

# 制备囚禁冷离子的振动压缩量子态

张 森 贾焕玉 姬晓辉 司 坤 韦联福<sup>†</sup>

(西南交通大学量子光电信息实验室,成都 610031)

(2007 年 12 月 17 日收到;2008 年 9 月 8 日收到修改稿)

基于非 Lamb-Dicke 近似下激光-离子相互作用的动力学规律,讨论了如何利用一系列的激光脉冲来驱动囚禁冷离子.从囚禁冷离子的运动基态出发获得压缩相干态、压缩奇偶相干态、压缩真空态等一系列的振动数态的叠加态.结果表明,只要适当地调节各个所用激光脉冲的长度和相位,总能很好逼近所需要的压缩量子态.

关键词:囚禁冷离子,激光脉冲,压缩量子态

PACC:4250

## 1. 引 言

近来,激光操纵囚禁冷离子技术已有很大发展.利用激光与囚禁冷离子的相互作用,人们能够以极高的精确度相干地操纵囚禁离子的内部电子态和外部振动量子态<sup>[1-4]</sup>.囚禁冷离子系统为量子力学基本理论的研究、量子计算机的物理实现以及各种典型量子态的人工制备等提供了一个很好的工作平台<sup>[5-11]</sup>.事实上,各种非经典的量子态(如声子数态、相干态、奇偶相干态、压缩态、薛定谔猫态及相位态等)的制备,作为量子力学研究的若干重大进展之一,受到了人们的极大关注<sup>[12-17]</sup>.例如,文献 16 就成功地在实验上制备出不同相位相干态的叠加态.这些非经典量子态不仅验证了量子力学原理,而且在科学和技术的各个领域都有着重要的意义<sup>[18-20]</sup>.尤其是具有显著的非经典性质(如压缩效应、反群聚效应等<sup>[21-23]</sup>)的压缩量子态,在量子低噪声通信、精密测量、精密计算、引力波探测以及量子破坏测量等方面都具有重要的应用价值<sup>[24-27]</sup>.因而,对压缩量子态的制备,无论在理论上还是实验上都有着重要的意义.

由于囚禁冷离子系统是制备各种量子态的最佳途径之一,利用激光驱动射频阱中的囚禁冷离子来制备压缩量子态就成为近来的热点课题<sup>[28-34]</sup>.例

如,文献 30 利用不同频率的两束 Raman 光来驱动处于振动真空态的囚禁冷离子制备出压缩真空态,文献 33 利用运动的驻波来激发囚禁离子而获得一种‘黑’压缩相干态,文献 34 利用双能级原子与单模腔场的相互作用来制备压缩奇偶相干态等等.这些方法大多数是通过构建压缩算符<sup>[33]</sup>来实现的,并且都需要满足一个共同的条件,即囚禁离子的内外自由度之间的耦合必须足够弱,以至于使所谓的 Lamb-Dicke (LD) 近似能够成立<sup>[1]</sup>.但是,在实际的实验系统中,单个囚禁冷离子的内外自由度之间的耦合是可调的,因而原则上系统可以工作于 LD 近似范围之外<sup>[35-38]</sup>,从而实现较强的耦合.

最近,在非 LD 近似下,文献 35,39 建议了一种通过叠加足够多的振动数态的方法来制备囚禁离子的振动奇偶相干态、相干态.事实上,利用该方案可以进一步制备囚禁离子的振动压缩相干态、压缩奇偶相干态和压缩真空态等.这里的压缩量子态并不是通过构造压缩算符获得,而是通过多个可控的量子演化过程使不同的振动数态按不同的权重合成而得.这样的制备过程,并不需要 LD 近似,也可以便捷地制备出各种压缩量子态.另一方面,在以前的大多数研究中<sup>[35-39]</sup>,都忽略了激光驱动离子动力学演化中因坐标变换所产生的附加相位因子,因而理论计算值与实验值有一定的差异.在本文制备压缩量子态的过程中,我们考虑了这些相位因子,因而理论

<sup>†</sup> E-mail: lfwei@swjtu.edu.cn

计算值将更为精确可靠.

## 2. 压缩相干态、压缩奇偶相干态、压缩真空态的定义

相干态是由熟知的位移算符作用于真空态而得到,而压缩相干态则由压缩算符作用在相干态而得到.在占有数表象中压缩相干态可表示为<sup>[40]</sup>

$$\begin{aligned} |\alpha_s\rangle &= S(\xi)D(\alpha)|0\rangle \\ &= \exp\left[\frac{1}{2}\xi^* a^2 - \frac{1}{2}\xi(a^\dagger)^2\right] \\ &\quad \times \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)|0\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} G_n(\alpha, r, \varphi)|n\rangle, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} G_n(\alpha, r, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{\cosh(r)}n!} \exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right. \\ &\quad \left. + \frac{\exp(-i\varphi)\sinh(r)\alpha^2}{2\cosh(r)}\right] \\ &\quad \times \left(\frac{\exp(i\varphi)\sinh(r)}{2\cosh(r)}\right)^{n/2} H_n \\ &\quad \times \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2\exp(i\varphi)\sinh(r)\cosh(r)}}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

式中,

$$D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)$$

为位移算符,

$$S(\xi) = \exp\left(\frac{1}{2}\xi^* a^2 - \frac{1}{2}\xi(a^\dagger)^2\right)$$

为压缩算符.这里,  $a^\dagger$  和  $a$  为熟知的产生和湮没算符,  $\xi = r\exp(i\varphi)$  为压缩参数( $r$  为压缩因子,  $\varphi$  为压缩角),  $H_n(z)$  为厄密多项式;而  $\alpha = |\alpha|\exp(i\vartheta)$

( $|\alpha|$  为相干态强度,  $\vartheta$  为相干态的相位角).

