第57卷 第12期 2008年12月
1000-3290/2008/57(12)/7535-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57, No.12, December, 2008

非光滑周期扰动与有界噪声联合作用下受迫 Duffing 系统的混沌预测*

牛玉俊[1)†] 徐 伟[1)] 戎海武[2)] 王 亮[1)] 冯进钤[1)]

1)(西北工业大学理学院,西安 710072)

2)(佛山科学技术学院理学院,佛山 528000)

(2008年5月5日收到;2008年8月27日收到修改稿)

考察了一类非光滑周期扰动和有界噪声联合作用下受迫 Duffing 系统的动力学行为. 对于非光滑扰动项,尝试采用 Fourier 级数展开的方法,得到与原系统等价的光滑系统. 在此基础上给出该系统的随机 Melnikov 函数,由 Smale 马蹄理论得到系统出现混沌的解析条件,并利用 Poincaré 截面、相图以及最大 Lyapunov 指数验证了理论结果.

关键词:非光滑系统, 有界噪声, 随机 Melnokov 函数, 最大 Lyapunov 指数

PACC:0547

1. 引 言

非光滑现象广泛存在于现实的生产和生活中[1,2],例如日常所见的各种摩擦、碰撞以及振动落砂机、冲击钻进机械、打桩机、打印机机头等. 在这些非光滑现象中,有的对生产和生活有着积极的影响,有的则相反. 所以需要加强对非光滑运动的研究,更进一步了解这些系统的动力学行为,以便更好地为生产和生活服务. 非光滑系统与光滑系统的最大区别在于:与具有连续向量场的光滑系统不同,非光滑系统的运动方程具有不连续的向量场,这使得它的雅可比行列式出现不连续点. 非光滑系统的这些特点使得它与光滑系统相比有着许多不同之处,分岔、混沌现象也更加复杂.

关于非光滑动力系统,近年来引起了广大学者的很大兴趣,并已取得一些研究成果. Nordmark[3]根据局部奇异性分析,提出一种近似描述非光滑分岔的方法,在非光滑系统的研究中做出了开创性的工作. Leine[4]系统地研究了具有不连续向量场系统的分岔问题,指出非光滑系统不但具有传统的音叉分岔、Hopf 分岔等常见的分岔现象,更具有由非光滑性所引起的碰撞擦边分岔等非光滑系统所独有的分岔现象. 金俐等[5]利用局部映射的方法研究了非光滑系统的最大 Lyapunov 指数计算方法,并将理论值与数值结果进行比较,取得了较好的效果. 李明等[6]基于符号序列描述了一类非光滑系统中的分岔和混沌现象. 王林泽等[7]利用外加正弦驱动抑制了一类分段光滑系统的混沌. 冯进钤等[8]利用正交的 Chebyshev 多项式逼近非光滑系统来研究它的倍周期分岔现象. Awrejcewicz 等[9,10]给出了一种计算非光滑系统 Melnikov 函数的方法,并将所得理论结果与数值结果进行了比较,说明在非光滑动力系统的研究中 Melnikov 方法仍是一种预测混沌的有效方法. Du 等[11—13]充分考虑了非光滑系统的特性,用微扰法给出了一种非光滑碰撞系统 Melnikov 函数的计算方法. 从已有的文献及其研究内容看,非光滑系统的研究还处于一个方兴未艾的阶段.

本文讨论如下一类非光滑扰动和有界噪声联合作用下的受迫 Duffing 系统:

$$\ddot{x} + \varepsilon a\dot{x} - bx + cx^3 = \varepsilon\big(f\cos(\omega_1 t) + dg(x) + e\xi(t)\big), \quad (1)$$

式中的 $g(x)$ 为系统的非光滑扰动项, $\xi(t)$ 为有界噪声,即

$$\xi(t) = \cos(\omega_2 t + \varphi),$$
$$\varphi = \sigma B(t) + \Gamma.$$

* 国家自然科学基金(批准号:10772046)资助的课题.

