

# Gabor 小波分析太赫兹波时间-频率特性的研究\*

邓玉强<sup>1)†</sup> 郎利影<sup>2)</sup> 邢岐荣<sup>3)</sup> 曹士英<sup>4)</sup> 于靖<sup>1)</sup> 徐涛<sup>1)</sup>  
李健<sup>1)</sup> 熊利民<sup>1)</sup> 王清月<sup>3)</sup> 张志刚<sup>3)‡</sup>

1) 中国计量科学研究院光学与激光计量科学研究所, 北京 100013)

2) 河北工程大学信息与电子工程学院, 邯郸 056038)

3) 天津大学精密仪器与光电子工程学院, 天津 300072)

4) 北京大学电子工程与计算机科学学院, 北京 100871)

(2008 年 4 月 25 日收到, 2008 年 8 月 27 日收到修改稿)

引入小波变换将太赫兹脉冲波形变换到二维的时间-频率平面, 对太赫兹脉冲时间-频率特性作联合分析. Gabor 小波的形状因子是控制小波时间-频率特性的重要参数, 通过改变 Gabor 小波形状因子提高了小波分析太赫兹脉冲的时间分辨率和频率分辨率.

关键词: 太赫兹辐射, 小波变换, 频谱分析

PACC: 4280W, 0765G, 0630F

## 1. 引言

近年来, 飞秒脉冲激光技术、非线性光学技术和晶体生长技术的快速发展推动了高强度、宽带宽相干太赫兹辐射的产生并实现了室温探测<sup>[1]</sup>. 相干探测方法不仅可以测量太赫兹辐射的强度, 而且可以测量时间分辨的电场振荡幅值<sup>[2]</sup>. 太赫兹时域光谱技术探测太赫兹辐射与物质的作用, 分析在太赫兹波段敏感的材料和化学元素的光谱响应以精确测量物质的色散和吸收特性<sup>[3]</sup>, 从而在气体、液体以及电介质、半导体、超导体等各种材料的光谱研究中发挥着重要作用<sup>[4-7]</sup>.

传统的太赫兹时域光谱技术是基于 Fourier 变换<sup>[3]</sup> 将太赫兹脉冲时域波形变换到频域进行频谱分析. Fourier 变换是将整个时域信息变换到频域, 因而掩盖了太赫兹脉冲时间分辨的光谱特性, 不能显示出某个时间区域的频率特性或某个频率特性发生的时间区域. 文献<sup>[8]</sup> 提出了小波变换分析太赫兹波频谱特性的方法, 将太赫兹脉冲展开到二维的时间-频率平面, 对太赫兹脉冲作时间-频率联合分析, 从

而揭示了太赫兹脉冲时间分辨的频谱特性. Gabor 小波形状因子是控制 Gabor 小波时间-频率特性的重要参数<sup>[9]</sup>. 分析时域信号时, 形状因子小的 Gabor 小波具有高的时间分辨率, 而形状因子大的 Gabor 小波具有高的频率分辨率<sup>[9]</sup>. 本文通过采用不同形状因子的 Gabor 小波作为分析小波, 研究 Gabor 小波形状因子对于太赫兹波时间-频率特性分析的影响. 通过改变 Gabor 小波形状因子, 提高了太赫兹脉冲时间-频率特性分析的时间分辨率和频率分辨率, 为应用小波变换揭示太赫兹脉冲时间分辨的光谱特性研究中小波参数选取提供了参考.

## 2. 理论分析

小波是在时域和频域都具有局域性的波形<sup>[10]</sup>, 特别适合于分析脉冲信号或突变信号<sup>[11]</sup>. 太赫兹脉冲在时域和频域也具有局域性, 因而太赫兹脉冲自然适合采用小波分析<sup>[12]</sup>. 小波变换分析太赫兹脉冲将比传统的 Fourier 变换方法会产生更丰富的时间-频率信息.

对于时域信号  $f(t)$ , 消除频率偏移的小波变换

\* 中国计量科学研究院科研基金(批准号: AKY0748) 国家科技支撑计划(批准号: 2006BAF06B05) 科学技术部国际合作计划(批准号: 2007DFA11430) 和中国计量科学研究院博士专项科研启动基金(批准号: TGQD05-12) 资助的课题.

† E-mail: yqdeng@nim.ac.cn

公式为<sup>[8]</sup>

$$W(a, \tau) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^* \left( \frac{t-\tau}{a} \right) dt, \quad (1)$$

式中  $\psi^*[(t-\tau)/a]$  为子小波函数的复共轭<sup>[8]</sup>,  $a$  为小波的尺度因子,  $\tau$  为小波的平移因子.

