

# 一类多涡卷混沌吸引子及电路设计\*

罗小华<sup>1)†</sup> 李华青<sup>2)</sup> 代祥光<sup>3)</sup>

1) 重庆邮电大学通信与信息工程学院, 重庆 400065)

2) 重庆邮电大学数理学院, 重庆 400065)

3) 重庆邮电大学移通学院, 重庆 400065)

(2008 年 2 月 20 日收到, 2008 年 7 月 16 日收到修改稿)

提出了一种产生多涡卷混沌吸引子的方法并给出了相应的电路设计. 该方法由若干个分段线性函数构成混沌系统的非线性函数, 构造不同的分段数可以获得不同数量的涡卷混沌吸引子. 数值仿真和 EWB 仿真结果表明了该方法的有效性.

关键词: 多涡卷混沌吸引子, 分段线性函数, 电路设计, 电路实验结果

PACC: 0545

## 1. 引言

近年来, 由于混沌在电子、通信、系统控制、材料力学等领域有着广阔的前景而引起了学者们的广泛关注和深入研究<sup>[1-6]</sup>. 由于混沌信号可以当作保密通信中的加密信号使用, 所以对产生混沌吸引子信号发生器的研究也引起了人们的极大兴趣. 通过构造不同的非线性函数在各类系统中产生动力学行为更为复杂的多涡卷混沌吸引子以满足工程需要, 其中主要有利用分段线性函数、阶梯波、正弦函数、时滞函数等各种方法产生多涡卷混沌吸引子<sup>[7-15]</sup>. 然而, 文献 8 中的混沌吸引子大小不均匀并且数量有限, 文献 10 虽然找到了产生任意涡卷的分段线性函数转折电压的递推规律, 但由于转折点电压值计算公式比较复杂且后一次转折点电压值与前一次转折点电压值相关, 故比较容易出错. 因此, 研究一种产生多涡卷混沌吸引子的新方法, 在理论与实际中都有重要的价值.

本文在文献 16 的基础上通过构造一个新的非线性函数和重新配置系统参数, 不需要复杂的数学推导就可在四维系统中产生任意数量、大小相等、分布均匀的多涡卷混沌吸引子. 依据新的非线性函数, 设计了转折点函数的电路并且确定电路元器件的值, 获得了多涡卷混沌吸引子, 数值仿真结果和

EWB 仿真结果完全一致. 最后进行了硬件电路实验并给出实验结果.

## 2. 混沌系统的提出与分析

文献 16 给出两个简单的线性二维子系统, 通过一种分段线性标量函数连接而成的方法产生了二涡卷混沌吸引子. 其混沌系统的数学模型为

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= -ax + b(y + h(y, z)), \\ \frac{dy}{d\tau} &= -bx + c(y + h(y, z)), \\ \frac{dz}{d\tau} &= -cz - w - ch(y, z), \\ \frac{dw}{d\tau} &= z - cw + h(y, z). \end{aligned} \quad (1)$$

在文献 16 的基础上, 本文通过两方面对其进行改进. 一方面, 改进系统的有关系数  $a = 0.04$ ,  $b = 2$ ,  $c = 0.16$ . 另一方面, 构造一个新的非线性函数

$$\begin{aligned} h(y, z) &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (|y + z + g_i| - |y + z - g_i|). \end{aligned} \quad (2)$$

产生  $n$  涡卷混沌吸引子的参数为

$$\begin{aligned} m &= [m_1, m_2, m_3, \dots, m_{n-2}, m_{n-1}, m_n] \\ &= (-1)^i [2, -2, 2, -2, \dots, -2, 2, d], \end{aligned} \quad (3)$$

\* 国家自然科学基金(批准号: 60572089)资助的课题.