† E-mail:nyjyrff@yeah.net

这里 ω_2 为中心频率，$B(t)$ 为标准 Wiener 过程，Γ 为 $[0,2\pi)$ 上均匀分布的随机变量. 有界噪声 $\xi(t)$ 的均值为零，协方差函数为

$$c(\tau)=\frac{e^2}{2}\exp\left(-\frac{\sigma^2\tau}{2}\right)\cos(\omega_2\tau). \tag{2}$$

方差为 $c(0)=e^2/2$，$\xi(t)$ 的双边谱密度函数为

$$S_\xi(\omega)=\frac{e^2}{2\pi}\left[\frac{\sigma^2}{4(\omega-\omega_1)^2+\sigma^4}+\frac{\sigma^2}{4(\omega+\omega_1)^2+\sigma^4}\right]. \tag{3}$$

因而有界噪声是一个广义平稳随机过程，具有有限的功率，功率谱密度的形状由 ω_1 和 σ 决定. 通过 ω_1 和 σ 的适当取值，$\xi(t)$ 可以具有大气湍流的 Drydon 谱和 Van Karmon 谱，能够用来模拟风中的湍流和地震的地面运动，并且噪声的带宽主要由 σ 决定. 当 $\sigma\to 0$ 时，它是一个窄带过程；而当 $\sigma\to\infty$ 时，$\xi(t)$ 趋于白噪声. 从而有界噪声是一个合理的随机激励模型.

2. 非光滑周期扰动与有界噪声联合作用下受迫 Duffing 系统的随机 Melnikov 过程

对于系统(1)，由于其非光滑扰动项 $g(x)$，使得用来研究光滑动力系统的传统方法不能直接应用到该系统中去. 由 Fourier 级数理论可知，如果非光滑扰动项 $g(x)$ 是周期为 $2l$ 的分段光滑周期函数，它可以表示为 Fourier 级数，即

$$g(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right), \tag{4}$$

式中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}g(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,\cdots), \tag{5}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots). \tag{6}$$

将(4)—(6)式代入系统(1)中，即可得到与系统(1)等价的光滑动力系统，从而可用光滑动力系统的研究方法来考察这一类非光滑动力系统的动力学行为. 对于系统(1)，取

$$g(x)=|\sin x|,$$

则有如下的非光滑周期扰动和有界噪声联合作用下的 Duffing 系统：

$$\begin{aligned}&\ddot{x}+\varepsilon a\dot{x}-bx+cx^3\\&=\varepsilon\left(f\cos(\omega_1 t)+d\,|\sin x|+e\xi(t)\right).\end{aligned} \tag{7}$$

这是一个典型的非光滑系统，$|\sin x|$ 的 Fourier 级数为

$$|\sin x|=\frac{2}{\pi}\left[1-2\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\cos(2mx)}{4m^2-1}\right]. \tag{8}$$

系统(7)等价于如下的光滑系统：

$$\begin{aligned}&\ddot{x}+\varepsilon a\dot{x}-bx+cx^3\\&=\varepsilon\left(f\cos(\omega_1 t)+\frac{2d}{\pi}\left[1-2\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\cos(2mx)}{4m^2-1}\right]+e\xi(t)\right).\end{aligned} \tag{9}$$

为了考察用系统(9)模拟系统(7)的精确程度，取 $a=2.75$，$b=0.35$，$c=0.225$，$d=0.125$，$e=0.0001$，$\omega_1=0.75$，$\omega_2=0.2$，$\sigma=0.8$，$\varepsilon=0.1$，$f=0.5$. 首先得到系统(7)的时间历程图，如图 1 中的实线所示. 再在上述参数下得到系统(9)的时间历程图，为清楚起见，每隔 200 个点取一个点，得到光滑近似系统(9)的时间历程图，如图 1 中的星号线所示. 从图 1 可以看出，用系统(9)去近似系统(7)，效果相当好.

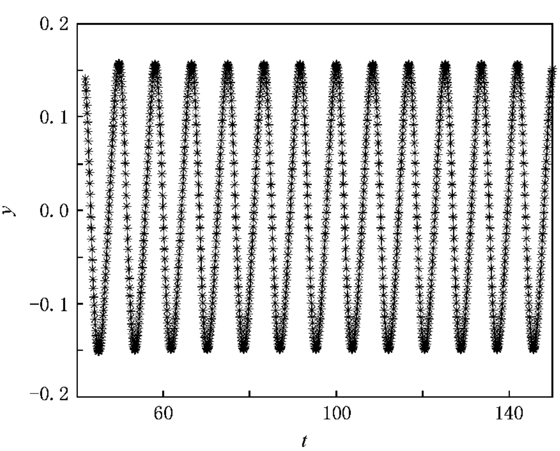

图 1 系统(7)和(9)的时间历程图 实线为系统(7)，星号线为系统(9)