类似地,奇偶相干态是由不同相位的两个相干态叠加而成,而下列压缩奇偶相干态则是由压缩算符作用于奇偶相干态而得到<sup>[29,34]</sup>:

$$\begin{aligned} |\alpha_{s,o}\rangle &= S(\xi)C_o(|\alpha_-| - |\alpha_+|) \\ &= C_o(|\alpha_-| - |\alpha_+|), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} |\alpha_{s,e}\rangle &= S(\xi)C_e(|\alpha_+| - |\alpha_-|) \\ &= C_e(|\alpha_+| - |\alpha_-|), \end{aligned} \quad (4)$$

式中

$$C_o = [2 - 2\exp(-2|\alpha|^2)]^{1/2}, \quad (5)$$

$$C_e = [2 + 2\exp(-2|\alpha|^2)]^{1/2}. \quad (6)$$

在占有数表象中,压缩奇偶相干态可表示为

$$|\alpha_{s,o}\rangle = C_o \left[ \sum_{n=0}^{\infty} G_n(\alpha, r, \varphi)|n\rangle \right]$$

$$\begin{aligned} &- \sum_{n=0}^{\infty} G_n(-\alpha, r, \varphi)|n\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} O_n(\alpha, r, \varphi)|n\rangle, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} |\alpha_{s,e}\rangle &= C_e \left[ \sum_{n=0}^{\infty} G_n(\alpha, r, \varphi)|n\rangle \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} G_n(-\alpha, r, \varphi)|n\rangle \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E_n(\alpha, r, \varphi)|n\rangle, \end{aligned} \quad (8)$$

式中

$$O_n(\alpha, r, \varphi) = C_o [G_n(\alpha, r, \varphi) - G_n(-\alpha, r, \varphi)], \quad (9)$$

$$E_n(\alpha, r, \varphi) = C_e [G_n(\alpha, r, \varphi) + G_n(-\alpha, r, \varphi)]. \quad (10)$$

最后,压缩真空态是由压缩算符作用于真空态而得到<sup>[13]</sup>.显然,压缩真空态就是  $\alpha = 0$  的压缩相干态.由(1)式,并考虑到厄密多项式的性质

$$H_{2n}(0) = (-1)^n (2n)! / n!, \quad (11)$$

$$H_{2n+1}(0) = 0,$$

即得占有数表象中的压缩真空态

$$\begin{aligned} |0_s\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\cosh(r)}} \\ &\quad \times \frac{[-\exp(i\varphi)\sinh(r)](2n)!^{1/2}}{n!2^n} \\ &\quad \times |2n\rangle \end{aligned} \quad (12)$$

## 3. 激光-离子相互作用动力学

一个囚禁在一维射频频阱<sup>[1]</sup>中的二能级冷离子与单模激光场(初相位为  $\theta_L$ 、频率为  $\omega_L$ 、波矢为  $k_L$ )的相互作用,一般可用如下的哈密顿量表示<sup>[11]</sup>:

$$H = H_0 + H_{\text{int}}(t). \quad (13)$$

这里

$$H_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z + \hbar\nu\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \quad (14)$$

是描述离子内部和外部自由度的哈密顿量,其中  $\nu$ ,  $\hbar\omega_0$  和  $\sigma_z$  分别为离子的外部振动频率、内部两能级之差和自旋 Pauli 算符的  $z$  分量;而  $H_{\text{int}}(t)$  是描述激光-离子相互作用的哈密顿量<sup>[35-39]</sup>,

$$\begin{aligned} H_{\text{int}}(t) &= \frac{\hbar\Omega}{2} \{ \sigma_+ \exp[i\gamma(a + a^\dagger) \\ &\quad - i\omega_L t - i\theta_L] + \text{H.C.} \}, \end{aligned} \quad (15)$$

其中  $\Omega$  为描述激光离子相互作用强度的 Rabi 频率,

$\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$  为上升算符,  $\eta$  为描述离子内外自由度耦合强度的 LD 参数. 在以角频率  $\omega_L$  旋转的坐标系中(这个坐标变换可通过作一含时规范变换  $W(t) = \exp(-it\omega_L\sigma_z/2)$  来实现), 上述激光-离子相互作用系统可用如下不含时间的哈密顿量描述<sup>[35-39]</sup>:

$$H_R = \hbar\nu \left( a^+ a + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar\delta}{2} \sigma_z + \frac{\hbar\Omega}{2} \times \{ \sigma_+ \exp[i\eta(a + a^+) - i\theta_L] + \text{H.C.} \}, \quad (16)$$

