

# 各向异性超常材料中倒退波的传播研究\*

周建华<sup>1)2)</sup> 刘虹遥<sup>1)</sup> 罗海陆<sup>1)</sup> 文双春<sup>1)†</sup>

1) 湖南大学计算机与通信学院, 微纳光电器件及应用教育部重点实验室, 长沙 410082)

2) 邵阳学院信息工程系, 邵阳 422000)

(2008 年 5 月 11 日收到, 2008 年 8 月 1 日收到修改稿)

研究了完全各向异性超常材料中的倒退波传播现象, 得到了在材料本征轴和传输轴成任意角度情形下倒退波形成的条件, 分析了超常材料的介电张量和磁导率张量、电磁波的偏振方式对倒退波形成和传播的影响. 在此基础上, 进一步分析了几种不同色散曲线关系的各向异性超常材料中倒退波的产生情况, 获得了电磁波波矢和坡印亭矢量(能流)夹角的具体表达式和倒退波传播的一般性结论. 此外, 还研究了近零介电常数超常材料中倒退波的传播特性, 发现在此类超常材料中倒退波只能是完美倒退波.

关键词: 超常材料, 负折射, 倒退波, 各向异性

PACC: 4270Y, 4225B

## 1. 引 言

超常材料 (metamaterial) 是具有人工设计的结构并呈现出天然材料所不具备的超常物理性质的复合材料<sup>[1]</sup>. 典型的超常材料如介电常数  $\epsilon$  和磁导率  $\mu$  同时为负值的负折射材料, 因为电磁波在这种材料中传输时其波矢  $k$ 、电场  $E$  和磁场  $H$  形成了左手关系<sup>[2]</sup>, 故又称为左手材料. 电磁波在负折射材料中传输时会出现许多反常物理现象, 如负折射率<sup>[2]</sup>、逆 Doppler 频移<sup>[2]</sup>、反常 Cherenkov 辐射<sup>[2]</sup>、反常 Goos-Hänchen 效应<sup>[3]</sup>等等. 此外, 电磁波在负折射材料中传输时, 由于其波矢方向和坡印亭矢量方向相反而出现称为倒退波的反常物理现象<sup>[4]</sup>. 倒退波在天线、波导、微波放大器、振荡器等领域有着广泛的应用<sup>[5]</sup>, 研究超常材料中的倒退波传输具有重要的理论和实际意义.

介电常数  $\epsilon$  和磁导率  $\mu$  是用于描述物质电磁性质的基本物理量, 决定着电磁波在物质中的传播特性. 它们一般情况下是张量, 设同时对角化后主轴坐标系中的分量分别为  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  和  $\mu_x, \mu_y, \mu_z$ . 严格的负折射材料是各向同性的, 即  $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z < 0, \mu_x = \mu_y = \mu_z < 0$ . 在这种材料中, 由于波矢传输方向和坡

印亭矢量成反向平行, 即波矢和坡印亭矢量成  $180^\circ$  角, 因此这时的传输波是倒退波<sup>[4]</sup>. Lindell 等<sup>[4]</sup>也将这种材料称为倒退波材料, 并研究了这种各向同性负折射材料中倒退波的传输行为.  $\epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z, \mu_x = \mu_y \neq \mu_z$  的超常材料称为单轴各向异性超常材料, 文献 [4, 6] 分别研究了这类材料中的倒退波传播, Woodley 等<sup>[6]</sup>并提出了完美倒退波 (perfect backward waves) 和非完美倒退波 (imperfect backward waves) 概念. 根据倒退波的定义, 当波矢和能流传输方向的夹角大于  $90^\circ$  (即波矢与坡印亭矢量的点积为负) 时就是倒退波. 因此, 波矢和能流传输方向的夹角处在  $90^\circ$ — $270^\circ$  之间的传输波都可以称为倒退波. 在各向同性超常材料中, 因为波矢与坡印亭矢量方向始终相反, 它们的夹角为  $180^\circ$ , 这时的传输波就是完美倒退波, 在这方面已有了较多的研究结果<sup>[6, 7]</sup>. 但是, 在各向异性超常材料方面的倒退波研究还不是很多<sup>[8]</sup>, 文献 [4, 6] 所研究的单轴各向异性超常材料是完全各向异性超常材料 ( $\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z, \mu_x \neq \mu_y \neq \mu_z$ ) 的一种特殊情况. 目前实现的负折射率超常材料并不是完全的三维各向同性负折射率材料, 而是只在某些方向上表现出负的电磁属性, 是一种完全三维各向异性超常材料. 例如, Smith 等<sup>[9]</sup>实现的超常材料, 其介电常数只在某一个方向上为负, 磁导率则只

\* 国家自然科学基金(批准号: 30674045)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: scwen@hnu.cn

在另外两个正交方向上为负.实际上,各向异性超常材料比各向同性超常材料更容易实现,因为它只需要在部分方向上实现负的电磁属性,同样具有许多特殊的电磁性质和应用,因此对这种材料的电磁特性进行研究更具有现实意义.本文研究完全各向异性超常材料中倒退波的传输特性,特别是在各向异性超常材料的本征轴和传输轴成任意角度  $\varphi$  时,研究倒退波的形成条件,分析介电张量、磁导率张量与倒退波的关系以及偏振方式对倒退波的影响等,探讨具有不同色散关系的各向异性超常材料中倒退波的传输特性.