系统(9)等价于如下的一阶系统：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y,\\\dot{y}&=bx-cx^3+\varepsilon\Big[f\cos(\omega_1 t)\\&\quad+\frac{2d}{\pi}\left(1-2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2mx)}{4m^2-1}\right)\\&\quad+e\xi(t)-ay\Big].\end{aligned} \tag{10}$$

当 $\varepsilon=0$ 时，得到未受扰动系统

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y,\\\dot{y}&=bx-cx^3.\end{aligned} \tag{11}$$

系统(11)具有如下三个不动点：中心$\left(\sqrt{\frac{b}{c}},0\right)$和$\left(-\sqrt{\frac{b}{c}},0\right)$，鞍点$(0,0)$．此时系统的 Hamilton 函数为

$$H(x,y)=\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}bx^2+\frac{1}{4}cx^4, \tag{12}$$

势函数为

$$V(x)=-\frac{b}{2}x^2+\frac{c}{4}x^4.$$

取 $b=1.0$，$c=0.5$，得到系统(11)的相图和势函数图，如图 2 所示．经过鞍点的同宿轨道满足

$$\dot{x}=x\sqrt{b-\frac{cx^2}{2}}. \tag{13}$$

对(13)式两端分别关于 t 积分可得同宿轨道

$$(x^0(t),y^0(t))=\left(\pm\sqrt{\frac{2b}{c}}\operatorname{sech}(\sqrt{b}t),\right.$$
$$\left.\mp b\sqrt{\frac{2}{c}}\operatorname{sech}(\sqrt{b}t)\tanh(\sqrt{b}t)\right). \tag{14}$$

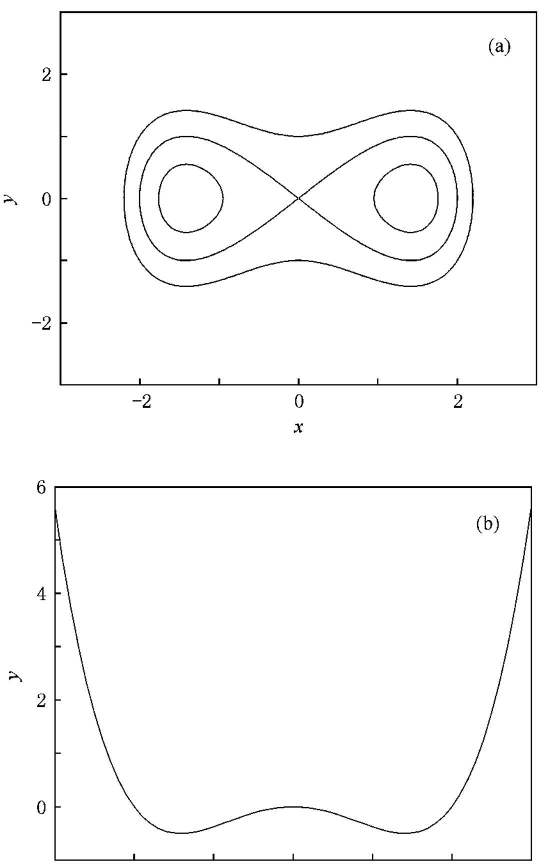

图 2　系统(11)的相图和势函数图　(a)相图，(b)势函数图

3. 解析结果

由文献[14,15]的随机 Melnikov 方法可得系统(10)的随机 Melnikov 函数

$$\begin{aligned}M(t_1,t_2)=&-\frac{2ab^2}{c}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sech}^2(\sqrt{b}t)\tanh^2(\sqrt{b}t)\mathrm{d}t\\&-\frac{2db}{\pi}\sqrt{\frac{2}{c}}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sech}(\sqrt{b}t)\tanh(\sqrt{b}t)\mathrm{d}t\\&+\frac{4db}{\pi}\sqrt{\frac{2}{c}}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{4m^2-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos 2m\\&\times\left(\sqrt{\frac{2b}{c}}\operatorname{sech}(\sqrt{b}t)\right)\\&\times\operatorname{sech}(\sqrt{b}t)\tanh(\sqrt{b}t)\mathrm{d}t\\&-fb\sqrt{\frac{2}{c}}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sech}(\sqrt{b}t)\tanh(\sqrt{b}t)\\&\times\cos\omega_1(t_1-t)\mathrm{d}t\\&-eb\sqrt{\frac{2}{c}}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sech}(\sqrt{b}t)\\&\times\tanh(\sqrt{b}t)\zeta_{t_2-t}\mathrm{d}t\\\equiv&\,p_1+p_2+p_3+p_4+Z_{t_2},\end{aligned}$$