式中  $\delta = \omega_0 - \omega_L$  为失谐量. 容易证明, 在通过含时变换

$$U(t) = \exp\{-i\hbar^{-1}[\nu(a^+ a + 1/2) + \delta\sigma_z/2]\}$$

所定义的相互作用表象中, 系统的哈密顿量可改写为

$$H_{Ri}(t) = \frac{\hbar\Omega}{2} \{ \sigma_+ \exp(i\theta_L) \exp[i\eta(a \exp(-it\nu) + a^+ \exp(it\nu)) - i\theta_L] + \text{H.C.} \}. \quad (17)$$

在  $\eta \ll 1$  的情况下, 可取  $\eta$  一阶近似, 即所谓的 LD 近似. 通过旋波近似 (17) 式就可简化为通常的单量子 Jaynes-Cummings 模型. 然而, 在实际的单离子阱中 LD 参数可取比较大的值<sup>[36]</sup>, 于是非 LD 近似下的动力学问题就成为我们下面工作的出发点. 激光频率在实验上是可调的, 现在假定所用激光频率与离子的冷却红边带共振, 即  $\omega_L = \omega_0 - \hbar\nu$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$  为所谓的振动边带数). 在旋波近似下, 即从包含一切可能声子跃迁过程的  $H_{Ri}(t)$  中挑出保持能量守恒的  $k$  声子跃迁过程, 而使  $k$  声子共振相互作用  $H_{Ri}(t)$  的时间指数因子相互抵消, 系统的哈密顿量因而可以写为如下不显含时间的形式<sup>[35-39]</sup>:

$$H'_{Ri} = \frac{\hbar\Omega}{2} \exp(-\eta^2/2) \left[ \exp(-i\theta_L) \sigma_+ (i\eta)^k \times \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(i\eta)^j (a^+)^j a^{j+k}}{j!(j+k)!} \right) + \text{H.C.} \right]. \quad (18)$$

系统的演化算符为

$$V(t) = \exp[-(i/\hbar)H'_{Ri}t],$$

对于不同初态的演化一般可表示为<sup>[35-39]</sup>

$$\begin{aligned} |m\rangle|g\rangle &\rightarrow |m\rangle|g\rangle \quad (m < k), \\ |m\rangle|g\rangle &\rightarrow \cos(\Omega_{m-k}t) |m\rangle|g\rangle \\ &\quad + i^{k-1} \exp(-i\theta_L) \sin(\Omega_{m-k}t) \\ &\quad \times |m-k\rangle|e\rangle \quad (m \geq k), \\ |m\rangle|e\rangle &\rightarrow \cos(\Omega_{m,k}t) |m\rangle|e\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-(-i)^{k-1} \exp(i\theta_L) \sin(\Omega_{m,k}t) \\ &\times |m+k\rangle|g\rangle, \end{aligned} \quad (19)$$

式中  $|m\rangle$  是声子数为  $m$  的离子外部振动数态;  $|g\rangle$  和  $|e\rangle$  分别是离子内部两个能级的基态和激发态, 而有效 Rabi 频率

$$\begin{aligned} \Omega_{m,k} &= \frac{\Omega\eta^k}{2} \exp(-\eta^2/2) \sqrt{\frac{(m+k)!}{m!}} \\ &\times \sum_{j=0}^m \frac{(i\eta)^j}{(j+k)!} C_m^j, \quad (20) \\ C_m^j &= \frac{m!}{j!(m-j)!}. \end{aligned}$$

如上所述 (19) 式是在相互作用表象和规范坐标系中的动力学演化. 容易知道, 如果在相互作用表象和规范坐标系中的波函数是  $|\varphi_{Ri}\rangle$ , 则在薛定谔表象中的波函数是

$$|\varphi_s\rangle = W(t)U(t)|\varphi_{Ri}\rangle.$$

因而, 我们容易得到薛定谔表象中的动力学演化

$$\begin{aligned} |m\rangle|g\rangle &\rightarrow \exp\left(-it\left[\nu\left(m + \frac{1}{2}\right) - \omega_0/2\right]\right) |m\rangle|g\rangle \\ &\quad (m < k), \\ |m\rangle|g\rangle &\rightarrow \exp\left(-it\left[\nu\left(m + \frac{1}{2}\right) - \omega_0/2\right]\right) \\ &\quad \times \cos(\Omega_{m-k}t) |m\rangle|g\rangle \\ &\quad + \exp\left(-it\left[\nu\left(m + \frac{1}{2}\right) + \omega_0/2\right]\right) i^{k-1} \\ &\quad \times \exp(-i\theta_L) \sin(\Omega_{m-k}t) |m-k\rangle|e\rangle \\ &\quad (m \geq k), \\ |m\rangle|e\rangle &\rightarrow \exp\left(-it\left[\nu\left(m + \frac{1}{2}\right) + \omega_0/2\right]\right) \\ &\quad \times \cos(\Omega_{m,k}t) |m\rangle|e\rangle \\ &\quad - \exp\left(-it\left[\nu\left(m + \frac{1}{2}\right) - \omega_0/2\right]\right) (-i)^{k-1} \\ &\quad \times \exp(i\theta_L) \sin(\Omega_{m,k}t) |m+k\rangle|g\rangle. \end{aligned} \quad (21)$$

