

# 湍流对离轴列阵高斯光束相干与非相干合成的影响\*

季小玲<sup>†</sup> 李晓庆

(四川师范大学物理系, 成都 610068)

(2007 年 10 月 30 日收到, 2008 年 8 月 15 日收到修改稿)

研究了湍流对离轴列阵高斯光束相干与非相干合成的影响. 推导出了相干合成光束的传输方程. 采用二阶矩束宽、桶中功率和参数  $\beta$  作为光束质量评价参数比较了离轴列阵高斯光束通过湍流大气的相干与非相干合成, 并对主要结果给予了合理的物理解释. 研究表明: 一方面, 不论是相干合成还是非相干合成, 湍流都使得合成光束扩展、峰值光强下降, 并且子光束数越多, 合成光束受湍流影响就越小. 另一方面, 非相干合成光束较相干合成光束受到湍流的影响要小.

关键词: 相干与非相干合成, 湍流大气, 离轴列阵高斯光束

PACC: 4260H, 4225, 9265

## 1. 引 言

由于光束合成具有可将激光器(如  $\text{CO}_2$  激光器、HF/DF 化学激光器、固体激光器、二极管条和二维层叠组件等)定标到高功率水平的巨大潜力, 因此光束合成是一个有重要意义的研究课题<sup>[1,2]</sup>. 光束合成的方式通常有两种, 即相干合成和非相干合成. 文献 3-4 分别研究了离轴列阵高斯光束和厄米-高斯光束在自由空间中的相干和非相干合成. 最近, 文献 5 就激光器的部分相干性对光纤激光器列阵相干合成远场图样的影响进行了研究. 另一方面, 激光束的大气传输在遥感、跟踪和远距离光通信等领域的应用中都具有十分重要的意义<sup>[6]</sup>. 理论和实验都证明, 部分空间相干光较完全相干光受到湍流大气的影响要小<sup>[7-10]</sup>. 最近, 我们研究了通过湍流大气传输的离轴列阵高斯光束非相干合成的传输特性<sup>[11]</sup>. 本文以二阶矩束宽<sup>[12]</sup>、桶中功率(PIB)<sup>[13]</sup>和参数  $\beta$ <sup>[14]</sup>作为光束质量的评价参数研究比较离轴列阵高斯光束通过湍流大气传输的相干与非相干合成, 得到了一些有意义的结果, 并给予了合理的物理解释.

## 2. 相干合成

### 2.1. 传输方程

假设在直角坐标系下,  $z = 0$  平面处有  $M$  束束腰宽度均为  $w_0$  的高斯光束沿  $x$  轴排列, 相邻子光束间的间距均为  $x_d$ . 为了方便起见,  $M$  取奇数.  $z = 0$  平面处相干合成光束的交叉谱密度函数表示为

$$W^{(0)}(x'_1, x'_2, z = 0) = \sum_{m=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} \sum_{n=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} \exp\left[-\frac{(x'_1 - mx_d)^2 + (x'_2 - nx_d)^2}{w_0^2}\right], \quad (1)$$

式中  $m, n \in \left[-\frac{M-1}{2}, \frac{M-1}{2}\right]$ .

根据广义惠更斯-菲涅耳原理 (1) 式表征的相干合成光束通过湍流大气传输在  $z$  平面处的交叉谱密度函数为<sup>[6]</sup>

$$W(x_1, x_2, z) = \frac{k}{2\pi z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx'_1 dx'_2 W^{(0)}(x'_1, x'_2, z = 0) \times \exp\left\{\frac{ik}{2z}(x_1'^2 - x_2'^2)\right\}$$

\* 国家自然科学基金(批准号 60778048)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: jixl100@163.com

$$\begin{aligned}
 & - \mathcal{X}(x_1 x'_1 - x_2 x'_2) + (x_1^2 - x_2^2) \Big\} \\
 & \times \exp[\psi(x'_1, x_1, z) \\
 & + \psi^*(x'_2, x_2, z)] , \quad (2)
 \end{aligned}$$