式中 ζ_{t_2-t} 为 Shinozuka 噪声，

$$\zeta_t=\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{n=1}^{N}\frac{\kappa}{K(\nu_n)}\cos(\nu_n t+\phi_n).$$

由于 p_1 中的

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sech}^2(\sqrt{b}t)\tanh^2(\sqrt{b}t)\mathrm{d}t=\frac{2}{3\sqrt{b}},$$

从而有

$$p_1=-\frac{4ab^2}{3\sqrt{b}c}.$$

p_2 中的被积函数以及 p_3 中的每一项积分中被积函数都是奇函数，积分区间关于原点对称，积分值均为零．对于 p_4 中的

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sech}(\sqrt{b}t)\tanh(\sqrt{b}t)\cos(\omega_1t_1-\omega_1t)\mathrm{d}t\\&=\cos(\omega_1t_1)\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sech}(\sqrt{b}t)\tanh(\sqrt{b}t)\cos(\omega_1t)\mathrm{d}t\\&\quad+\sin(\omega_1t_1)\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sech}(\sqrt{b}t)\tanh(\sqrt{b}t)\sin(\omega_1t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

类似地，第一项的被积函数为奇函数，积分区间关于原点对称，因而第一项为零．第二项的积分可由留数方法算出，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sech}(\sqrt{b}t)\tanh(\sqrt{b}t)\sin(\omega_1t)\mathrm{d}t=\frac{\pi\omega_1}{b}\operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega_1}{2\sqrt{b}}\right),$$

故

$$p_4 = -f\pi\omega_1\sqrt{\frac{2}{c}}\sin(\omega_1 t_1)\operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega_1}{2\sqrt{b}}\right).$$

对于 Z_{t_2},利用传递函数

$$\begin{aligned}H(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(-eb\sqrt{\frac{2}{c}}\right)\operatorname{sech}(\sqrt{b}t)\tanh(\sqrt{b}t) \\ &\quad\times\exp\{-\mathrm{i}\omega t\}\mathrm{d}t \\ &= -eb\sqrt{\frac{2}{c}}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sech}(\sqrt{b}t)\tanh(\sqrt{b}t) \\ &\quad\times\cos(\omega t)\mathrm{d}t + \mathrm{i}eb\sqrt{\frac{2}{c}}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sech}(\sqrt{b}t) \\ &\quad\times\tanh(\sqrt{b}t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

这里第一项的积分函数为奇函数,积分区间关于原点对称,其值为零.第二项的积分可由留数方法算出.所以

$$H(\omega) = \mathrm{i}\pi e\omega\sqrt{\frac{2}{c}}\operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2\sqrt{b}}\right).$$

Z_{t_2} 为一个平稳随机过程,均值为零,方差为

$$\begin{aligned}\sigma_Z^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty}|H(\omega)|^2 S_\zeta(\omega)\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{\pi e^2\sigma^2}{c}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\operatorname{sech}^2\left(\frac{\pi\omega}{2\sqrt{b}}\right) \\ &\quad\times\left[\frac{1}{4(\omega-\omega_1)^2+\sigma^4}+\frac{1}{4(\omega+\omega_2)^2+\sigma^4}\right]\mathrm{d}\omega,\end{aligned}$$

式中的积分可由数值方法得到任意精度的积分值.所以,在均方意义下系统出现混沌的解析条件为

$$\langle p_1\rangle^2 + \langle p_4\rangle^2 = \sigma_Z^2,$$

即

$$\begin{aligned}&\frac{\pi e^2\sigma^2}{c}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\operatorname{sech}^2\left(\frac{\pi\omega}{2\sqrt{b}}\right) \\ &\quad\times\left[\frac{1}{4(\omega-\omega_1)^2+\sigma^4}+\frac{1}{4(\omega+\omega_2)^2+\sigma^4}\right]\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{4ab^2}{3\sqrt{bc}} + f\pi\omega_1\sqrt{\frac{2}{c}}\sin(\omega_1 t_1)\operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega_1}{2\sqrt{b}}\right).\end{aligned}$$