## 4. 压缩量子态的制备

根据上述非 LD 近似下的激光-离子相互作用动力学规律, 从实验上已经制备好的冷离子的初态  $|0\rangle|g\rangle$  出发, 我们将利用有限个激光脉冲来驱动冷离子以获得压缩量子态. 下面给出压缩量子态的具体制备步骤.

第一步是以频率  $\omega_L = \omega_0$ 、初相位  $\theta_1$  的激光脉冲来驱动射频频阱中的冷离子. 假定脉冲长度为  $t_1$ , 则系统将历经如下的量子演化过程:

$$\begin{aligned}
 |0\rangle_g &\rightarrow |\psi_1\rangle \\
 &= \exp(-it_1[(\nu - \omega_0)/2]) \\
 &\quad \times \cos(\Omega_{0,0}t_1)|0\rangle_g \\
 &\quad + i^{-1}\exp(-i\theta_1) \\
 &\quad \times \exp(-it_1[(\nu + \omega_0)/2]) \\
 &\quad \times \sin(\Omega_{0,0}t_1)|0\rangle_e. \quad (22)
 \end{aligned}$$

第二步是以频率  $\omega_L = \omega_0 - \nu$ 、初相位  $\theta_2$  的激光束继续驱动囚禁离子. 设作用时间为  $t_2$ , 则

$$\begin{aligned}
 |\psi_1\rangle &\rightarrow |\psi_2\rangle \\
 &= \exp(-i(t_1 + t_2)[(\nu - \omega_0)/2]) \\
 &\quad \times \cos(\Omega_{0,0}t_1)|0\rangle_g \\
 &\quad + i\exp(i(\theta_2 - \theta_1))\exp(-it_1[(\nu + \omega_0)/2]) \\
 &\quad \times \exp(-it_2[(3\nu - \omega_0)/2]) \\
 &\quad \times \sin(\Omega_{0,0}t_1)\sin(\Omega_{0,1}t_2)|1\rangle_g \\
 &\quad + i^{-1}\exp(-i\theta_1)\exp(-it_1[(\nu + \omega_0)/2]) \\
 &\quad \times \exp(-it_2[(\nu + \omega_0)/2]) \\
 &\quad \times \sin(\Omega_{0,0}t_1)\cos(\Omega_{0,1}t_2)|1\rangle_e. \quad (23)
 \end{aligned}$$

第三步是以频率  $\omega_L = \omega_0 - 2\nu$ 、初相位  $\theta_3$  的激光束继续驱动囚禁离子. 作用时间为  $t_3$ , 则演化为

$$\begin{aligned}
 |\psi_2\rangle &\rightarrow |\psi_3\rangle \\
 &= \exp(-i(t_1 + t_2 + t_3)[(\nu - \omega_0)/2]) \\
 &\quad \times \cos(\Omega_{0,0}t_1)|0\rangle_g \\
 &\quad + i\exp(i(\theta_2 - \theta_1))\exp(-it_1[(\nu + \omega_0)/2]) \\
 &\quad \times \exp(-i(t_2 + t_3)[(3\nu - \omega_0)/2]) \\
 &\quad \times \sin(\Omega_{0,0}t_1)\sin(\Omega_{0,1}t_2)|1\rangle_g \\
 &\quad + \exp(i(\theta_3 - \theta_1))\exp(-i(t_1 + t_2)[(\nu + \omega_0)/2]) \\
 &\quad \times \exp(-it_3[(5\nu - \omega_0)/2])\sin(\Omega_{0,0}t_1) \\
 &\quad \times \cos(\Omega_{0,1}t_2)\sin(\Omega_{0,2}t_3)|2\rangle_g \\
 &\quad + i^{-1}\exp(-i\theta_1)\exp(-i(t_1 + t_2 + t_3)[(\nu + \omega_0)/2]) \\
 &\quad \times \sin(\Omega_{0,0}t_1)\cos(\Omega_{0,1}t_2)\cos(\Omega_{0,2}t_3)|0\rangle_e. \quad (24)
 \end{aligned}$$

类似地, 在第  $N$  步操作中, 以频率  $\omega_L = \omega_0 - (N - 1)\nu$ 、初相位  $\theta_N$ 、时间  $t_N$  的激光束来激发囚禁离子, 所获得的叠加量子态为

$$\begin{aligned}
 |\psi_{N-1}\rangle &\rightarrow |\psi_N\rangle = \exp(-i(\sum_{j=1}^N t_j)[(\nu - \omega_0)/2]) \\
 &\quad \times \sum_{n=0}^{N-1} C_n |n\rangle_g + B_n |0\rangle_e. \quad (25)
 \end{aligned}$$

