x \rangle \\ &\quad - \langle \xi(t) \rangle y - \lambda \langle \xi(t)y \rangle. \end{aligned} \quad (13)$$

对于高阶关联函数 $\langle \xi(t)^2 x \rangle$ 对其进行解耦, 利用分段噪声的性质, $\langle \xi(t)^2 x \rangle$ 可由 $\langle \xi(t)x \rangle$ 表示为

$$\langle \xi(t)^2 x \rangle = D \langle x \rangle + \Delta \langle \xi(t)x \rangle. \quad (14)$$

将(14)式代入(13)式可得

$$\begin{aligned} \frac{d \langle \xi(t)y \rangle}{dt} &= -(2\zeta + \lambda) \langle \xi(t)y \rangle \\ &\quad - (\omega^2 + \Delta) \langle \xi(t)x \rangle \\ &\quad - D \langle x \rangle. \end{aligned} \quad (15)$$

(8)(9)(11),(15)式是关于 $x, y, \xi(t)$ 的线性微分方程组, 化作四阶微分方程可表示为

$$\begin{aligned} \frac{d^4 x}{dt^4} + \mathcal{X}(2\zeta + \lambda) \frac{d^3 x}{dt^3} \\ + (2\omega^2 + 4\zeta^2 + \lambda^2 + 6\lambda\zeta + \Delta) \frac{d^2 x}{dt^2} \\ + [2\omega^2(\lambda + 2\zeta) + 2\lambda\zeta(\lambda + 2\zeta) + 2\zeta\Delta] \frac{dx}{dt} \\ + [\omega^2(2\zeta\lambda + \omega^2 + \lambda^2 + \Delta) - D] x \\ = \mathcal{X}(\zeta + \lambda) a \Omega \sin \Omega t \\ + (\Omega^2 - 2\zeta\lambda - \lambda^2 - \omega^2 - \Delta) a \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (16)$$

求解方程(16), 得到如下形式的解:

$$x = x_0 + x_{\text{output}}. \quad (17)$$

这里 x_{output} 的形式为

$$x_{\text{output}} = A \sin(\Omega t + \phi), \quad (18)$$

式中

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{f_1^2 + f_2^2}{f_3^2 + f_4^2} \right]^{1/2}, \\ \phi &= \arctan \frac{f_1 f_3 + f_2 f_4}{f_1 f_4 - f_2 f_3}, \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} f_1 &= (\Omega^2 - 2\zeta\lambda - \lambda^2 - \omega^2 - \Delta) a, \\ f_2 &= -\mathcal{X}(\zeta + \lambda) a \Omega, \\ f_3 &= (\Omega^2 - \omega^2)(\Omega^2 - 2\zeta\lambda - \omega^2 \\ &\quad - \lambda^2 - \Delta) - 4\zeta\Omega^2(\zeta + \lambda) - D, \\ f_4 &= 2\Omega(\lambda + 2\zeta)(\omega^2 + \lambda\zeta - \Omega^2) + 2\Omega\zeta\Delta. \end{aligned} \quad (20)$$

系统输出幅值增益为

$$G = \frac{A}{a} = \left[\frac{q_1}{q_2} \right]^{1/2}, \quad (21)$$

式中

$$\begin{aligned} q_1 &= (\Omega^2 - 2\zeta\lambda - \lambda^2 - \omega^2 - \Delta)^2 \\ &\quad + \mathcal{X}(\zeta + \lambda)^2 \Omega^2, \\ q_2 &= f_3^2 + f_4^2. \end{aligned}$$

3. 系统输出幅值增益的随机共振

下面利用系统输出幅值增益的表达式(21), 考察系统输出幅值增益受信号和噪声的影响.

当 $\zeta = 0.1, \omega = 1, D = 1, \lambda = 1, \Delta = 0, 0.3, 0.5, 0.7, 1$ 时, 系统输出幅值增益 G 随驱动力频率 Ω 的变化如图 1 所示. 从图 1 可以看出, 随着驱动力频率 Ω 的增大, 系统输出幅值增益 G 的变化呈单峰曲线. 而随着二值噪声非对称参数 Δ 的增大, 曲线的峰值也增大且向右移动. 当 $\zeta = 0.1, \Omega = 1, D = 1, \lambda = 1, \Delta = 0, 0.3, 0.5, 0.7, 1$ 时, 系统输出幅值增

益 G 随系统频率 ω 的变化如图 2 所示. 从图 2 可以看出, 随着系统频率 ω 的增大, 系统输出幅值增益 G 的变化也呈单峰曲线. 而随着二值噪声非对称参数 Δ 的增大, 曲线的峰值也增大且向左移动. 图 1 和图 2 表明, 在二值噪声的影响下, 1 自由度线性阻尼振子随着驱动力频率和系统固有频率的变化均出现了共振现象, 而噪声非对称参数 Δ 的增大会使共振的峰值增大, 并能使之提前或延后出现.