## 2. 各向异性超常材料中电磁波的传播

由于各向异性超常材料的介电常数  $\boldsymbol{\varepsilon}$  和磁导率  $\boldsymbol{\mu}$  是二阶张量,为使讨论的问题简化,Smith 等<sup>[10]</sup>假定材料的结构参数  $\boldsymbol{\varepsilon}$  和  $\boldsymbol{\mu}$  可以同时对角化,此对角化的坐标轴和超常材料的主轴共线,这也是一个研究各向异性超常材料时为大家所接受的模型.假设主轴为  $z$  轴,这种情况下,介电张量和磁导率张量可分别表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{pmatrix}.$$

对角化的坐标也称为材料的本征坐标.假设传输坐标轴绕本征坐标  $y$  轴旋转任意角度  $\varphi$ ,则在传输坐标下介电张量为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi \varepsilon_x + \sin^2 \varphi \varepsilon_z & 0 & \cos \varphi \sin \varphi (\varepsilon_x - \varepsilon_z) \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ \cos \varphi \sin \varphi (\varepsilon_x - \varepsilon_z) & 0 & \sin^2 \varphi \varepsilon_x + \cos^2 \varphi \varepsilon_z \end{pmatrix}, \quad (2)$$

相应的磁导率张量为

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi \mu_x + \sin^2 \varphi \mu_z & 0 & \cos \varphi \sin \varphi (\mu_x - \mu_z) \\ 0 & \mu_y & 0 \\ \cos \varphi \sin \varphi (\mu_x - \mu_z) & 0 & \sin^2 \varphi \mu_x + \cos^2 \varphi \mu_z \end{pmatrix}. \quad (3)$$

假设单色平面电磁波从左侧的各向同性均匀右手材料入射到右侧的各向异性超常材料中,如图 1 所示.两种材料的分界面为  $x-y$  平面, $z$  轴为传输方

向.左侧的各向同性均匀材料的介电常数和磁导率分别为  $\varepsilon_0 \varepsilon_r, \mu_0 \mu_r$ ,电磁波的入射角为  $\theta_i$ .假设电磁场沿  $y$  方向具有不变性,即  $k_y = 0$ , $k_i, k_R$  和  $q_T$  分别是入射、反射和折射波矢, $E_i, E_R$  和  $E_T$  分别是入射、反射和折射波电场, $H_i, H_R$  和  $H_T$  分别是入射、反射和折射波磁场, $S_i, S_R$  和  $S_T$  分别是入射、反射和折射波坡印亭矢量, $\theta_T$  是波矢折射角.

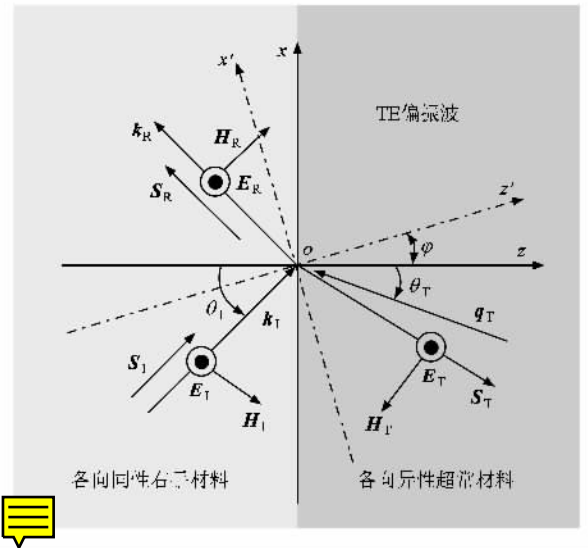


图 1 电磁波在各向同性右手材料与各向异性超常材料界面处入射、反射和折射关系示意图.电磁波从各向同性右手材料入射到各向异性超常材料, $x$  轴为两种材料的分界线, $z$  轴为传输方向, $xoz$  为传输坐标系, $x'oz'$  为各向异性超常材料的本征坐标系, $z'$  轴与  $z$  轴的夹角为  $\varphi$ .折射波的波矢和能流不是平行或反平行,而是存在一个夹角,这是各向异性超常材料的一个特殊性质.