为简单起见,记

$$\begin{aligned}\Delta &= \int_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\operatorname{sech}^2\left(\frac{\pi\omega}{2\sqrt{b}}\right) \\ &\quad\times\left[\frac{1}{4(\omega-\omega_1)^2+\sigma^4}+\frac{1}{4(\omega+\omega_2)^2+\sigma^4}\right]\mathrm{d}\omega,\end{aligned}$$

可以得到系统出现混沌的阈值

$$f^* = \frac{3\pi e^2\sigma^2\Delta - 4ab\sqrt{b}}{3\sqrt{2}c\pi\omega_1\operatorname{sech}(\pi\omega_1/2\sqrt{b})}. \qquad (15)$$

当 $f > f^*$ 时,由 Smale-Birkhoff 定理可知,Melnikov 函数 $M(\theta)$ 会出现简单零点,对于充分小的 ε,系统的稳定流形与不稳定流形横截相交,系统可能出现 Smale 马蹄意义下的混沌.当 $f < f^*$ 时,$M(\theta)$ 不会出现零点,系统不会发生稳定流形与不稳定流形横截相交的情况,故不会出现混沌,系统将为周期运动.

4. 数值模拟

为验证以上的理论结果,取 $a = 2.75$,$b = 0.35$,$c = 0.225$,$d = 0.125$,$e = 0.0001$,$\omega_1 = 0.75$,$\omega_2 = 0.2$,$\sigma = 0.8$,$\varepsilon = 0.1$,代入(15)式可得 $f^* = 1.9064$.分别取 $f = 1.0$,$f = 1.8$,由以上结果可知,系统应为周期运动,相应的相图和 Poincaré 截面图如图 3 和图 4 所示,系统分别为周期 1 和周期 2 运动,即系统发生了倍周期分岔现象.同样取 $f = 2.2$,由以上的理论结果知道,系统应为混沌状态,此时的相图和相应的 Poincaré 截面图如图 5 所示.