这里选择 Gabor 小波作为母小波函数, Gabor 小波表示为<sup>[9, 13]</sup>

$$\psi(t) = \frac{1}{(\sigma^2 \pi)^{1/4}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2} + i2\pi\eta t\right), \quad (2)$$

式中时域宽度  $\sigma$  和中心频率  $\eta$  是控制 Gabor 小波形状的两个参数.  $\sigma$  决定小波时域包络的宽度,  $\eta$  决定小波在包络下振荡的频率. 我们也可以用 Gabor 小波的形状因子  $G_s$  来控制 Gabor 小波的形状, 定义

$$G_s = 2\pi\sigma\eta. \quad (3)$$

通过调整形状因子, 可以得到预期形状的 Gabor 小波. 为了便于研究, 我们在本文中设定 Gabor 小波时域宽度  $\sigma$  为常数, 取  $\sigma = 1/\sqrt{2\ln 2}$ . 那么形状因子仅由中心频率  $\eta$  这一个参数控制. 此时, 尺度因子  $a$  与频率  $\nu$  的关系可以简化为

$$\nu = \eta/a. \quad (4)$$

这样, 用 Gabor 小波分析太赫兹脉冲时域信号, 小波变换可用下式描述:

$$W(\tau, \nu) = \sqrt{\frac{4\sqrt{2\ln 2}}{\pi}} \frac{\eta}{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathcal{D}^{-1}\left[\frac{(t-\tau)\nu}{\eta}\right]^2 \times \exp[-i2\pi\nu(t-\tau)] dt. \quad (5)$$

小波变换将太赫兹脉冲展开到二维的时间-频率平面上, 该平面的时间轴反映太赫兹脉冲的时域信息, 频率轴反映脉冲的频域信息, 时间-频率平面上每一点的强度值反映太赫兹脉冲与该位置处子小波函数的相关度.

### 3. 实 例

我们用自制的太赫兹时域光谱系统测量了太赫兹脉冲波形信号<sup>[14]</sup>. 太赫兹脉冲通过空气和通过水蒸汽中的信号分别如图 1(a) 和 (b) 所示.

传统的太赫兹时域光谱技术是利用 Fourier 变换将太赫兹脉冲波形变换到整个频域轴, 然而只有在 0.1—10 THz 频率范围内的信息才是我们所关注的. 为了提高分析信号的频率分辨率, 通常采用的方法是在太赫兹脉冲时域信号两端添加大量的“零”, 类似于在频域中的插值处理<sup>[15, 16]</sup>. 而小波变换分析太赫兹脉冲频谱, 只需要在所关心的频段内作小波

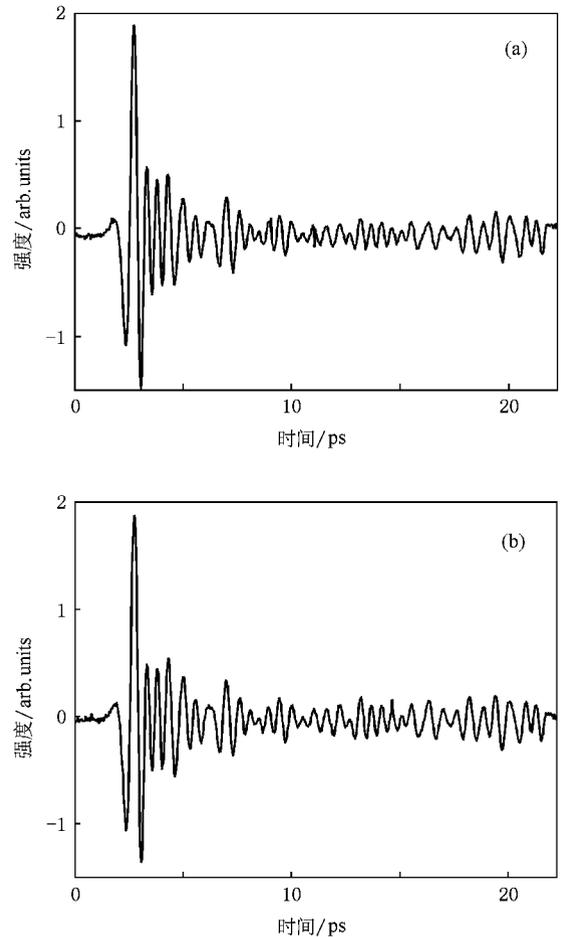


图 1 太赫兹脉冲信号 (a) 通过空气的太赫兹脉冲 (b) 通过水蒸汽的太赫兹脉冲

变换, 其他频段的信息不必考虑, 并且可以通过逐渐精细的尺度伸缩得到任意精细的频率细节.