† E-mail: luoxh\_0630@yahoo.cn

$$g = [g_1, g_2, g_3, \dots, g_{n-2}, g_{n-1}, g_n] \\ = [1, 3, 5, \dots, 2n-5, 2n-3, 2n-1]. \quad (4)$$

数组  $m$  的作用是产生多涡卷混沌吸引子和控制吸引子的大小. 数值仿真表明: 当  $d = -0.5$  时, 系统 (1) 能产生偶数个涡卷混沌吸引子; 当  $d = 0.5$  时, 系统 (1) 能产生奇数个涡卷混沌吸引子. 转折点数组  $g$  的作用是控制涡卷混沌吸引子之间的距离. 当  $n = 5$  时, 系统 (1) 能产生五涡卷混沌吸引子, 由 (2)–(4) 式可知非线性函数  $h(y, z)$  由以下 11 个分段线性函数组成 (图 1):

$$h(y, z) = \begin{cases} 3.5 & (y + z \leq -9), \\ \frac{y+z}{2} + 8 & (-9 \leq y+z \leq -7), \\ -\frac{3(y+z)}{2} - 6 & (-7 \leq y+z \leq -5), \\ \frac{y+z}{2} + 4 & (-5 \leq y+z \leq -3), \\ -\frac{3(y+z)}{2} - 2 & (-3 \leq y+z \leq -1), \\ \frac{y+z}{2} & (-1 \leq y+z \leq 1), \\ -\frac{3(y+z)}{2} + 2 & (1 \leq y+z \leq 3), \\ \frac{y+z}{2} - 4 & (3 \leq y+z \leq 5), \\ -\frac{3(y+z)}{2} + 6 & (5 \leq y+z \leq 7), \\ \frac{y+z}{2} - 8 & (7 \leq y+z \leq 9), \\ -3.5 & (y+z \geq 9). \end{cases} \quad (5)$$

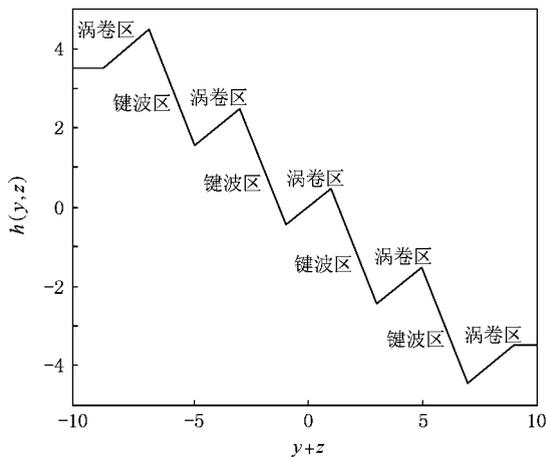


图 1 产生五涡卷混沌吸引子的非线性函数的区域表示

$h(y, z)$  中两端斜率为零的分段控制五涡卷混沌吸引子的边界. 5 个正斜率分段产生 5 个涡卷混沌吸引子<sup>[17, 18]</sup>. 4 个负斜率分段产生连接 5 个涡卷混沌吸引子的 4 个键带<sup>[19]</sup>. 当系统 (1) 的参数  $a = 0.04$ ,  $b = 2$ ,  $c = 0.16$ ,  $m = 5$  时, 其 Lyapunov 指数分别为  $L_1 = 0.7135$ ,  $L_2 = 0$ ,  $L_3 = -0.1417$ ,  $L_4 = -0.7484$ , 表明系统 (1) 处于混沌状态. 系统 (1) 产生五涡卷混沌吸引子时, 其动力学行为可以描述如下: 在 (5) 式的 11 个区域中, 取其中任意初始值  $(x_0, y_0, z_0, w_0)$  随时间的演化, 系统 (1) 将无限次通过  $y + z = -9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9$  这 10 个开关平面, 其轨迹将不断重复地通过以上 11 个区域. 由于系统 (1) 在不同的区域中会有不同的动力学行为<sup>[17–19]</sup>, 所以随着时间的演化, 系统 (1) 的轨迹将不断地被拉伸和折叠, 最终产生更复杂的动力学行为.