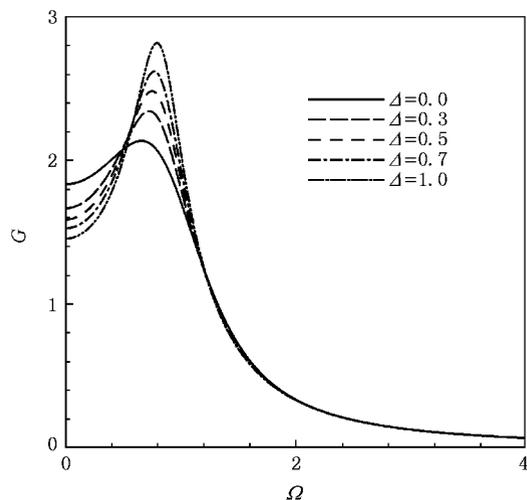


图 1 当 $\zeta=0.1, \omega=1, D=1, \lambda=1, \Delta=0, 0.3, 0.5, 0.7, 1$ 时, 增益 G 随驱动力频率 Ω 的变化

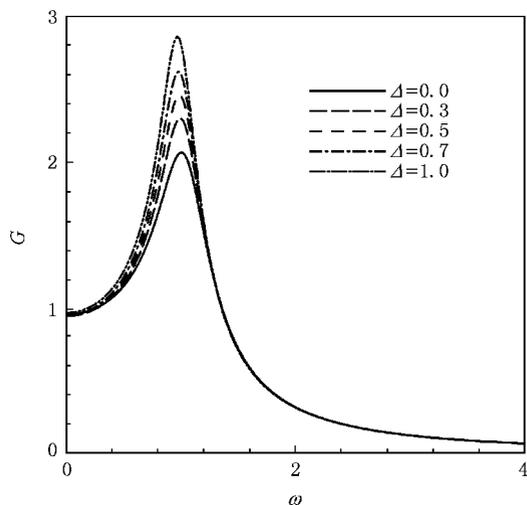


图 2 当 $\zeta=0.1, \Omega=1, D=1, \lambda=1, \Delta=0, 0.3, 0.5, 0.7, 1$ 时, 增益 G 随系统频率 ω 的变化

当 $\zeta=0.1, \omega=1, \Omega=0.8, \lambda=1, \Delta=0, 0.3, 0.5, 0.7, 1$ 时, 系统输出幅值增益 G 随噪声强度 D 的变化如图 3 所示. 从图 3 可以看出, 随着噪声强度 D 的增大, 增益 G 的变化呈单峰曲线. 而随着二

值噪声非对称参数 Δ 的增大, 曲线的峰值也增大且向右移动. 当 $\zeta=0.1, \omega=1, \Omega=0.8, D=1, \Delta=0, 0.3, 0.5, 0.7, 1$ 时, 系统输出幅值增益 G 随相关时间 τ 的变化如图 4 所示. 从图 4 可以看出, 随着相关时间 τ 的增大, 系统输出幅值增益 G 的变化也呈单峰曲线. 而随着二值噪声非对称参数 Δ 的增大, 曲线的峰值也增大且向右移动. 与图 1 和图 2 的现象类似, 图 3 和图 4 表明, 1 自由度线性阻尼振子随着噪声强度和噪声相关时间的变化均出现了随机共振现象, 而噪声的非对称性对共振峰值也存在明显的影响. 通过调节这些参数值, 我们可以在一定的范围内实现对 1 自由度线性阻尼振子的随机共振进行必要的控制.