假设入射电磁波是 TE 偏振的平面简谐波,电场的矢量性质是非常重要的<sup>[11,12]</sup>,为了便于运算,我们把波函数写成复数形式,以使用简单的指数运算代替比较繁杂的三角函数运算.由于 TE 偏振波的电场在  $x, z$  方向的分量均为零,所以入射电磁波的电场可表示为

$$E_i = E_0 e_y \exp(ik_x x + ik_z z - i\omega t), \quad (4)$$

其中  $E_0$  为入射电磁波电场的振幅, $e_j (j = x, y, z)$  是坐标轴各坐标方向的单位矢量, $k_x, k_z$  分别是入射波波矢在分界面切向和法向方向的分量.由于反射波和入射波在法向方向的波矢分量符号相反,在切向方向的波矢分量相等,因此反射波的电场函数可表示为

$$E_R = RE_0 e_y \exp(ik_x x - ik_z z - i\omega t), \quad (5)$$

其中  $R$  为电场振幅的反射系数.由边界连续性条件

可知, 折射波的切向波矢分量仍然和入射波的波矢相等, 故折射波的电场函数可表示为

$$\mathbf{E}_T = TE_0 \mathbf{e}_y \exp(iq_x x + iq_z z - i\omega t), \quad (6)$$

其中  $T$  为电场振幅的透射系数,  $q_x$  是折射波矢切向分量,  $q_z$  是折射波矢的法向分量. 由边界条件可知,  $q_x = k_x$ . 联合麦克斯韦方程组和物质的本构关系,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (7)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H} \quad (8)$$

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}.$$

当本征坐标与传输坐标成任意角度  $\varphi$  时, 由(7), (8)式可以得到下列各向异性超常材料的色散方程:

$$\alpha q_z^2 + \beta q_x^2 + \xi q_x q_z = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (9)$$

这里  $c$  为真空中的光速,  $\alpha, \beta, \xi$  可分别表示为

$$\alpha = \frac{1}{\varepsilon_y \mu_x \mu_z} (\cos^2 \varphi \mu_z + \sin^2 \varphi \mu_x), \quad (10)$$

$$\beta = \frac{1}{\varepsilon_y \mu_x \mu_z} (\cos^2 \varphi \mu_x + \sin^2 \varphi \mu_z), \quad (11)$$

$$\xi = \frac{1}{\varepsilon_y \mu_x \mu_z} (\sin 2\varphi \mu_x - \sin 2\varphi \mu_z). \quad (12)$$

折射波法向的波矢分量可以通过求解色散方程(9)得到,

$$q_z = \frac{-\xi q_x + \delta \sqrt{q_x^2 (\xi^2 - 4\alpha\beta) + 4\alpha \frac{\omega^2}{c^2}}}{2\alpha}. \quad (13)$$

其中  $\delta$  为 1 或 -1, 以确保电磁波向远离边界方向传输. 对于 TM 波, 可以通过类似的方法分析得出.

从时间平均坡印亭矢量的定义  $\mathbf{S} = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$  出发, 联合折射波电场的表达式和麦克斯韦方程组, 可以得出相应的折射波的时间平均坡印亭矢量

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_T &= \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}_T \times \mathbf{H}_T^*) \\ &= \frac{1}{2} T^2 E_0^2 \text{Re} \left\{ \left( \frac{q_x \beta \varepsilon_y}{\omega} + \frac{q_z \xi \varepsilon_y}{2\omega} \right) \mathbf{e}_x \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{q_x \xi \varepsilon_y}{2\omega} + \frac{q_z \alpha \varepsilon_y}{\omega} \right) \mathbf{e}_z \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

对于 TM 波, 可以通过类似的方法来分析和推导. 具体而言, 由于在 TE 偏振和 TM 偏振下, 磁导率张量和介电张量具有互偶性, 可以通过介电张量与磁导率张量的互换得到 TM 偏振下的有关结论.

### 3. 倒退波的产生分析

对于各向异性超常材料, 为了简化, 假设本征轴和传输轴重合, 即夹角为  $0^\circ$ , 在横电波入射时有如下方程成立:

$$\mathbf{q} \times \mathbf{S} = \left( \frac{1}{\mu_z} - \frac{1}{\mu_x} \right) \frac{q_z q_x E_y^2}{\omega} \mathbf{e}_y, \quad (15)$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{S} = \left( \frac{q_x^2}{\mu_z} + \frac{q_z^2}{\mu_x} \right) \frac{E_y^2}{\omega}. \quad (16)$$

从(15)式可以发现, 如果  $\mu_z \neq \mu_x$ , 则  $\mathbf{q} \times \mathbf{S}$  不为零. 即二者不是平行或反平行, 而是有一定的夹角. 当  $\mu_x = -\mu_z$  和  $q_x^2 = q_z^2$  时,  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{S} = 0$ , 二者的夹角为  $90^\circ$ , 出现了波矢和坡印亭矢量相互垂直的情况. 通过对介电常数和磁导率取适当的值, 可以得到在  $90^\circ$ — $270^\circ$  之间产生了倒退波传输. 对于 TM 波, 可以采用类似的方法进行分析. 以上这些现象是各向异性超常材料所特有的性质.