这里

$$C_n = \begin{cases} \cos(\Omega_{0,0}t_1) & (n = 0), \\ i\exp(i(\theta_2 - \theta_1))\exp[-i(\nu \sum_{j=2}^N t_j + t_1\omega_0)]\sin(\Omega_{0,0}t_1)\sin(\Omega_{0,1}t_2) & (n = 1), \\ (-1)^{n-1}i^n \exp(i(\theta_{n+1} - \theta_1))\exp\{-i[\omega_0 \sum_{j=1}^n t_j + n\nu \sum_{j=n+1}^N t_j]\}\sin(\Omega_{0,0}t_1)\sin(\Omega_{0,n}t_{n+1})\prod_{j=2}^n \cos(\Omega_{0,j-1}t_j) & (n > 1), \end{cases} \quad (26)$$

$$B_N = \begin{cases} i^{-1}\exp(-i\theta_1)\exp(-it_1[(\nu + \omega_0)/2])\sin(\Omega_{0,0}t_1) & (N = 1), \\ i^{-1}\exp(-i\theta_1)\exp[-\frac{i(\nu + \omega_0)}{2}\sum_{j=1}^N t_j]\sin(\Omega_{0,0}t_1)\prod_{j=2}^N \cos(\Omega_{0,j-1}t_j) & (N > 1). \end{cases} \quad (27)$$

我们设定第  $N$  ( $N > 1$ ) 次激光脉冲作用的时间  $t_N$  满足  $\cos(\Omega_{0,N-1}t_N) = 0$ , 则离子内部态返回基态  $|g\rangle$ , 而外部振动则被制备在叠加态

$$\begin{aligned}
 &\exp\{i(\sum_{j=1}^N t_j)[(\nu - \omega_0)/2]\}|\psi_N^{\text{ex}}\rangle \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} C_n |n\rangle
 \end{aligned}$$

上. 由于每一步激光脉冲作用的时间  $t_N$  和相位  $\theta_N$  都是实验可控制的, 因而总可以使得  $C_n(\theta_N, t_N)$  ( $n \leq N - 2$ ) 满足

$$C_n(\theta_N, t_N) = G_n(\alpha, r, \varphi), \quad (28)$$

$$C_n(\theta_N, t_N) = O_n(\alpha, r, \varphi), \quad (29)$$

$$C_n(\theta_N, t_N) = E_n(\alpha, r, \varphi). \quad (30)$$

由此分别得到囚禁离子的振动压缩相干态

$$|\psi_N^{\text{g}}\rangle = \sum_{n=0}^{N-2} G_n |n\rangle + C_{N-1}^{\text{g}} |N-1\rangle, \quad (31)$$

压缩奇相干态

$$|\psi_N^{\text{o}}\rangle = \sum_{n=0}^{N-2} O_n |n\rangle + C_{N-1}^{\text{o}} |N-1\rangle, \quad (32)$$

压缩偶相干态

$$|\psi_N^e\rangle = \sum_{n=0}^{N-2} E_n |n\rangle + C_{N-1}^e |N-1\rangle. \quad (33)$$

这里

$$\begin{aligned} |C_{N-1}^g|^2 &= 1 - \sum_{n=0}^{N-2} |G_n|^2, \\ |C_{N-1}^o|^2 &= 1 - \sum_{n=0}^{N-2} |O_n|^2, \\ |C_{N-1}^e|^2 &= 1 - \sum_{n=0}^{N-2} |E_n|^2. \end{aligned} \quad (34)$$

此外,若(28)式中  $\alpha = 0$ ,所制备的就是压缩真空态,若(28)–(30)式中  $r = 0$ ,就可以制备通常的相干态和奇偶相干态.

由于实验上所用的激光脉冲的次数  $N$  总是有限的,因此以上得到的叠加态并不是严格的振动压缩相干态、压缩奇偶相干态、压缩真空态等.但是,只要  $N$  足够大,它们便可以足够好地近似于所需要的压缩量子态.这里,可以用实验上所制备出的量子态与目标量子态的内积  $F = |\langle \alpha | \psi_N^e \rangle|$  来描述所制备出的量子态的保真度<sup>[35]</sup>.如图1和图2所示,只需要少量激光脉冲操作就能制备出高保真度的非经典量子态.图1中相干态参数和压缩因子分别取实验值<sup>[16,40]</sup>  $\alpha = 3$  和  $r = 0.8$ .另外,为了简便,这里的压缩角取为零.表1和表2给出了制备这些量子态的相干态参数  $\alpha$ 、压缩因子  $r$ 、激光脉冲次数  $N$ 、激光脉冲长度  $\Omega t_N$ 、相位  $\theta_N$  以及保真度  $F$  的实验值.在数值计算中我们取典型值<sup>[41]</sup>,  $\nu = 2\pi \times 135$  kHz,  $\omega_0 = 2\pi \times 4.11 \times 10^{11}$  kHz,  $\Omega = 50$  kHz 和  $\eta = 0.25$ .可以看出,仅需5或6次激光脉冲,就能获得保真度  $F$  达到0.97以上的各种压缩量子态.