### 3. 多涡卷混沌吸引子的数值仿真

以产生二涡卷、三涡卷、四涡卷、五涡卷混沌吸引子为例, 初始值均选取  $x(0) = 0.1$ ,  $y(0) = 0.1$ ,  $z(0) = 0.21$  和  $u(0) = 0.1$ , 时间步长取 0.001 s. 二涡卷混沌吸引子非线性函数的参数为  $g = [1, 3]$ ,  $m = [2, -0.5]$ ; 三涡卷混沌吸引子非线性函数的参数为  $g = [1, 3, 5]$ ,  $m = [-2, 2, -0.5]$ ; 四涡卷混沌吸引子非线性函数的参数为  $g = [1, 3, 5, 7]$ ,  $m = [2, -2, 2, -0.5]$ ; 五涡卷混沌吸引子非线性函数的参数为  $g = [1, 3, 5, 7, 9]$ ,  $m = [-2, 2, -2, 2, -0.5]$ . 利用四阶 Runge-Kutta 方法分别对系统 (1) 进行求解, 数值仿真结果如图 2 所示.

### 4. 多涡卷混沌吸引子的电路设计及 EWB 仿真

在电路设计过程中, 采用 TL082 运算放大器, 电源电压  $E = \pm 15$  V, 输出饱和电压  $V_{\text{sat}} = \pm 13.5$  V<sup>[20]</sup>. 为了方便硬件实现, 确保电阻值的准确性, 所有电阻均采用精密可调电阻或精密可调电位器. 下面以产生五涡卷混沌吸引子为例说明电路的设计方法. 图 3 所示为利用 TL082 运算放大器实现非线性函数转折点的电路. 设运算放大器的输入电压为  $V_x$ , 输出电压为  $V_o$ , 输入电阻为  $R_a$ , 输出电阻为  $R_b$ , 则有下列关系成立:

$$V_o = -\frac{R_b}{R_a} \left( \left| V_x + \frac{R_a}{R_b} V_{\text{sat}} \right| - \left| V_x - \frac{R_a}{R_b} V_{\text{sat}} \right| \right). \quad (6)$$