#### 3.1. 非完美倒退波

根据倒退波的定义, 如果  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{S}_T < 0$ , 则传输波就是倒退波. 在这种情况下, 波矢与能流的夹角可能处在  $90^\circ$ — $270^\circ$  之间. 当夹角为  $180^\circ$  时, 称之为完美倒退波, 这时折射波波矢和坡印亭矢量恰好反平行. 将(14)式代入  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{S}_T$  得

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{S}_T = \frac{\varepsilon_y T^2 E_0^2}{2\omega} (q_x^2 \beta + q_x q_z \xi + q_z^2 \alpha). \quad (17)$$

将(17)和(9)式对比后可以得到

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{S}_T = \frac{\varepsilon_y \omega T^2 E_0^2}{2c^2}. \quad (18)$$

我们只需要判断(18)式的符号就可以判别传输波的类别. (18)式的前提是波矢能够传输到各向异性超常材料中去, 即

$$\varepsilon_r \mu_r (\xi^2 - 4\alpha\beta) \sin^2 \theta + 4\alpha > 0. \quad (19)$$

通过对(18)(19)式的分析, 可以发现几个非常有趣的现象. 第一, 对于 TE 波, 在各向异性超常材料中, 只要  $\varepsilon_y$  为负值, 就可能产生倒退波传输现象. 第二, 只要材料本征坐标与传输坐标的夹角  $\varphi$  和入射角  $\theta$  及材料的介电张量和磁导率张量满足不等式(19), 则不论  $\varphi, \theta$  具体取何值, 也不论介电张量和磁导率张量的其他元素取什么值, 只要  $\varepsilon_y$  为负值, 就可以产生倒退波传输. 第三, 当入射电磁波为 TM 波时, 可以采用类似的方法进行分析得到, 当  $\mu_y$  为

负值时,可以产生倒退波传输.第四,由于 TE 波和 TM 波的偏振方式不同,并且这两种偏振下的介电常数和磁导率具有互偶特性,故波的传输方式是相反的.当 TE 波为倒退波传输时, TM 波表现为前进波;而 TE 波为前进波时, TM 波表现为倒退波.这与各向同性超常材料或各向异性常规材料显著不同.

当超常材料的本征轴和传输轴的夹角为  $0^\circ$ , 且  $\epsilon_x = \epsilon_y$ ,  $\mu_x = \mu_y$  时 (18) 式可以表示为

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{S}_T = \frac{\epsilon_y k_0 E_0^2}{2\eta_0},$$

其中  $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ ,  $\eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$ . 在这种情况下, 倒退波产生只与  $\epsilon_y$  有关, 这和文献 [4] 的结论一致. 但是, 本文的结论更具有一般性, 即只要各向异性超常材料的介电张量、磁导率张量、材料的本征轴与传输轴的夹角和电磁波的入射角满足不等式 (19), 就可以产生倒退波传输. 这说明在满足不等式 (19) 的条件下, 任意的夹角及入射角以及任意介电张量和磁导率张量的不同组合都可以产生倒退波传输. 本文的结论拓展了文献 [4] 的结论.

### 3.2. 完美倒退波

在各向异性超常材料中, 一般情况下折射波的波矢和坡印亭矢量存在一个夹角, 在特定条件下这个夹角可以达到  $180^\circ$ , 即波矢和坡印亭矢量出现反平行现象. 由矢量的有关定理可知, 当折射波的波矢与坡印亭矢量的叉积为零时, 它们的夹角为  $180^\circ$ , 两者反向平行.

$$\mathbf{q} \times \mathbf{S}_T = \frac{T^2 E_0^2 \epsilon_y}{2\omega} \left( q_x q_z \beta + \frac{1}{2} q_z^2 \xi - \frac{1}{2} q_x^2 \xi - q_x q_z \alpha \right) \mathbf{e}_y. \quad (20)$$

从 (20) 式可以看出, 当  $\alpha = \beta$ ,  $q_x = q_z$  时, 或当  $\alpha = \beta$ ,  $\xi = 0$  时, 或当  $\epsilon_y = 0$  时, 折射波的波矢与坡印亭矢量的叉积为零, 即波矢与坡印亭矢量的夹角为  $180^\circ$ , 它们成反平行关系, 这时的传输波就是倒退波. 当  $T = 0$  时, 折射波的波矢与坡印亭矢量的叉积也为零, 但这时没有波传输, 是一种全反射的情况, 不产生倒退波. 我们逐一分析了上述条件, 得出如下结果. 对于 TE 波, 当  $\mu_x = \mu_z$ ,  $\epsilon_y < 0$  时, 可以产生完美的倒退波, 不需要对介电常数和磁导率张量其他元素作限制. 对于 TM 波, 可以通过类似 TE 波的方法进行分析, 当  $\epsilon_x = \epsilon_z$ ,  $\mu_y < 0$  时, 可以产生完美的倒退波, 而只要  $\mu_y < 0$  时, 便可产生倒退波, 也不需要介电常数和磁导率张量的其他元素作限制. 同

时也可以发现, 由于横电波和横磁波具有互偶性, 当 TE 波为倒退波时, TM 波为前进波, 而 TE 波为前进波时, TM 波表现为倒退波. 当然, 以上的分析仍然是基于不等式 (19) 成立为前提.