上述制备方案在实验上是可行的.目前的激光技术条件是能够精确地控制脉冲时间并获得足够窄的激光带宽<sup>[1,42]</sup>.例如,文献[13]交替使用蓝红边带激光束激发初态为  $|0\rangle_g$  的囚禁冷离子,通过一系列的“ $\pi$ 脉冲”过程,在实验上已制备出量子数高达16的振动数态.而我们则是制备满足特定叠加条件的这些数态的叠加态,因而在实验上也是可行的.在上述制备过程中,假定 Rabi 频率  $\Omega$  不变,则有效 Rabi 频率  $\Omega_{0,k}$  将随激光脉冲次数的增加而迅速减小(图3).要产生满足条件的数态叠加,势必要求激光脉冲的时间有所增大(见表1和表2).而实验中存在退相干,激光脉冲的时间必须小于退相干时间<sup>[1,43]</sup>.事实上,我们是靠失谐量<sup>[35]</sup>的逐步提高,即  $k = 1, 2, 3, \dots$ ,来获得许多振动数态,即

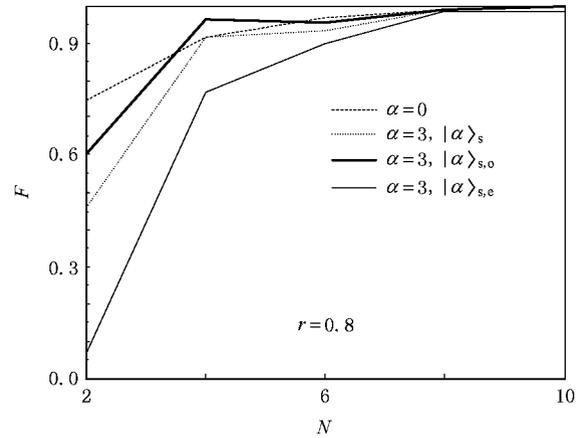


图1 制备压缩真空态  $|0\rangle_s$ 、压缩相干态  $|\alpha\rangle_s$ 、压缩奇相干态  $|\alpha\rangle_{s,o}$  和压缩偶相干态  $|\alpha\rangle_{s,e}$  的保真度  $F$  与激光脉冲次数  $N$  的关系

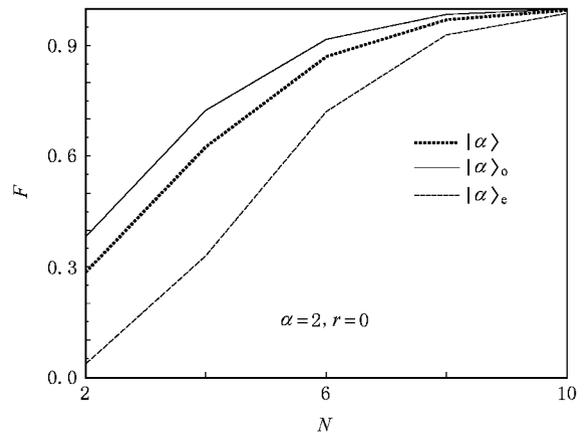


图2 制备相干态  $|\alpha\rangle$ 、奇相干态  $|\alpha\rangle_o$  和偶相干态  $|\alpha\rangle_e$  的保真度  $F$  与激光脉冲次数  $N$  的关系

$|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots, |n\rangle$  的叠加,并得到所需要的压缩量子态.而高量子数的振动数态会受到激光脉冲次数和退相干的限制.因而,利用上述方案,那些振动数态较多地分布在低量子数上的压缩量子态将更容易被实验所制备.根据近来的实验,离子处于激发态  $|e\rangle$  的时间能持续  $1$  s<sup>[42]</sup>.因此,产生  $|n=0\rangle$  到  $|n=10\rangle$  的振动数态的叠加是完全可能的<sup>[35]</sup>.此外,在实验中 Rabi 频率和激光功率  $P$  成正比( $\Omega \propto \sqrt{P}$ ),我们还可以调节激光的功率  $P$  以增大有效 Rabi 频率  $\Omega_{0,k}$ ,使得激光脉冲的时间小于退相干时间<sup>[41]</sup>.例如,文献[37]提出使用适合条件的蓝红边带激光束来驱动囚禁冷离子可获得任意量子纯态.所以,通过上述方案,能够制备出高保真度的压缩量子态.