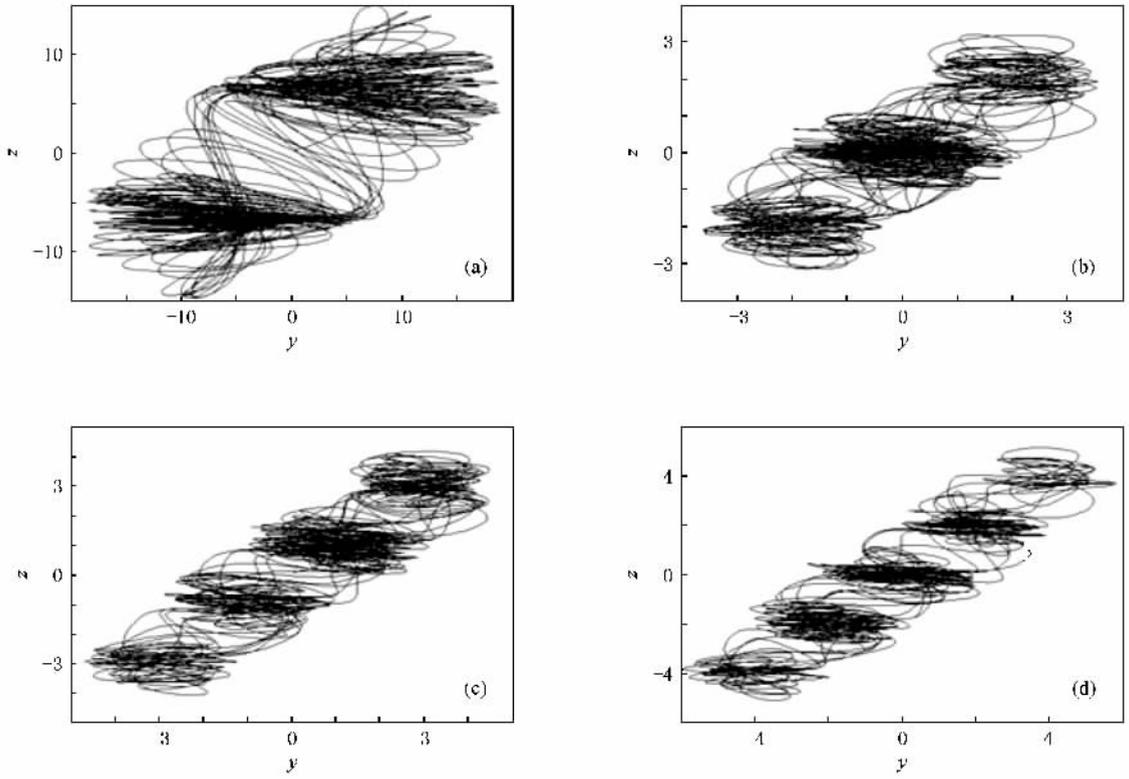


图2 数值仿真结果 (a)二涡卷混沌吸引子在  $y-z$  平面的投影 (b)三涡卷混沌吸引子在  $y-z$  平面的投影 (c)四涡卷混沌吸引子在  $y-z$  平面的投影 (d)五涡卷混沌吸引子在  $y-z$  平面的投影

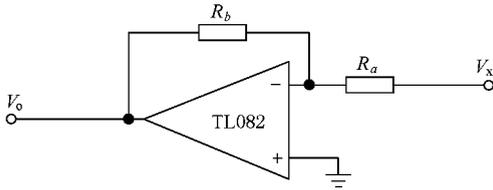


图3 利用 TL082 运算放大器实现非线性函数转折点的电路图

由(3)(4)式可得

$$\frac{R_{33}}{R_{32}} \frac{R_{54}}{R_{34}} = \frac{R_{42}}{R_{41}} \frac{R_{54}}{R_{44}} = 1,$$

$$\frac{R_{36}}{R_{35}} \frac{R_{38}}{R_{37}} \frac{R_{54}}{R_{40}} = \frac{R_{46}}{R_{45}} \frac{R_{48}}{R_{47}} \frac{R_{54}}{R_{50}} = -1,$$

$$\frac{R_{52}}{R_{51}} \frac{R_{54}}{R_{53}} = 0.25.$$

由系统(6)产生转折点为 1, 3, 5, 7, 9 V 的方程分别为

$$\frac{R_{32}}{R_{33}} V_{sat} = 1,$$

$$\frac{R_{35}}{R_{36}} V_{sat} = 3,$$

$$\frac{R_{41}}{R_{42}} V_{sat} = 5,$$

$$\frac{R_{45}}{R_{46}} V_{sat} = 7,$$

$$\frac{R_{51}}{R_{52}} V_{sat} = 9.$$

令  $R_{33} = R_{36} = R_{42} = R_{46} = R_{52} = 200 \text{ k}\Omega, R_{37} = R_{38} = R_{47} = R_{48} = R_{55} = R_{56} = 10 \text{ k}\Omega, R_{54} = 1 \text{ k}\Omega$ , 可得  $R_{32} = 14.8 \text{ k}\Omega, R_{34} = 13.5 \text{ k}\Omega, R_{35} = 44.4 \text{ k}\Omega, R_{40} = 4.5 \text{ k}\Omega, R_{41} = 74.07 \text{ k}\Omega, R_{44} = 2.7 \text{ k}\Omega, R_{45} = 103.7 \text{ k}\Omega, R_{50} = 19.2 \text{ k}\Omega, R_{51} = 133.33 \text{ k}\Omega, R_{53} = 6 \text{ k}\Omega$ . 同理, 可求得产生二涡卷混沌吸引子时, OP21 的输入电阻  $R_{39} = 18.02 \text{ k}\Omega$ , 产生三涡卷混沌吸引子时, OP21 的输入电阻  $R_{43} = 10.8 \text{ k}\Omega$ , 产生四涡卷混沌吸引子时, OP21 的输入电阻  $R_{49} = 7.72 \text{ k}\Omega$ .