### 3.3. 倒退波与材料色散关系的讨论

各向异性超常材料有着丰富的色散关系. 目前实现的负折射率材料并不是完全的三维负折射率材料, 而是只在某些方向上表现出负的电磁属性, 其中介电常数只在某一个方向上为负, 磁导率则只在另外两个正交方向上为负. 如果将介电常数和磁导率都用对角矩阵来表示, 那么 6 个矩阵元实际上只有 3 个为负值, 另外 3 个仍然为正值. 这种介电常数和磁导率矩阵的矩阵元符号可以任意组合的超常材料具有很丰富的色散关系, 如椭球、单页双曲面和双页双曲面等, 并具有许多特殊的电磁性质<sup>[13, 14]</sup>和潜在应用<sup>[15-17]</sup>. 下面将分别分析以上几种色散曲线情况下的倒退波.

首先讨论在波矢空间中折射方向问题. 各向同性材料的色散曲线是一个标准的圆, 它的半径由  $\sqrt{\epsilon_r \mu_r} \omega / c$  来确定. 在材料的分界面处, 由于边界条件的要求, 入射波、反射波和折射波三者界面方向上的波矢分量相等. 同时, 由能量守恒条件可知, 入射波和折射波的能量在与界面垂直方向上的分量必须方向相同, 即两者的符号相同. 通过这两个条件我们就可以在波矢空间确定折射波的波矢和能流(坡印亭矢量)的方向.

第一种情况是椭圆色散关系. 当入射电磁波是 TE 波, 且当  $\epsilon_y < 0$ ,  $\mu_x < 0$ ,  $\mu_z < 0$  满足时, 各向异性超常材料的波矢面是一个椭球, 如图 2 所示.  $\mathbf{k}_i, \mathbf{S}_i$  分别是入射波的波矢和坡印亭矢量,  $\mathbf{q}_T, \mathbf{S}_T$  分别是折射波的波矢和坡印亭矢量. 由上述判断条件和已知条件可知, 由于  $\mu_x < 0$ , 为保证能量向远离界面方向传输,  $q_{Tz}$  也必须小于零, 也就是  $\mathbf{q}_T$  的方向只能在  $\widehat{Q_3 P_3 Q_4}$  圆弧内,  $\mathbf{S}_T$  是能流的折射方向. 从图 2(b) 可以发现, 当入射波以入射角  $\theta_1$  从  $-90^\circ$  到  $90^\circ$  入射时, 折射波波矢处在  $\widehat{Q_3 P_3 Q_4}$  圆弧内, 且折射波波矢方向和能流方向的夹角大于  $90^\circ$ , 此时的传输波是倒退波. 对于 TM 波入射, 可以通过类似的方法进行分析和研究.

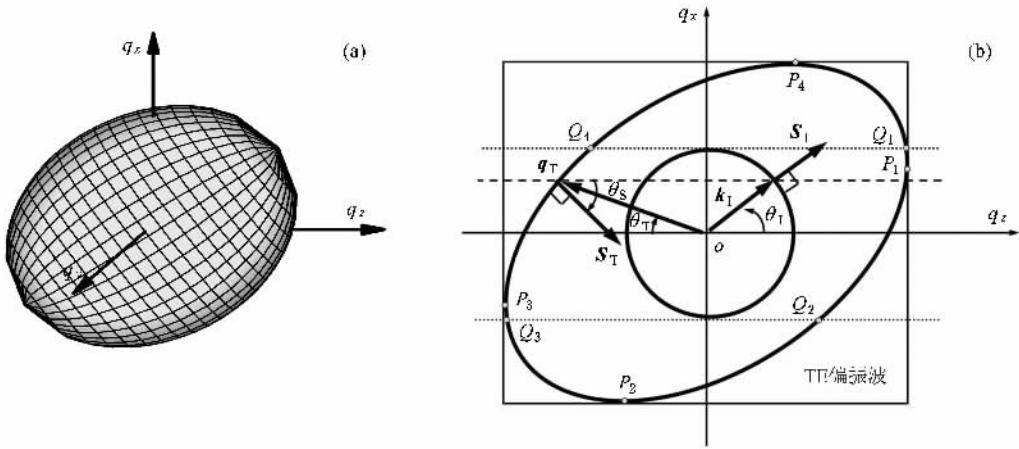


图 2 各向异性超常材料的椭圆色散关系 (a) 三维示意图 (b) 二维示意图, 其中圆和椭圆分别对应各向同性材料和各向异性材料的色散曲线, 椭圆本征轴和传输轴成任意夹角,  $P_1-P_4$  是椭圆与外接矩形的切点,  $Q_1, Q_4$  及  $Q_2, Q_3$  分别是两条临界线(点线)与椭圆的交点, 折射波的波矢与坡印亭矢量的夹角大于  $90^\circ$ , 此时的传输波是倒退波

第二种情况是单页双曲色散关系. 同样假设以 TE 波为入射电磁波, 从色散方程可以判断, 当  $\epsilon_y < 0, \mu_x > 0, \mu_z < 0$  时, 这时的各向异性超常材料的色散关系是单页双曲面, 如图 3 所示. 由边界连续条件和能量守恒定理可以判断折射波波矢和能流方向. 由图 3(b) 可以看出, 当入射波波矢以入射角从  $0^\circ$  到  $-90^\circ$  的范围内入射时,  $q \cdot S_T < 0$ , 折射波矢和能流的夹角大于  $90^\circ$  并小于  $180^\circ$ , 此时的传输波就是倒退波. 对于以 TM 波入射, 可以通过类似的方法进行分析和判断.