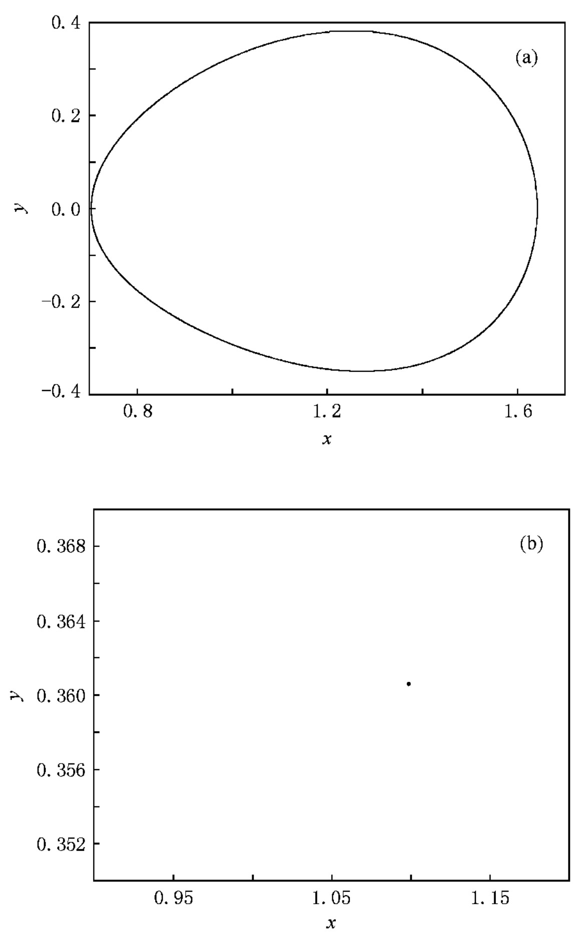

图 3 $f = 1.0$ 时的相图和 Poincaré 截面图 (a)相图,(b)Poincaré 截面图

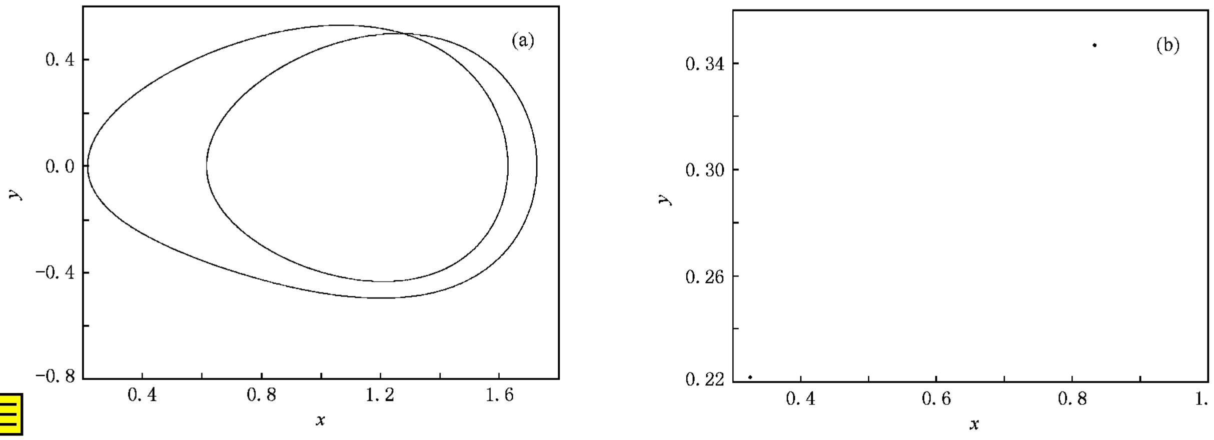

图 4　$f=1.8$ 时的相图和 Poincaré 截面图　(a) 相图，(b) Poincaré 截面图

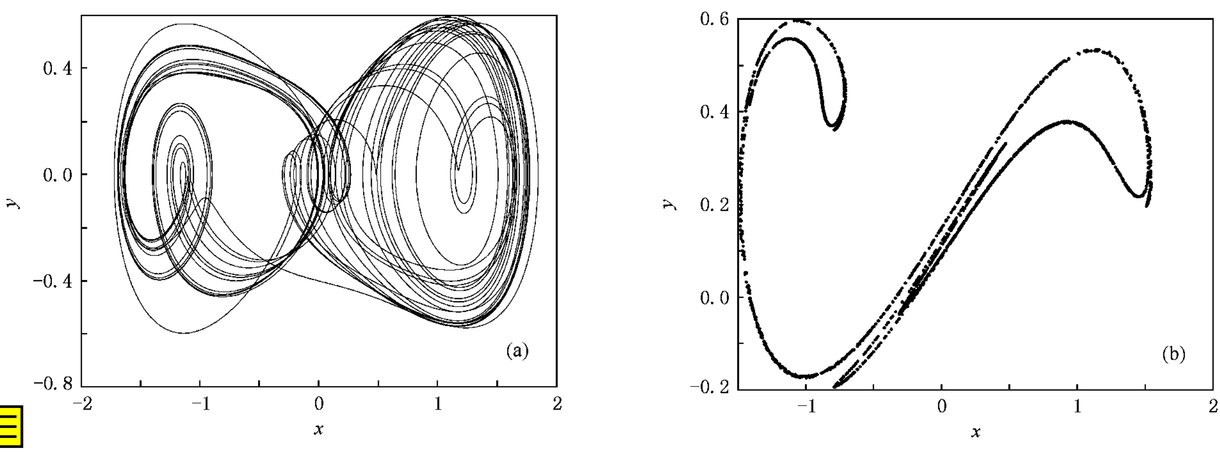

图 5　$f=2.2$ 时的相图和 Poincaré 截面图　(a) 相图，(b) Poincaré 截面图

利用 Wolf[16] 计算最大 Lyapunov 指数的方法，在上述参数条件下，得到系统(7)的最大 Lyapunov 指数，如图 6 所示．特别地，当 $f=1.0$ 时，系统的最大 Lyapunov 指数 $\lambda=-0.13602$，系统为周期运动；当 $f=1.8$ 时，系统的最大 Lyapunov 指数 $\lambda=-0.12032$，

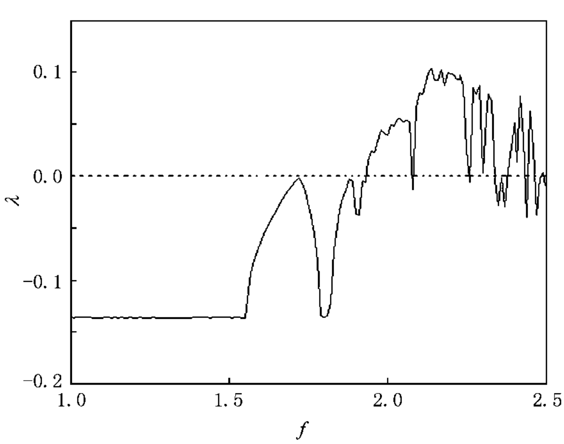

图 6　系统(7)的最大 Lyapunov 指数

系统也为周期运动；当 $f=2.2$ 时，系统的最大 Lyapunov 指数 $\lambda=0.10933$，系统出现混沌现象．这与前面的相图和 Poincaré 截面图的结果一致．