根据文献[21]提出的模块化电路设计原理, 设计出一个通过联动开关  $K_1$  与  $K_2$  的切换, 可以产生二涡卷、三涡卷、四涡卷、五涡卷混沌吸引子的电路, 电路如图4所示. 令  $R_6 = R_7 = R_{13} = R_{14} = R_{20} = R_{21} = R_{27} = R_{28} = R_{29} = R_{30} = R_{31} = 10 \text{ k}\Omega$ , 根据电路理

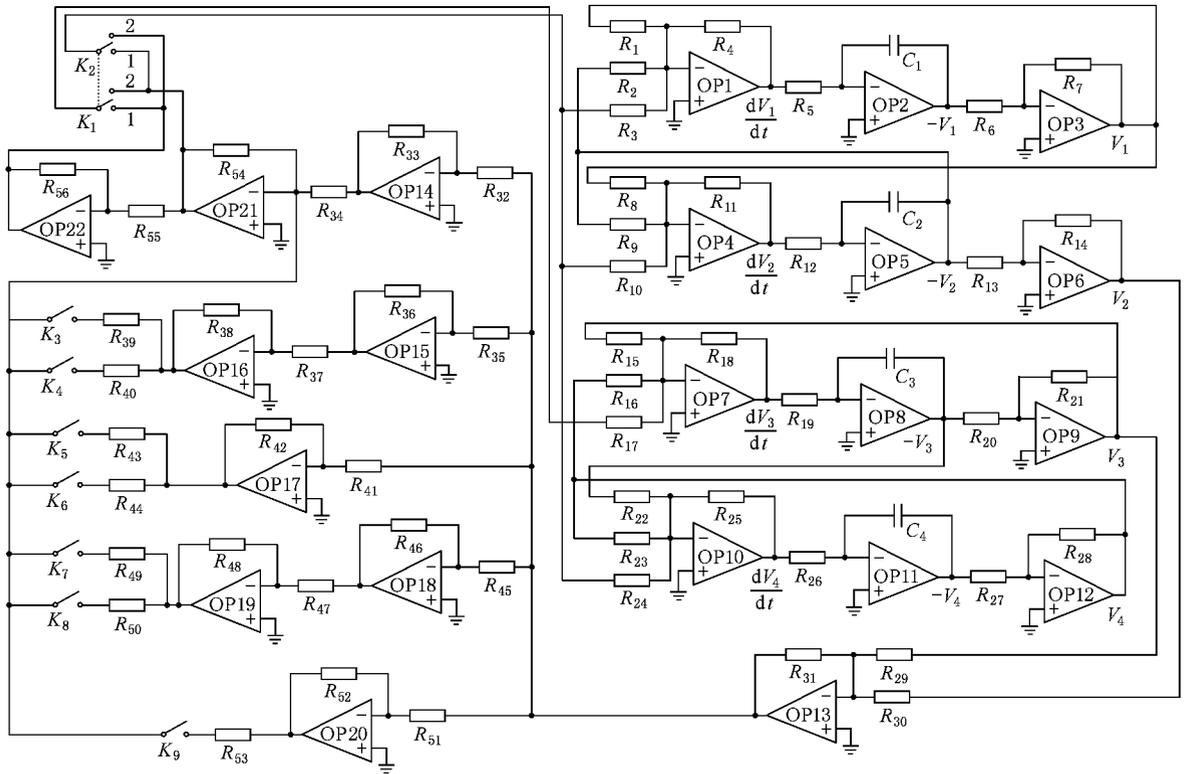


图 4 产生多涡卷混沌吸引子的电路图

论,不难得到五涡卷混沌吸引子的状态方程为

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= \frac{1}{R_5 C_1} \left[ -\frac{R_4}{R_1} V_1 - \frac{R_4}{R_2} (-V_2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{R_4}{R_3} (-f(V_2 + V_3)) \right], \\ \frac{dV_2}{dt} &= \frac{1}{R_{12} C_2} \left[ -\frac{R_{11}}{R_8} V_1 - \frac{R_{11}}{R_9} (-V_2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{R_{11}}{R_{10}} (-f(V_2 + V_3)) \right], \\ \frac{dV_3}{dt} &= \frac{1}{R_{19} C_3} \left[ -\frac{R_{18}}{R_{15}} V_3 - \frac{R_{18}}{R_{16}} V_4 \right. \\ &\quad \left. - \frac{R_{18}}{R_{17}} f(V_2 + V_3) \right], \\ \frac{dV_4}{dt} &= \frac{1}{R_{26} C_4} \left[ -\frac{R_{25}}{R_{22}} (-V_3) - \frac{R_{25}}{R_{23}} V_4 \right. \\ &\quad \left. - \frac{R_{25}}{R_{24}} (-f(V_2 + V_3)) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