式中波数  $k = 2\pi/\lambda$  ( $\lambda$  为波长),  $\psi(x', x, z)$  表示大气湍流对球面波影响的随机相位因子,  $\cdot$  表示系综平均, 并且有<sup>[15]</sup>

$$\begin{aligned}
 & \exp[\psi(x'_1, x_1, z) + \psi^*(x'_2, x_2, z)] \\
 \cong & \exp\left[-\frac{(x'_1 - x'_2)^2 + (x'_1 - x'_2)(x_1 - x_2) + (x_1 - x_2)^2}{\rho_0^2}\right] . \quad (3)
 \end{aligned}$$

这里  $\rho_0 = (0.545 C_n^2 k^2 z)^{-3/5}$  为球面波通过大气湍流的相干长度,  $C_n^2$  是大气折射率结构常数, 它表征湍流的强弱. 值得指出的是, 为了得到解析结果 (3) 式中利用了 Rytov 相位结构函数的二次近似, 该近似与实际符合很好<sup>[15, 16]</sup>.

将 (1) (3) 式代入 (2) 式, 令  $x_1 = x_2 = x$ , 并利用积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta^2 x^2 + \gamma x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \exp\left(\frac{\gamma^2}{4\beta^2}\right) , \quad (4)$$

经过繁琐但直接的积分运算后得到离轴列阵高斯光束通过湍流大气传输相干合成光束的传输方程为

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}(x, z) &= \mathcal{W}(x, x, z) \\
 &= A \sum_{m=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} \sum_{n=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} \exp(-Px^2 + Qx + R) . \quad (5)
 \end{aligned}$$

这里

$$A = \frac{B}{\sqrt{\frac{1}{w_0^4} + \frac{2}{w_0^2 \rho_0^2} + B^2}} , \quad (6)$$

$$P = B^2 \left[ \left(\frac{ACG}{B}\right)^2 + \left(\frac{1}{C}\right)^2 \right] , \quad (7)$$

$$Q = iBx_d \left( \frac{A^2 C^2 DG}{B^2} - \frac{2m}{w_0^2 C^2} \right) , \quad (8)$$

$$R = x_d^2 \left[ -\frac{m^2 + n^2}{w_0^2} + \left(\frac{ACD}{2B}\right)^2 + \left(\frac{m}{w_0^2 C}\right)^2 \right] \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned}
 I_{\text{PIB}} &= \frac{\sum_{m=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} \sum_{n=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} T \left\{ \text{erf}\left[\sqrt{P}\left(\frac{Q}{2P} + h\right)\right] - \text{erf}\left[\sqrt{P}\left(\frac{Q}{2P} - h\right)\right] \right\}}{2 \sum_{m=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} \sum_{n=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} T} , \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$B = \frac{k}{2z} , \quad (10)$$

$$C = \sqrt{\frac{1}{w_0^2} + \frac{1}{\rho_0^2} - iB} , \quad (11)$$

$$D = \frac{2n}{w_0^2} + \frac{2m}{w_0^2 \rho_0^2 C^2} , \quad (12)$$

$$G = 1 - \frac{1}{\rho_0^2 C^2} . \quad (13)$$

(5) 式表明, 离轴列阵高斯光束通过湍流大气传输相干合成光束的光强分布由  $C_n^2, M, x_d$  和  $z$  等因数共同确定.

### 2.2. 二阶矩束宽和 PIB

二阶矩束宽定义为<sup>[12]</sup>

$$w^2(z) = \frac{4 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mathcal{K}(x, z) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, z) dx} . \quad (14)$$

将 (5) 式代入 (14) 式, 经过繁琐的积分运算后得到湍流大气中相干合成光束的二阶矩束宽为

$$\begin{aligned}
 w^2(z) &= \frac{4 \sum_{m=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} \sum_{n=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} T \left( \frac{1}{2P} + \frac{Q^2}{4P^2} \right)}{\sum_{m=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} \sum_{n=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} T} , \quad (15)
 \end{aligned}$$

式中

$$T = \exp\left(R + \frac{Q^2}{4P}\right) . \quad (16)$$

PIB 是描述远场光束能量集中度的重要参数, 它定义为远场某一给定尺寸的“桶”中所围住的激光功率占总功率的份额, 即<sup>[13]</sup>

$$I_{\text{PIB}} = \frac{\int_{-h}^h \mathcal{K}(x, z) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, z) dx} , \quad (17)$$

式中  $h$  为桶的半宽. PIB 越大, 光束的可聚焦能力越强, 光束质量也就越好.