第三种情况是双页双曲色散关系. 仍以 TE 波为入射波, 当  $\epsilon_y > 0, \mu_x > 0, \mu_z < 0$  时, 这时的各向异性超常材料的色散关系为双页双曲面, 如图 4 所示. 由边界连续条件和能量守恒定理可以判断折射波波

矢和能流方向. 由图 4(b) 可以发现, 入射波的入射角在  $0^\circ-90^\circ$  之间时,  $q \cdot S_T < 0$ , 折射波波矢和能流的夹角大于  $90^\circ$  并小于  $180^\circ$ , 这种情况下的传输波就是倒退波.

### 3.4. 波矢和坡印亭矢量的夹角

从以上分析可知, 当折射波的波矢和坡印亭矢量点积为负值时, 它们的夹角可能处于  $90^\circ-270^\circ$  之间, 这种情况下的传输波就是倒退波. 为了解这个夹角的具体数值, 我们根据矢量的相关性质, 推导了这个角度的具体函数表达形式, 该表达式反映了各参量的变化对这个夹角的影响. 假设折射波的波矢和坡印亭矢量的夹角为  $\varphi$ , 则由两个矢量的点积和叉积的性质, 可得到如下公式:

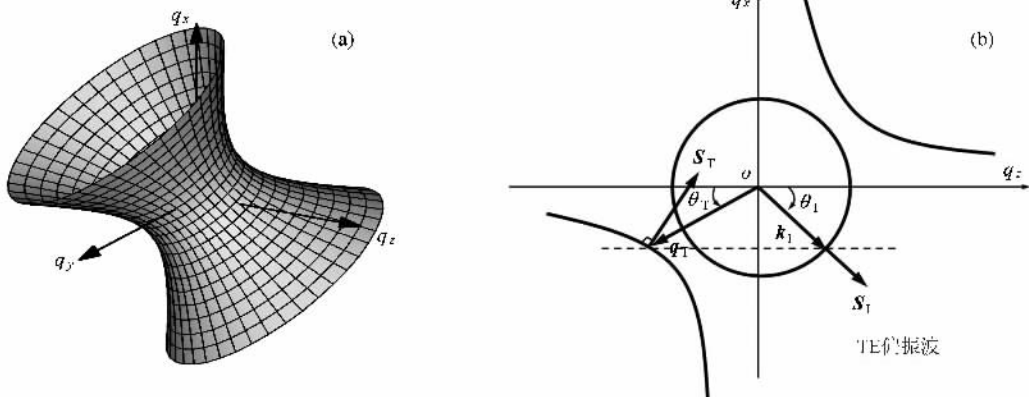


图 3 各向异性超常材料的单页双曲色散关系 (a) 三维示意图 (b) 二维示意图, 其中圆和双曲线分别对应各向同性材料和各向异性材料的色散曲线, 双曲线本征轴和传输轴成任意夹角, 折射波的波矢与坡印亭矢量的夹角大于  $90^\circ$ , 此时的传输波是倒退波

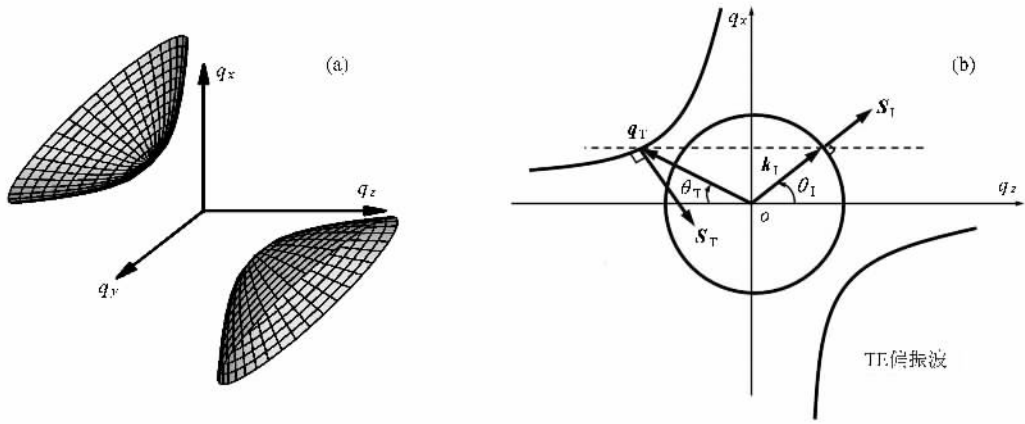


图 4 各向异性超常材料的双页双曲色散关系 (a) 三维示意图, (b) 二维示意图, 其中圆和双曲线分别对应各向同性材料和各向异性材料的色散曲线, 双曲线本征轴和传输轴成任意夹角, 折射波的波矢和坡印亭矢量夹角大于  $90^\circ$ , 此时的传输波是倒退波

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{S}_T = |\mathbf{q}| |\mathbf{S}_T| \cos \phi, \quad (21)$$

$$|\mathbf{q} \times \mathbf{S}_T| = |\mathbf{q}| |\mathbf{S}_T| \sin \phi. \quad (22)$$