这里

$$\begin{aligned} f(V_2 + V_3) &= (|V_2 + V_3 + 1| - |V_2 + V_3 - 1|) \\ &\quad - (|V_2 + V_3 + 3| - |V_2 + V_3 - 3|) \\ &\quad + (|V_2 + V_3 + 5| - |V_2 + V_3 - 5|) \\ &\quad - (|V_2 + V_3 + 7| - |V_2 + V_3 - 7|) \end{aligned}$$

$$+ 0.25x(|V_2 + V_3 + 9| - |V_2 + V_3 - 9|).$$

令  $R_1 = 40 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = R_3 = R_8 = 0.8 \text{ k}\Omega$ ,  $R_9 = R_{10} = R_{15} = R_{17} = R_{22} = R_{24} = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_5 = R_{12} = R_{19} = R_{26} = 50 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 33 \text{ nF}$ ,  $x = V_1$ ,  $y = V_2$ ,  $z = V_3$ ,  $w = V_4$ ,  $\tau = t/R_5 C_1$ , 系统(6)等价于系统(1). 产生二涡卷混沌吸引子时, 开关  $K_1, K_2$  接 2, 开关  $K_3$  闭合, 其余开关全部断开. 产生三涡卷混沌吸引子时, 开关  $K_1, K_2$  接 1, 开关  $K_4, K_5$  闭合, 其余开关全部断开. 产生四涡卷混沌吸引子时, 开关  $K_1, K_2$  接 2, 开关  $K_4, K_6, K_7$  闭合, 其余开关全部断开. 产生五涡卷混沌吸引子时, 开关  $K_1, K_2$  接 1, 开关  $K_4, K_6, K_8, K_9$  闭合, 其余开关全部断开. EWB 仿真结果如图 5 所示.

## 5. 电路实验结果

根据图 4 所示的电路图制作硬件电路并进行实验, 从 KEWOOD CS-4135A 型模拟示波器上可观察到二涡卷、三涡卷混沌吸引子, 如图 6 所示.