将 (5) 式代入 (17) 式, 经过积分运算后得到湍流大气中相干合成光束的 PIB 为

式中  $\text{erf}(\cdot)$  为误差函数.

### 3. 非相干合成

由文献 [11] 可知, 离轴列阵高斯光束通过湍流大气传输非相干合成光束的传输方程为

$$K(x, z) = A \sum_{m=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} \exp\left[-2A^2\left(\frac{x}{w_0} - \frac{mx_d}{w_0}\right)^2\right]. \quad (19)$$

将 (19) 式分别代入 (14) 和 (17) 式, 得到湍流大气中非相干合成光束的二阶矩束宽和 PIB 的解析表达式分别为

$$w^2(z) = \frac{4}{M} \sum_{m=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} \left[ \left(\frac{w_0}{2A}\right)^2 + (mx_d)^2 \right], \quad (20)$$

$$I_{\text{PIB}} = \frac{1}{2M} \sum_{m=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} \left\{ \text{erf}\left[\sqrt{2}A\left(\frac{mx_d}{w_0} + \frac{h}{w_0}\right)\right] - \text{erf}\left[\sqrt{2}A\left(\frac{mx_d}{w_0} - \frac{h}{w_0}\right)\right] \right\}. \quad (21)$$

### 4. 数值计算及分析

本文数值计算参数取  $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$ ,  $w_0 = 0.01 \text{ m}$  和  $x_d/w_0 = 3$ . 图 1 为相干和非相干合成光束的远场相对光强  $K(x, z)/I_{0\text{max}}$  分布, 其中  $I_{0\text{max}}$  为相应合成光束在自由空间中传输的峰值光强. 图 1(a) 表明相干合成光束通过自由空间传输其远场光强不为高斯分布(实线), 但湍流使其光强成为类高斯分布(虚线). 由图 1(b) 可以看出, 非相干合成光束通过自由空间和湍流大气传输其远场光强均为类高斯分布. 此外, 比较图 1(a) 与 (b) 可知, 湍流使得相干合成光束峰值光强的下降量比非相干合成光束峰值光强的下降量大.

图 2 为合成光束相对束宽  $u(z)/u(0)$  随传输距离  $z$  的变化, 其中实线对应自由空间中的  $u(z)/u(0)$ , 虚线对应湍流大气中的  $u(z)/u(0)$ . 由图 2 可以看出, 湍流使得合成光束展宽, 并且对于相干和非相干合成光束均有  $M=9$  时实线与虚线的间距小于  $M=3$  时实线与虚线的间距. 这说明量子光束数越多, 合成光束的束宽受湍流的影响就越小.

图 3 给出了合成光束的  $I_{\text{PIB}}$  曲线. 由图 3 可以看出, 在自由空间中相干与非相干合成光束的  $I_{\text{PIB}}$  曲