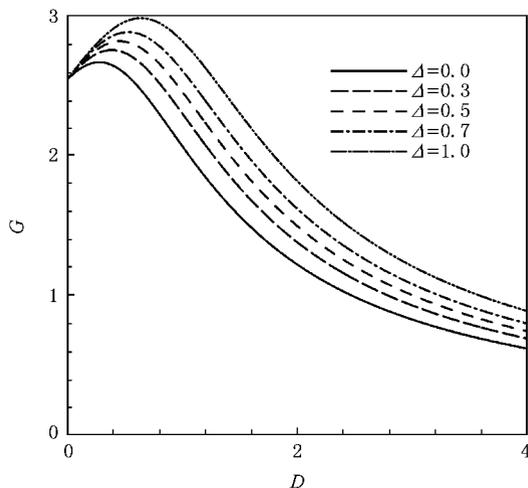


图 3 当 $\zeta=0.1, \omega=1, \Omega=0.8, \lambda=1, \Delta=0, 0.3, 0.5, 0.7, 1$ 时, 增益 G 随噪声强度 D 的变化

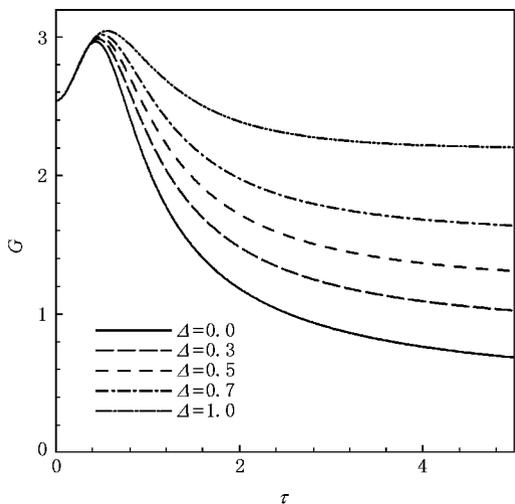


图 4 当 $\zeta=0.1, \omega=1, \Omega=0.8, D=1, \Delta=0, 0.3, 0.5, 0.7, 1$ 时, 增益 G 随相关时间 τ 的变化

4. 数值模拟

当相关时间 $\tau = \frac{1}{\lambda} \rightarrow 0$, 即 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, 噪声 $\xi(t)$

为白噪声. 图 5 所示为增益 G 随 λ 的变化关系, λ

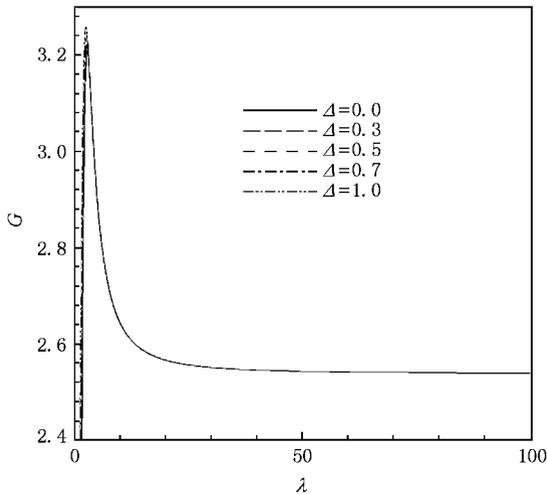


图 5 当 $\zeta = 0.1$, $\omega = 1$, $\Omega = 0.8$, $D = 1$, $\Delta = 0, 0.3, 0.5, 0.7, 1$ 时, 增益 G 随 λ 的变化

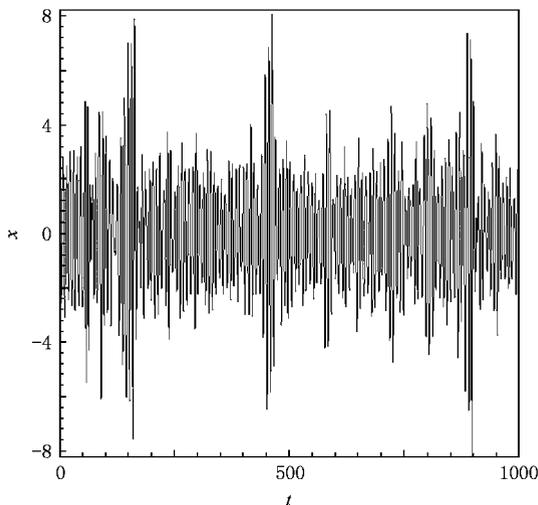


图 6 当 $\xi(t)$ 为白噪声, $\zeta = 0.1$, $\Omega = 0.8$, $\omega = 1$, $\alpha = 1$, $D = 1$ 时, 输出信号 $x(t)$ 的时间历程

取值为 $[0, 100]$. 从图 5 可以看出, 随着 λ 的增大曲线几乎完全重合在一起, 增益 G 也最终趋于定值 2.53953. 这说明随着噪声 $\xi(t)$ 趋近于白噪声, 非对称参数 Δ 对增益 G 的影响逐渐消失.