5．结　　论

本文研究了一类非光滑周期扰动与有界噪声联合作用下的受迫 Duffing 系统的动力学行为．通过 Fourier 级数展开的方法处理系统的非光滑周期扰动项，得到与原系统等价的光滑动力系统，并通过两者的时间历程图来说明它们的近似程度．运用随机 Melnikov 方法，求出等价系统的随机 Melnikov 过程，由 Smale 马蹄理论得到系统出现混沌的解析条件．最后通过相图、Poincaré截面图以及最大Lyapunov指数这些数值方法，验证了理论结果的正确性．这说明 Fourier 级数展开是处理这一类非光滑系统的有效方法．

[1] Jin D P, Hu H Y 2005 *Vibration and Control of Collision* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [金栋平、胡海岩 2005 碰撞振动与控制 (北京 科学出版社)]

[2] Ding W C, Xie J H 2005 *Adv. Mech.* **35** 51 (in Chinese) [丁旺才、谢建华 2005 力学进展 **35** 51]

[3] Nordmark A B 1991 *J. Sound. Vib.* **145** 279

[4] Leine R I 2000 *Bifurcations in Discontinuous Mechanical Systems of Filippov-type* (Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven)

[5] Jin L, Lu Q S, Twize E H 2006 *J. Sound. Vib.* **298** 1019

[6] Li M, Ma X K, Dai D, Zhang H 2005 *Acta Phs. Sin.* **54** 1084 (in Chinese) [李 明、马西奎、戴 栋、张 浩 2005 物理学报 **54** 1084]

[7] Wang L Z, Zhao W L 2005 *Acta Phs. Sin.* **54** 4038 (in Chinese) [王林泽、赵文礼 2005 物理学报 **54** 4038]

[8] Feng J Q, Xu W, Wang R 2006 *Acta Phs. Sin.* **55** 5733 (in Chinese) [冯进钤、徐 伟、王 蕊 2006 物理学报 **55** 5733]

[9] Awrejcewicz J, Pyryev Y 2006 *Nonlin. Anal.* **7** 12

[10] Awrejcewicz J, Holicke M M 1999 *Int. J. Bifur. Chaos* **9** 505

[11] Du Z D, Zhang W N 2005 *Comput. Math.* **50** 445

[12] Du Z D, Li Y R, Zhang W N 2007 *Nonlin. Anal.* **67** 1344

[13] Li Y R, Du Z D, Zhang W N 2008 *Nonlin. Anal.* **68** 2681

[14] Simiu E 2001 *Chaotic Transitions in Deterministic and Stochastic Dynamical Systems* (Princeton: Princeton University Press)

[15] Liu Z R 2000 *The Analytical Method in the Study of Chaos* (Shanghai: Shanghai University Press) (in Chinese) [刘增荣 2000 混沌研究中的解析方法 (上海:上海大学出版社)]

[16] Wolf A 1985 *Physica* D **16** 285

Chaos prediction in the Duffing-type system with non-smooth periodic perturbation and bounded parametric excitation*

Niu Yu-Jun[1)†] Xu Wei[1)] Rong Hai-Wu[2)] Wang Liang[1)] Feng Jin-Qian[1)]

1) (*School of Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an* 710072, *China*)

2) (*School of Science, Fushan University, Fushan* 528000, *China*)

(Received 5 May 2008; revised manuscript received 27 August 2008)

Abstract

In this paper, the dynamics of Duffing-type system with non-smooth periodic perturbation and bounded noise was studied. The theory of Fourier series was used in this system to deal with the non-smooth character for the first time. The analytical condition for the appearance of chaos was given using stochastic Melnikov method. The numerical simulations confirm the validity of this method.

Keywords: non-smooth dynamics, bounded noise, stochastic Melnikov function, maximal Lyapunov exponents

PACC: 0547

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10772046).

† E-mail: nyjyrff@yeah.net