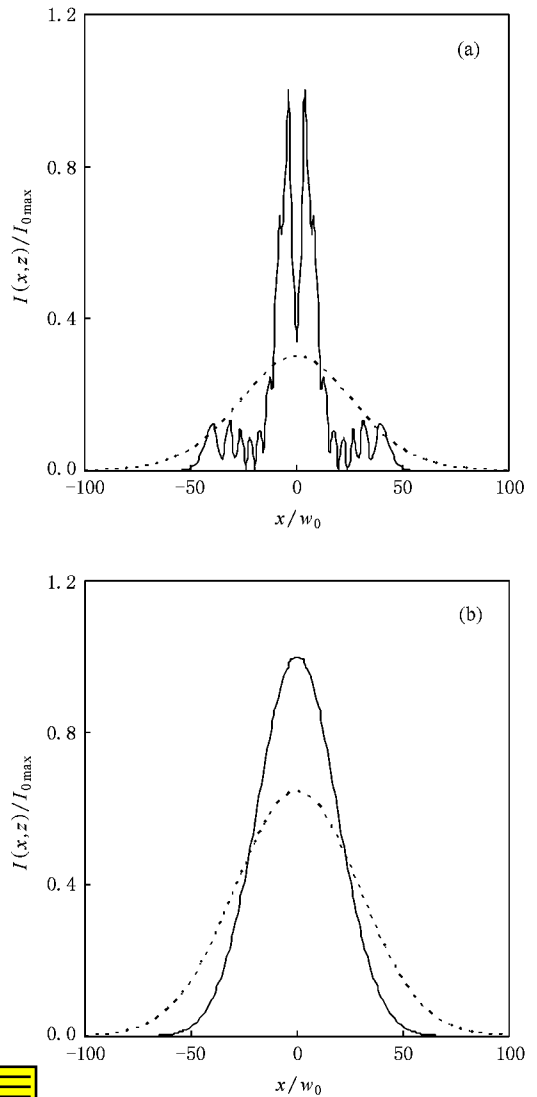


图 1 合成光束相对光强  $K(x, z)/I_{0\text{max}}$  的分布  $z = 10 \text{ km}$ ,  $M = 9$ . 实线为  $C_n^2 = 0$ , 虚线为  $C_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$ . (a) 相干合成 (b) 非相干合成

线出现交叉现象, 其原因是相干合成光束的强度分布存在若干极大值(图 1(a)). 当  $x/w_0 < 26$  时, 相干合成光束的  $I_{\text{PIB}}$  大于非相干合成光束的  $I_{\text{PIB}}$ , 但是在湍流大气中相干与非相干合成光束的  $I_{\text{PIB}}$  曲线相接近.

参数  $\beta$  是描述实际远场光束质量的重要参数, 定义为<sup>[14]</sup>

$$\beta = \sqrt{\frac{S}{S_0}}, \quad (22)$$

式中  $S$  和  $S_0$  分别表示实际光束和衍射极限理想光束在远场当  $I_{\text{PIB}} = 63\%$  时所对应的光斑面积. 本文以相应的自由空间中传输的合成光束作为衍射极限

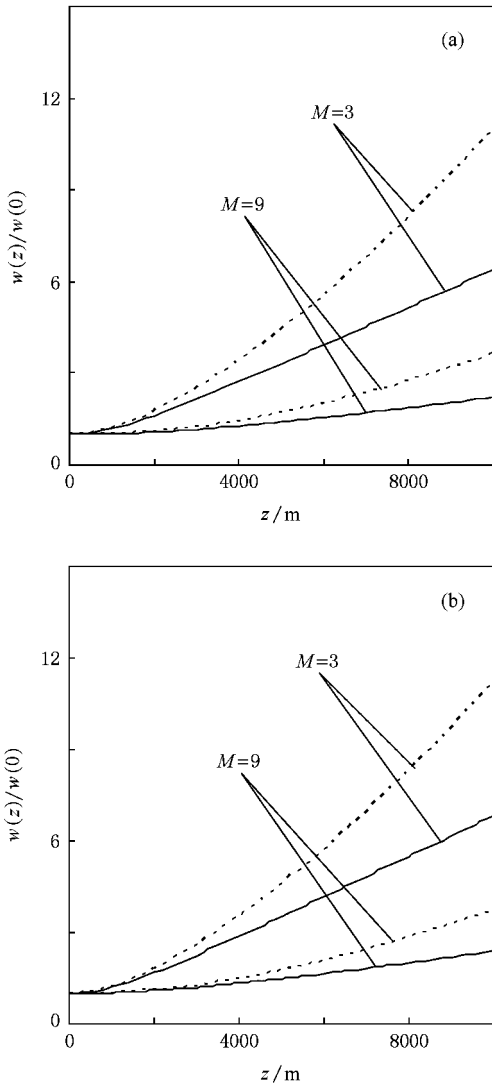


图2 合成光束相对束宽  $w(z)/w(0)$  随传输距离  $z$  的变化 实线为  $C_n^2 = 0$ , 虚线为  $C_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$ . (a) 相干合成 (b) 非相干合成

理想光束. 显然,  $\beta$  越小, 合成光束能量集中度受湍流的影响也越小.