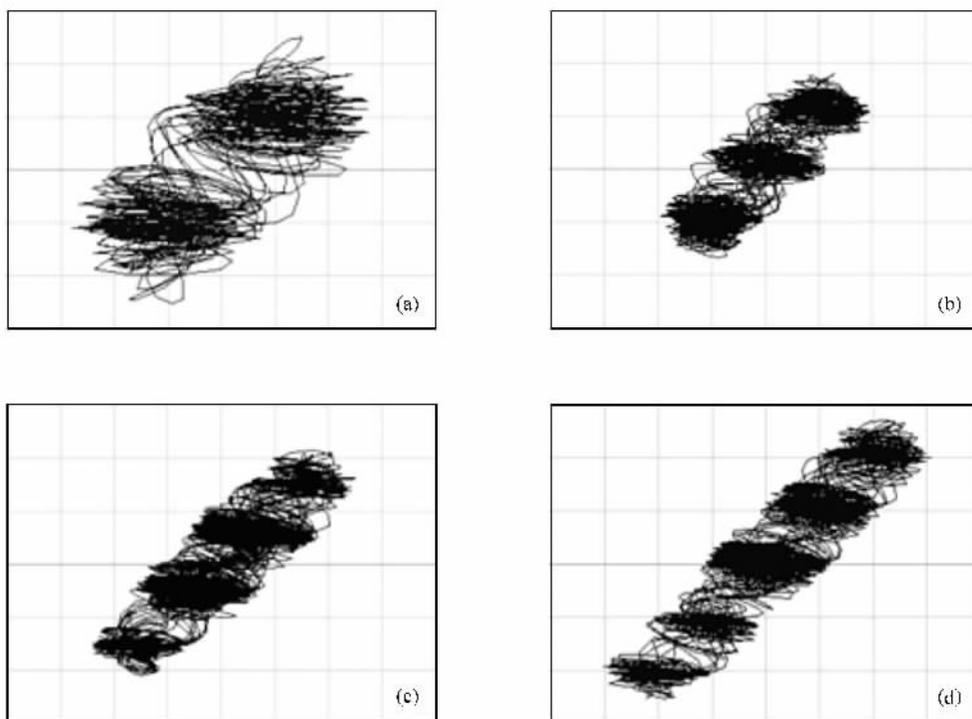


图5 EWB 电路仿真相图 (a)二涡卷混沌吸引子相图 (b)三涡卷混沌吸引子相图 (c)四涡卷混沌吸引子相图, (d)五涡卷混沌吸引子相图

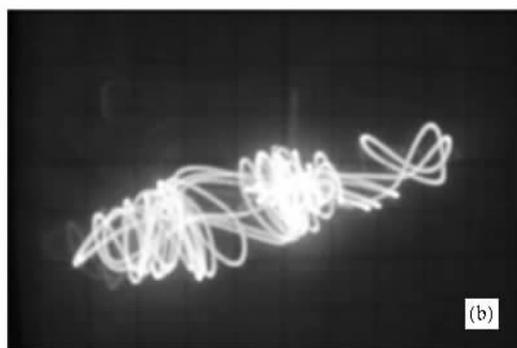
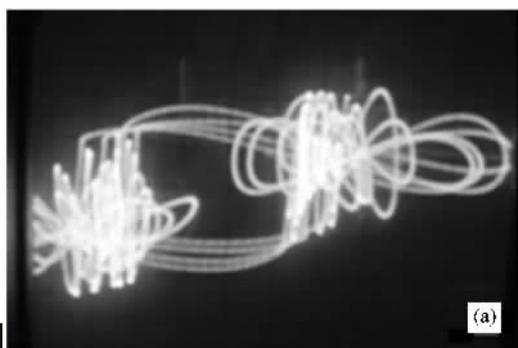


图6 二涡卷、三涡卷混沌吸引子实验结果 (a)二涡卷混沌吸引子 (b)三涡卷混沌吸引子

## 6. 结 论

本文提出了一种多涡卷混沌系统及其电路设计的方法,其核心思想是利用若干个分段线性函数构造一个新的非线性函数.随着分段线性函数线段的增加或减少,产生混沌吸引子的数量也相应地增加或减少.本文的研究以五涡卷混沌吸引子为例,通过

控制开关状态不同,可以分别产生二涡卷、三涡卷、四涡卷、五涡卷混沌吸引子.从非线性函数的构造到数值仿真、EWB 电路仿真,其结果一致,表明该方法是可行的.本文研究的理论意义在于通过建立数学模型、电路设计、EWB 电路仿真及硬件电路实现寻找一种普适规律.有关混沌系统在保密通信方面的应用将是下一步的研究目标.