由 (21) (22) 式以及 (17) (20) 式可以得到两矢量夹角的正切表达式, 即

$$\tan \phi = \frac{q_x q_z \beta + \frac{1}{2} q_z^2 \xi - \frac{1}{2} q_x^2 \xi - q_x q_z \alpha}{q_x^2 \beta + q_x q_z \xi + q_z^2 \alpha}. \quad (23)$$

当各向异性超常材料及电磁波的相应参量确定后, 将各参数代入 (23) 式便可以得到折射波波矢和坡印亭矢量夹角的  $\tan \phi$  值. 由于  $\tan \phi$  函数是周期函数, 且周期为  $\pi$ , 所以还需要再结合上述分析方法才可以确定夹角的大小, 并以此来判断传输波是否为倒退波.

以椭圆色散关系为例, 进行一个简单的示例分析. 由以上分析可知, 当各向异性超常材料的色散关系为椭圆时, 要求  $\epsilon_y < 0, \mu_x < 0, \mu_z < 0$ . 我们分别取  $\epsilon_y = -1, \mu_x = -1$  和  $\mu_z = -2$ . 假设 TE 偏振电磁波是从真空入射到各向异性超常材料上, 超常材料的本征轴和传输轴的夹角  $\varphi = \pi/4$ , 入射角  $\theta$  从  $-\pi/2$  到  $\pi/2$  连续变化, 可以得到在相应入射角时所对应的折射波波矢和坡印亭矢量夹角的  $\tan \phi$  值, 具体见图 5. 我们将电磁波的入射角取一个特殊的值为例来进行分析. 当入射角  $\theta = -\pi/4$  时, 则折射波波矢和坡印亭矢量夹角的正切值为零, 即  $\tan \phi = 0$ , 可以得出  $\phi = n\pi (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ . 由于两矢量的夹角只可能在  $2\pi$  以内, 所以  $\phi$  只能为  $0^\circ$  或  $180^\circ$ . 假设  $\phi$  取  $0^\circ$ , 则 (21) 式的值大于零, 这与 (18) 式的值小于零相矛盾, 故  $\phi$  只能等于  $180^\circ$ , 这时的传输波是倒退波, 并且是完美倒退波. 当入射角取其他值时可以

用类似的方法进行分析.

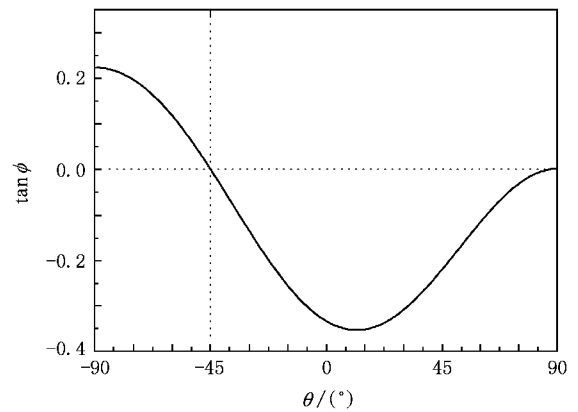


图 5 折射波波矢和坡印亭矢量的夹角与入射角的关系 TE 偏振电磁波从真空中入射到各向异性超常介质,  $\epsilon_y, \mu_x, \mu_z$  的取值分别为  $-1, -1, -2$ , 材料本征轴与传输轴夹角  $\varphi$  为  $45^\circ$ , 当入射角为  $-45^\circ$  时, 可以发现  $\phi$  等于  $180^\circ$ , 此时传输波是完美倒退波

### 3.5. 近零介电常数超常材料中的倒退波

介电常数等于零的超常材料是一个非常有趣的材料, 对电磁波在其中的传输特性最近也已有许多研究, 包括理论、数值模拟和实验<sup>[18, 19]</sup>结果. 由于它和自由空间的阻抗近似匹配, 所以它有非常低的反射率, 因此在波导、光能流传输及光能流连接等方面有许多潜在的应用.

由于超常材料的介电常数和磁导率是可任意调节的, 假设各向异性超常材料的介电常数张量元素  $\epsilon_y$  为负值且  $\epsilon_y \rightarrow 0$ , 即由负值趋近于零, 表明 (18) 式的值应小于零. 这说明在近零介电常数的超常材料

中,仍然可以产生倒退波,当然此近零介电常数超常材料必须有一维是电小尺寸(electrically small)<sup>[20]</sup>.此外,当 $\epsilon_y$ 由负值无限趋近于零时(20)式等于零,这时的倒退波是完美倒退波.上述分析是TE波的情况.通过上述分析发现,TE波在近零介电常数超常材料中传输时,由于 $\epsilon_y$ 由负值无限趋近于零,只能产生完美倒退波,而不能产生非完美倒退波,这和普通各向异性超常材料显著不同.同时由于在TE偏振波和TM偏振波下介电常数和磁导率具有互偶性,因此当入射波为TM偏振波时,可以得出和TE波类似的结论.这说明当TM波在各向异性超常材料中传输时,如果磁导率张量元素 $\mu_y$ 由负值无限趋近于零,这时可以产生完美倒退波传输.这可能也和近零介电常数超常材料是同样的要求,即材料的结构单元也应是电小尺寸.这也是一种具有特殊电磁性质的超常材料,我们称之为近零磁导率超常材料.现在还没有发现与此有关的报道,我们期待着近零磁导率超常材料的出现.