一般而言, 合成光束的参数  $\beta$  的解析表达式难以得到, 但数值计算是可行的. 图4为参数  $\beta$  随子光束数  $M$  的变化. 由图4可以看出, 相干和非相干合成光束的参数  $\beta$  均随子光束数  $M$  的增加而减小, 并且相干合成光束的参数  $\beta$  随  $M$  的变化非常快, 非相干合成光束的参数  $\beta$  随  $M$  的变化较为缓慢. 这表明子光束数越多, 合成光束的能量集中度受湍流的影响就越小. 较之非相干合成,  $M$  对相干合成光束能量集中度影响也就更大. 图4还表明, 相干合成光束的参数  $\beta$  总是大于非相干合成光束的参数  $\beta$ , 即非相干合成光束的能量集中度受湍流的影响比相干合

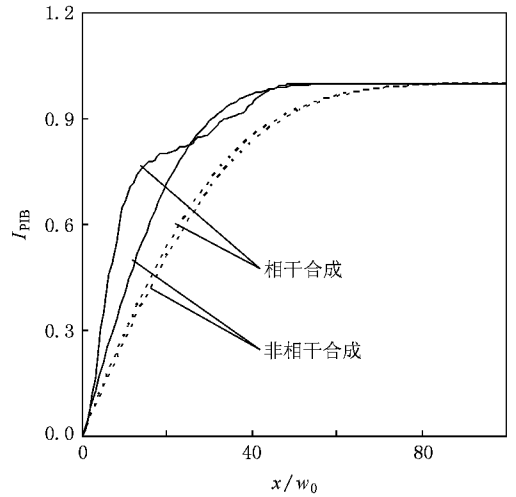


图3 合成光束的  $I_{PIB}$  曲线  $z = 10 \text{ km}$ ,  $M = 9$ . 实线为  $C_n^2 = 0$ , 虚线为  $C_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$

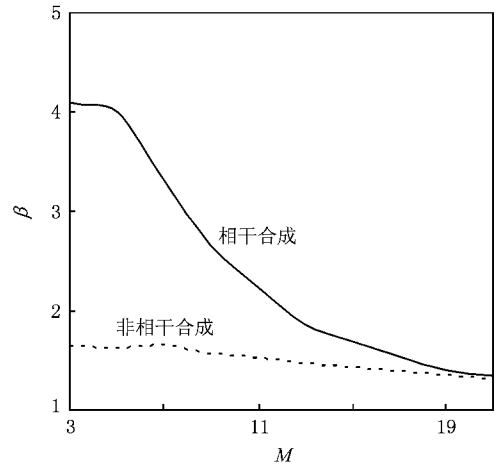


图4 合成光束的参数  $\beta$  随子光束数  $M$  的变化  $z = 10 \text{ km}$ ,  $C_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$

成光束的能量集中度受湍流的影响要小.

### 5. 机理分析

合成光束在湍流大气中传输其光束扩展由自由空间的衍射和大气湍流两个因素确定. 物理上, 原有的光束扩展会减小大气湍流对光束扩展的影响. 图5为合成光束在自由空间传输时其二阶矩束宽  $u(M)$  随子光束数  $M$  的变化. 图5表明, 在自由空间中, 相干和非相干合成光束的  $u(M)$  均随子光束数  $M$  的增加而增大, 即子光束数越多合成光束原有的光束扩展就越大, 故子光束数越多合成光束受湍

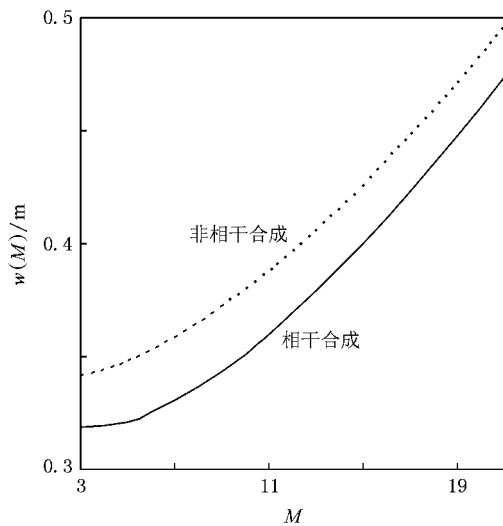


图 5 合成光束在自由空间传输二阶矩束宽  $w(M)$  随子光束数  $M$  的变化  $z = 10 \text{ km}$ ,  $C_n^2 = 0$

流的影响也就越小. 图 5 还表明, 相干合成光束的  $w(M)$  小于非相干合成光束的  $w(M)$ , 即非相干合成光束原有的光束扩展比相干合成光束大. 这就是

为什么非相干合成光束受湍流的影响比相干合成光束小的物理原因.