表 1 制备压缩相干态的部分实验参量取值

参量	取 值					
$\alpha$	0	0	1	2	2	2
$r$	0.5	0.8	0	0.5	0.5	0.8
$N$	5	5	5	5	6	6
$\Omega t_1$	0.7080	1.0859	1.8966	2.5666	2.5666	2.2975
$\theta_1/\pi$	0	0	0	0	0	0
$\Omega t_2$	0	0	7.1614	5.3267	5.3267	6.8280
$\theta_2/\pi$	0.694	0.874	1.780	1.906	0.246	0.655
$\Omega t_3$	53.917	43.950	46.074	43.727	43.727	43.963
$\theta_3/\pi$	0.388	0.748	1.217	1.284	1.964	0.568
$\Omega t_4$	0	0	343.57	371.85	371.85	59.897
$\theta_4/\pi$	0.620	0.620	0.925	1.056	0.076	1.156
$\Omega t_5$	4065.1	4065.1	4065.1	4065.1	1826.3	1877.7
$\theta_5/\pi$	1.160	1.160	0.160	1.160	0.520	0.760
$\Omega t_6$					3635.9	3635.9
$\theta_6/\pi$					1.300	1.300
$F$	0.9983	0.9816	0.9981	0.9882	0.9910	0.9821

表 2 制备压缩奇偶相干态的部分实验参量取值

参量	取 值					
奇偶相干态	奇	奇	奇	偶	偶	偶
$\alpha$	1	2	2	1	2	2
$r$	0	0.5	0.8	0	0.5	0.8
$N$	5	6	6	5	5	5
$\Omega t_1$	3.2413	3.2413	3.2413	1.3106	2.2687	1.8498
$\theta_1/\pi$	0	0	0	0	0	0
$\Omega t_2$	9.6943	7.7328	9.9520	0	0	0
$\theta_2/\pi$	1.009	1.975	1.975	1.480	0.751	1.526
$\Omega t_3$	0	0	0	59.989	61.335	51.109
$\theta_3/\pi$	0.319	1.436	1.469	0.960	1.502	1.053
$\Omega t_4$	436.60	438.68	85.347	0	0	0
$\theta_4/\pi$	1.978	0.654	0.703	0.620	0.620	0.620
$\Omega t_5$	4065.1	0	0	4065.1	4065.1	4065.1
$\theta_5/\pi$	0.160	1.440	1.440	0.160	0.160	0.160
$\Omega t_6$		3635.9	3635.9			
$\theta_6/\pi$		1.300	1.300			
$F$	0.9927	0.9974	0.9763	0.9995	0.9870	0.9900

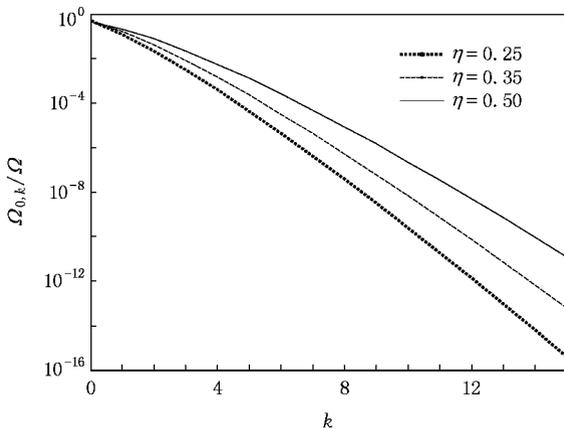


图 3 当  $\eta = 0.25, 0.35, 0.50$  时,有效 Rabi 频率  $\Omega_{0,k}$  随  $k = N - 1$  的变化

## 5. 结 论

根据非 LD 近似下的单模经典激光场与囚禁冷离子的相互作用动力学规律,通过选择适当的激光序列(激光-离子振动边带数、激光脉冲时间和相位)来驱动囚禁冷离子,从其振动基态出发获得一系列满足一定条件的量子数态的叠加态.这些数态可以是离子的振动压缩相干态、压缩奇偶相干态或压缩真空态等(当压缩因子为零时就获得通常的相干态、奇偶相干态).研究表明,只需要若干次激光脉冲,就能很好制备出(保真度高达 99%)这些压缩量子态.实验上实现的囚禁离子都具有相当长的相干时间和激发态寿命,所以本文所建议的 LD 近似下制备囚禁离子的振动压缩量子态的方法在实验上应该是可行的.