- [ 1 ] Lü J H , Yu S M , Leung H , Chen G R 2006 *IEEE Trans. Circ. Syst.* [ **53** 149
- [ 2 ] Yu S M , Lü J H , Leung H 2005 *IEEE Trans. Circ. Syst.* [ **52** 1459
- [ 3 ] Yu S M , Lü J H , Chen G R 2007 *IEEE Trans. Circ. Syst.* [ **54** 2087
- [ 4 ] Yu S M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1500 ( in Chinese ) [ 禹思敏 2005 物理学报 **54** 1500 ]
- [ 5 ] Li Y , Yang B J , Lin H B , Liu X H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1994 ( in Chinese ) [ 李 月、杨宝俊、林红波、刘晓华 2005 物理学报 **54** 1994 ]
- [ 6 ] Xie K , Lei M , Feng Z J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1267 ( in Chinese ) [ 谢 鲲、雷 敏、冯正进 2005 物理学报 **54** 1267 ]
- [ 7 ] Zhou P 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1108 ( in Chinese ) [ 周 平 2003 物理学报 **52** 1108 ]
- [ 8 ] Suykens J , Vandewalle J 1993 *IEEE Trans. Circ. Syst.* [ **40** 861
- [ 9 ] Wang X , Chen G 2000 *IEEE Trans. Circ. Syst.* [ **47** 410
- [ 10 ] Yu S M , Lin Q H , Qiu S S 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 25 ( in Chinese ) [ 禹思敏、林清华、丘水生 2003 物理学报 **52** 25 ]
- [ 11 ] Kenendy M P , Kolumban G 2000 *IEEE Trans. Circ. Syst.* [ **47** 1661
- [ 12 ] Tang K S , Man K F , Zhong G Q , Chen G R 2001 *IEEE Trans. Circ. Syst.* [ **48** 636
- [ 13 ] Lu J , Zhou T , Chen G , Yang X 2002 *Chaos Solition Fract.* **12** 344
- [ 14 ] Yang X S , Li Q D 2003 *Chaos Solition Fract.* **18** 25
- [ 15 ] Yang X S , Li Q D 2002 *Electron. Lett.* **13** 623
- [ 16 ] Zhou P , Luo X H , Chen H Y 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1276 ( in Chinese ) [ 周 平、罗小华、陈海燕 2005 物理学报 **54** 1276 ]
- [ 17 ] Matsumoto T , Chua L O , Komuro M 1985 *IEEE Trans. Circ. Syst.* [ **32** 798
- [ 18 ] Kennedy M P 1993 *IEEE Trans. Circ. Syst.* [ **40** 657
- [ 19 ] Qiu S S 1997 *IEEE Trans. Circ. Syst.* [ **44** 1033
- [ 20 ] Sprott J C 2000 *Am. J. Phys.* **68** 758
- [ 21 ] Li Y , Yu S M , Dai Q Y , Liu M H , Liu Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3938 ( in Chinese ) [ 李 亚、禹思敏、戴青云、刘明华、刘 庆 2006 物理学报 **55** 3938 ]

## A family of multi-scroll chaotic attractors and its circuit design<sup>\*</sup>

Luo Xiao-Hua<sup>1)†</sup> Li Hua-Qing<sup>2)</sup> Dai Xiang-Guang<sup>3)</sup>

1) *College of Communication and Information Engineering , Chongqing University of Posts and Telecommunications , Chongqing 400065 , China* )

2) *College of Mathematics and Physics , Chongqing University of Posts and Telecommunications , Chongqing 400065 , China* )

3) *College of Mobile and Telecommunications , Chongqing University of Posts and Telecommunications , Chongqing 400065 , China* )

( Received 20 February 2008 ; revised manuscript received 16 July 2008 )

### Abstract

A method to generate multi-scroll chaotic attractors and its circuit design are proposed. It uses several subsection-linear-functions to construct the nonlinear function of chaotic system. By constructing different numbers of subsection , different numbers of scroll chaotic attractors can be obtained. Numerical simulation and EWB simulation results confirm the availability of the method.

**Keywords** : multi-scroll chaotic attractors , subsection-linear-function , circuit design , circuit experimental results

**PACC** : 0545

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundations of China ( Grant No. 60572089 ).

<sup>†</sup> E-mail : luoxh\_0630@yahoo.cn