## 6. 结 论

本文研究了离轴列阵高斯光束通过湍流大气传输的相干与非相干合成. 推导出了相干合成光束的传输方程. 采用合成光束二阶矩束宽、PIB 和参数  $\beta$  作为光束质量评价参数比较了湍流对相干与非相干合成光束的影响. 研究表明: 一方面, 不论是相干合成还是非相干合成, 湍流都使得合成光束扩展、峰值光强下降, 并且子光束数越多, 合成光束受湍流影响就越小. 另一方面, 对于相干合成, 合成光束在自由空间中其远场光强为非高斯分布, 而在湍流大气中成为类高斯分布; 对于非相干合成, 合成光束在自由空间和湍流大气中其远场光强均为类高斯分布. 特别是非相干合成光束较相干合成光束受到湍流的影响要小. 本文所得结果对激光列阵光束通过湍流大气传输的光束合成问题的研究具有意义.

[ 1 ] Strohscchein J D, Herb J J, Clarence E C 1998 *Appl. Opt.* **37** 1045  
 [ 2 ] Brunel M, Floch A L, Bretenaker F, Marty J, Molva E 1998 *Appl. Opt.* **37** 2402  
 [ 3 ] Lü B D, Ma H 1999 *Opt. Commun.* **171** 185  
 [ 4 ] Lü B D, Ma H 2000 *Appl. Opt.* **39** 1279  
 [ 5 ] Xiao R, Zhou P, Hou J, Jiang Z F, Liu M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 819 (in Chinese) [ 肖 瑞、周 朴、侯 静、姜宗福、刘 明 2007 物理学报 **56** 819 ]  
 [ 6 ] Andrews L C, Phillips R L 1998 *Laser Beam Propagation Through Random Media* ( Bellingham : SPIE Press )  
 [ 7 ] Gbur G, Wolf E 2002 *J. Opt. Soc. Am. A* **19** 1592

[ 8 ] Dogariu A, Amarande S 2003 *Opt. Lett.* **28** 10  
 [ 9 ] Ji X L, Lü B D 2005 *Opt. Commun.* **251** 231  
 [ 10 ] Ji X L, Huang T X, Lü B D 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 978 (in Chinese) [ 季小玲、黄太星、吕百达 2006 物理学报 **55** 978 ]  
 [ 11 ] Ji X L, Tang M Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4968 (in Chinese) [ 季小玲、汤明 2006 物理学报 **55** 4968 ]  
 [ 12 ] Siegman A E 1990 *SPIE* **1224** 2  
 [ 13 ] Siegman A E 1998 *OSA TOPS* **17** 184  
 [ 14 ] Garay A 1988 *SPIE* **888** 17  
 [ 15 ] Wang S C H, Plonus M A 1979 *J. Opt. Soc. Am.* **69** 1297  
 [ 16 ] Leader C 1978 *J. Opt. Soc. Am.* **68** 175



# Influence of turbulence on the coherent and incoherent combinations of off-axis Gaussian beams<sup>\*</sup>

Ji Xiao-Ling<sup>†</sup> Li Xiao-Qing

( Department of Physics , Sichuan Normal University , Chengdu 610068 , China )

( Received 30 October 2007 ; revised manuscript received 15 August 2008 )

## Abstract

The influence of turbulence on the coherent and incoherent combinations of off-axis Gaussian beams is studied in detail. The analytical propagation equation of the resulting beam in turbulence for the incoherent combination is derived. The mean-squared beam width, the power in the bucket and the  $\beta$  parameter are taken as the characteristic parameters of beam quality to compare the results of coherent and incoherent combinations of off-axis Gaussian beams propagating through atmospheric turbulence, and the reasonable physical explanations are also given. It is shown that, on one hand, both for the incoherent and coherent combinations the turbulence results in a beam spreading and a degradation of the maximum intensity, and the larger the individual beam numbers is, the less sensitive is the resulting beam to the effect of turbulence. On the other hand, the resulting beam for the incoherent combination is less affected by turbulence than that for the coherent combination.

**Keywords** : coherent and incoherent combinations, turbulent atmosphere, off-axis Gaussian beams

**PACC** : 4260H, 4225, 9265

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 60778048 ).

<sup>†</sup> E-mail : jixl100@163.com