- [ 1 ] Leibfried D, Blatt R, Monroe C, Wineland D 2003 *Rev. Mod. Phys.* **75** 281
- [ 2 ] Bushev P, Rotter D, Wilson A, Dubin F, Becher C, Eschner J, Blatt R, Steixner V, Rable P, Zoller P 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 043003
- [ 3 ] Xie H, Li H C, Yang R C, Lin X, Huang Z P 2007 *Chin. Phys.* **16** 3382
- [ 4 ] Paul W 1990 *Rev. Mod. Phys.* **62** 531
- [ 5 ] Raimond J M, Brune M, Haroche S 2001 *Rev. Mod. Phys.* **73** 565
- [ 6 ] Wei L F, Liu S Y, Lei X L 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 1533
- [ 7 ] Cai J W, Fang M F, Zheng X J, Liao X P 2007 *Chin. Phys.* **16** 1566
- [ 8 ] Liu X, Fang M F 2002 *Chin. Phys.* **11** 635
- [ 9 ] Liang B L, Wang J S 2007 *Chin. Phys.* **16** 3097
- [ 10 ] Chen M L, Wang S J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4638 (in Chinese) [ 陈明伦、王顺金 2006 物理学报 **55** 4638 ]
- [ 11 ] Lan H J, Yang Q Y, Wei L F 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1730 (in Chinese) [ 蓝海江、杨庆怡、韦联福 2002 物理学报 **51** 1730 ]
- [ 12 ] Wei L F, Wang S J, Xi D P 1999 *J. Opt. B* **1** 619
- [ 13 ] Meekhof D M, Monroe C, King B E, Itano W M, Wineland D J 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1796
- [ 14 ] Richter T, Vogel W 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 283601
- [ 15 ] Fleischhauer M, Gong S 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 070404
- [ 16 ] Monroe C, Meekhof D M, King B E, Wineland D J 1996 *Science* **272** 1131
- [ 17 ] Ji Y H 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 332 (in Chinese) [ 嵇英华 2003 物理学报 **52** 332 ]
- [ 18 ] Zhang W M, Feng D H, Gilmore R 1990 *Rev. Mod. Phys.* **62** 867
- [ 19 ] Cai X H, Guo J R, Nie J J, Jia J P 2006 *Chin. Phys.* **15** 488
- [ 20 ] Song T Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3358 (in Chinese) [ 宋同强 2004 物理学报 **53** 3358 ]
- [ 21 ] Walls D F 1979 *Nature* **280** 451
- [ 22 ] Poizik J P 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 271
- [ 23 ] Meng X G, Wang J S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2154 (in Chinese) [ 孟祥国、王继锁 2007 物理学报 **56** 2154 ]
- [ 24 ] Wang D L, Gong Q H, Wang K G, Yang G J 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1484 (in Chinese) [ 王丹翎、龚旗煌、汪凯戈、杨国建 2000 物理学报 **49** 1484 ]
- [ 25 ] Wang K G, Xu Q S, Yang G J 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1641 (in Chinese) [ 汪凯戈、许秋生、杨国建 1998 物理学报 **47** 1641 ]
- [ 26 ] Wu Y 2001 *Phys. Rev. A* **63** 043816
- [ 27 ] Wu Y, Yang X X 2001 *Phys. Rev. A* **63** 052303
- [ 28 ] Zou X, Pahlke K, Mathis W 2002 *Phys. Rev. A* **65** 064303
- [ 29 ] Gou S C, Steinbach J, Knight P L 1997 *Phys. Rev. A* **55** 3719
- [ 30 ] Heinzen D J, Wineland D J 1990 *Phys. Rev. A* **42** 2977
- [ 31 ] Banerjee A 1996 *Phys. Rev. A* **54** 5327
- [ 32 ] Liu W Y, An Y Y, Yang Z Y 2007 *Chin. Phys.* **16** 3704
- [ 33 ] Cirac J I, Parkins A S, Blatt R, Zoller P 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 556
- [ 34 ] Zheng S B, Guo G C 1997 *Chin. Phys. Lett.* **14** 273
- [ 35 ] Yang Q Y, Wei L F, Ding L E 2005 *J. Opt. B* **7** 5
- [ 36 ] Wei L F, Liu S Y, Lei X L 2002 *Phys. Rev. A* **65** 062316
- [ 37 ] Wei L F, Liu Y X, Nori F 2004 *Phys. Rev. A* **70** 063801
- [ 38 ] Wei L F, Lei X L 2000 *J. Opt. B* **2** 581
- [ 39 ] Zhang M, Jia H Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 880 (in Chinese) [ 张淼、贾焕玉 2008 物理学报 **57** 880 ]
- [ 40 ] Matsuoka M, Hirano T 2003 *Phys. Rev. A* **67** 042307
- [ 41 ] Barton P A, Donald C J S, Lucas D M, Stevens D A, Steane A M, Stacey D N 2000 *Phys. Rev. A* **62** 032503
- [ 42 ] Roos C, Zeiger T, Rohde H, Nagerl H C, Eschner J, Leibfried D, Schmidt K, Blatt R 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 4713
- [ 43 ] Zurek W H 2003 *Rev. Mod. Phys.* **75** 715

# Generation of squeezed quantum states of a single trapped cold ion

Zhang Miao Jia Huan-Yu Ji Xiao-Hui Si Kun Wei Lian-Fu<sup>†</sup>

( *Laboratory of Quantum Opt-electronic Information , Southwest Jiaotong University , Chengdu 610031 , China* )

( Received 17 December 2007 ; revised manuscript received 8 September 2008 )

## Abstract

Based on the quantum dynamics of laser-ion interaction beyond the Lamd-Dicke limit , we discuss how to superpose a series of vibrational number states of a single trapped ion from the motional ground state. It is shown that , by controlling the durations and phases of the sequentially applied laser pulses , these superposed quantum states could well approach to the various target quantum states , e. g. , squeezed coherent states , squeezed odd/even coherent states and squeezed vacuum states , etc. Their experimental realizabilities are also discussed.

**Keywords** : trapped cold ion , laser pulses , squeezed quantum states

**PACC** : 4250

---

<sup>†</sup> E-mail : lfwei@swjtu.edu.cn