## 4. 结 论

本文研究了各向异性超常材料中倒退波的传输特性.在传输轴与材料的本征轴成任意夹角时,由于材料的介电张量和磁导率张量可以取不同的符号,我们发现当TE波入射时,如果超常材料的本征轴和传输轴的夹角、电磁波的入射角以及材料的介电张量和磁导率张量满足一定条件时,可以产生完美倒退波和不完美倒退波两种情形,并且当TE波为倒退波传输时对应的TM波为前进波,反之亦然.在各种不同色散曲线关系下,探讨了倒退波的产生情况,并推导了波矢和坡印亭矢量(能流)夹角的具体表达式,从夹角表达式可以更直观地研究各种因素对产生倒退波传输的作用.此外,对近零介电常数的超常材料中的倒退波现象进行了探讨,发现在近零介电常数的超常材料中的倒退波只能是完美倒退波.

- [1] Pendry J B, Smith D R 2006 *Sci. Am.* **295** 60
- [2] Veselago V G 1968 *Sov. Phys. Usp.* **10** 509
- [3] Berman P R 2002 *Phys. Rev. E* **66** 067603
- [4] Lindell I V, Tretyakov S A, Nikoskinen K I, Ilvonen S 2001 *Microw. Opt. Tech. Lett.* **31** 129
- [5] Wu M F, Meng F Y, Wu Q, Wu J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6368 (in Chinese)[武明峰、孟繁义、吴群、吴健 2006 物理学报 **55** 6368]
- [6] Woodley J, Mojahedi M 2006 *J. Opt. Soc. Am. B* **23** 2377
- [7] Belov P A 2003 *Microw. Opt. Tech. Lett.* **37** 259
- [8] Luo H L, Shu W X, Li F, Ren Z Z 2006 *Opt. Commun.* **267** 271
- [9] Smith D R, Padilla W J, Vier D C, Nemat-Nasser S C, Schultz S 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 4184
- [10] Smith D R, Schurig D 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 077405
- [11] Luo H L, Hu W, Yi X N, Zhu J 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2947 (in Chinese)[罗海陆、胡巍、易熙农、朱静 2004 物理学报 **53** 2947]
- [12] Cao J X, Hu W, Luo H L, Yang X B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2131 (in Chinese)[曹京晓、胡巍、罗海陆、杨湘波 2007 物理学报 **56** 2131]
- [13] Hu L B, Chui S T 2002 *Phys. Rev. B* **66** 085108
- [14] Luo H L, Ren Z Z, Shu W X, Li F 2007 *Appl. Phys. A* **87** 245
- [15] Liu Z, Xu J, Lin Z 2004 *Opt. Commun.* **240** 19
- [16] Luo H L, Ren Z Z, Shu W X, Li F 2007 *Appl. Phys. B* **87** 283
- [17] Luo H L, Ren Z Z, Shu W X, Li F 2007 *Phys. Rev. E* **75** 026601
- [18] Alu A, Silveirinha M G, Salandrino A, Engheta N 2007 *Phys. Rev. B* **75** 155410
- [19] Liu R P, Cheng Q, Hand T, Mock J J, Cui T J, Cummer S A, Smith D R 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 023903
- [20] Silveirinha M, Engheta N 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 157403

# Backward wave propagation in anisotropic metamaterials<sup>\*</sup>

Zhou Jian-Hua<sup>1,2)</sup> Liu Hong-Yao<sup>1)</sup> Luo Hai-Lu<sup>1)</sup> Wen Shuang-Chun<sup>1)†</sup>

<sup>1</sup> *Key Laboratory for Micro/Nano Optoelectronic Devices of Ministry of Education,  
School of Computer and Communication, Hunan University, Changsha 410082, China*

<sup>2</sup> *Department of Information Engineering, Shaoyang University, Shaoyang 422000, China*

(Received 11 May 2008; revised manuscript received 1 August 2008)

## Abstract

In this paper, we study the backward wave propagation phenomenon in completely anisotropic metamaterials. The formation conditions for backward wave propagation under an arbitrary angle between the metamaterials' intrinsic coordinate axis and transmission axis are obtained. The influences of permittivity and permeability tensors and polarization on the backward wave formation and propagation are analyzed. On this basis, we further analyze the situation of backward wave in anisotropic metamaterials with different dispersion relations, and the angle between wave vector and Poynting vector, and the general conclusion of backward wave propagation are obtained. In addition, we studied the propagation characteristics of backward wave in epsilon-near-zero metamaterials, and discovered that the backward wave in these metamaterials is a perfect backward wave.

**Keywords** : metamaterial, negative refractive, backward wave, anisotropy

**PACC** : 4270Y, 4225B

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10674045).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail : scwen@hnu.cn