当 $\xi(t)$ 为白噪声, $\zeta = 0.1$, $\Omega = 0.8$, $\omega = 1$, $\alpha = 1$, $D = 1$ 时, 用蒙特卡罗方法模拟求解 (3) 式, 得到输出信号 $x(t)$ 的时间历程, 结果如图 6 所示. 通过数值计算得出, 系统输出幅值增益 G 的均值趋于 2.53804. 这与图 5 中 $\lambda \rightarrow \infty$ 时的结果相近, 说明 (21) 式的求解是行之有效的.

5. 结 论

1) 通过平均法, 得到了输出幅值增益的精确解析表达式. 该表达式适用于任意的噪声强度及信号的振幅和频率, 不必限制在小的噪声或信号范围内.

2) 由于噪声的干预使线性系统出现了丰富的非线性现象, 系统输出幅值增益随输入信号频率、系统频率、噪声强度和噪声相关时间都表现出非单调变化.

3) 系统输出幅值增益随输入信号频率、系统频率、噪声强度和噪声相关时间变化时, 随着噪声非对称参数的增大, 共振峰值也在增大.

4) 噪声非对称参数对相关曲线的影响也不尽相同. 随着噪声非对称参数的增大, 系统输出幅值增益作为输入信号频率、噪声强度和噪声相关时间的函数时, 峰值右移; 而系统输出幅值增益作为系统频率的函数时, 峰值左移. 当噪声趋近于白噪声时, 非对称参数对相关曲线的影响逐渐消失. 依据这些参数的不同作用, 可以通过调节各个参数值实现对 1 自由度阻尼线性振子随机共振的控制.

[1] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A 1981 *J. Phys. A* **14** L453
 [2] Fauve S, Heslot F 1983 *Phys. Lett. A* **97** 5
 [3] Ning L J, Xu W, Yang X L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 25 (in Chinese) [宁丽娟、徐伟、杨晓丽 2007 物理学报 **56** 25]
 [4] Zhou B C, Xu W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5623 (in Chinese) [周丙常、徐伟 2007 物理学报 **56** 5623]

[5] Ma S J, Xu W, Li W, Jin Y F 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3508 (in Chinese) [马少娟、徐伟、李伟、靳艳飞 2005 物理学报 **54** 3508]
 [6] Ning L J, Xu W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1944 (in Chinese) [宁丽娟、徐伟 2007 物理学报 **56** 1944]
 [7] Jin Y F, Xu W, Ma S J, Li W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3480 (in

- Chinese)[靳艳飞、徐 伟、马少娟、李 伟 2005 物理学报 **54** 3480]
- [8] Xu W , Jin Y F , Xu M , Li W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5027 (in Chinese)[徐 伟、靳艳飞、徐 猛、李 伟 2005 物理学报 **54** 5027]
- [9] Jin Y F , Xu W , Li W , Xu M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2562 (in Chinese)[靳艳飞、徐 伟、李 伟、徐 猛 2005 物理学报 **54** 2562]
- [10] Gitterman M 2003 *Phys. Rev. E* **67** 057103
- [11] Gitterman M 2004 *Phys. Rev. E* **69** 041101
- [12] Barykin A V , Seki K 1998 *Phys. Rev. E* **57** 6555
- [13] Berdichevsky V , Gitterman M 1999 *Phys. Rev. E* **60** 1494
- [14] Li J H , Han Y X 2006 *Phys. Rev. E* **74** 051115
- [15] Shapiro V E , Loginov V M 1978 *Physica A* **91** 563

Stochastic resonance for dichotomous noise in a second derivative linear system^{*}

Guo Li-Min Xu Wei[†] Ruan Chun-Lei Zhao Yan

(Department of Applied Mathematics , Northwestern Polytechnical University , Xi'an 710072 , China)

(Received 23 March 2008 ; revised manuscript received 15 July 2008)

Abstract

We investigated the stochastic resonance for dichotomous noise in a second derivative linear system , measured the average to get the amplitude gain of the output signal , and studied its relationship with the frequency of the system , the frequency of the signal , the strength and correlation time of noises . The amplitude gain of the output signal shows a nonmonotonic dependence on these factors , and the parameter of the dichotomous noise effects the peak value of stochastic resonance .

Keywords : stochastic resonance , amplitude gain , dichotomous noise , second derivative linear system

PACC : 0540 , 0630L

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10872165).

[†] E-mail : weixu@nwpu.edu.cn