#### 3.1. 用优化的形状因子分析太赫兹波谱

我们引入小波变换还原飞秒脉冲光谱干涉的相位<sup>[17]</sup>并研究了形状因子对还原相位的影响<sup>[9]</sup>. 结果表明, 形状因子  $G_s$  在 3—7 范围内可以较精确地还原光谱相位, 因为形状因子在 3—7 范围内的 Gabor 小波同时具有较高的时间分辨率和频率分辨率. 这里我们选择  $\eta = 1$  ( $G_s = 5.3$ ), 用 (5) 式对图 1 中测得的太赫兹脉冲波形作小波变换. 选取变换的频率范围为 0.2—3.7 THz (该范围包含了图 1 所测的太赫兹波的频谱), 离散的频率间隔为 0.001 THz; 时域的离散间隔与采样间隔一致, 即为 0.2 fs.

对图 1(a) 和 (b) 中测得的太赫兹脉冲作小波变换, 将太赫兹脉冲的时间-频率信息展开到二维平面上, 得到了通过空气的太赫兹脉冲时间分辨的波谱

特征和通过水蒸汽的太赫兹脉冲时间分辨的波谱特征. 将通过空气和水蒸汽的太赫兹时间-频率分布的值相减, 就得到了水蒸汽对太赫兹脉冲吸收的时间-频率分布, 如图 2 所示. 图 2(a) 为图 1(b) 中通过水蒸汽的太赫兹脉冲波形的小波变换结果, 在二维的时间-频率平面上清晰地表明了太赫兹脉冲在每一时刻的频率成分, 揭示了太赫兹脉冲时间分辨的频谱特征. 图 2(b) 为通过空气和水蒸汽的太赫兹时间-频率分布的强度值相减得到的水蒸汽对太赫兹脉冲吸收的时间-频率分布, 该图揭示了水蒸汽对太赫兹波吸收的时间分辨的频谱特性.

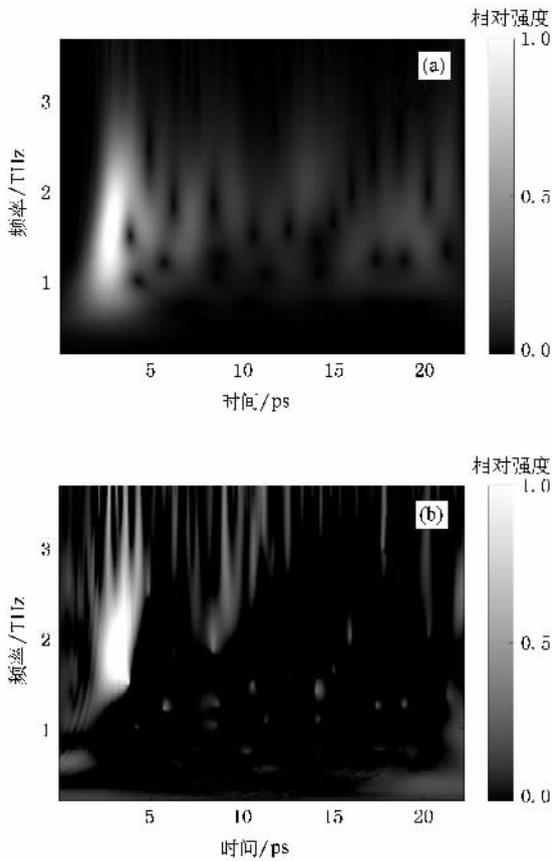


图 2 小波变换得到的太赫兹脉冲时间-频率分布和水蒸汽吸收太赫兹的时间-频率分布 (a)通过水蒸汽的太赫兹脉冲时间-频率分布 (b)水蒸汽吸收太赫兹时间-频率分布

### 3.2. 减小形状因子的值提高小波分析的时间分辨率

文献 [9] 指出, 形状因子是决定小波分析的时间分辨率和频率分辨率的参数. 形状因子小的小波具有高的时间分辨率, 而形状因子大的小波具有高的频率分辨率. 因此, 可以通过减小形状因子提高分析

的时间分辨率. 选择  $\eta = 0.5$  ( $G_s = 2.7$ ) 重复以上的分析过程, 得到的太赫兹脉冲通过水蒸汽的时间-频率分布和水蒸汽吸收太赫兹的时间-频率分布分别如图 3(a) 和 (b) 所示.

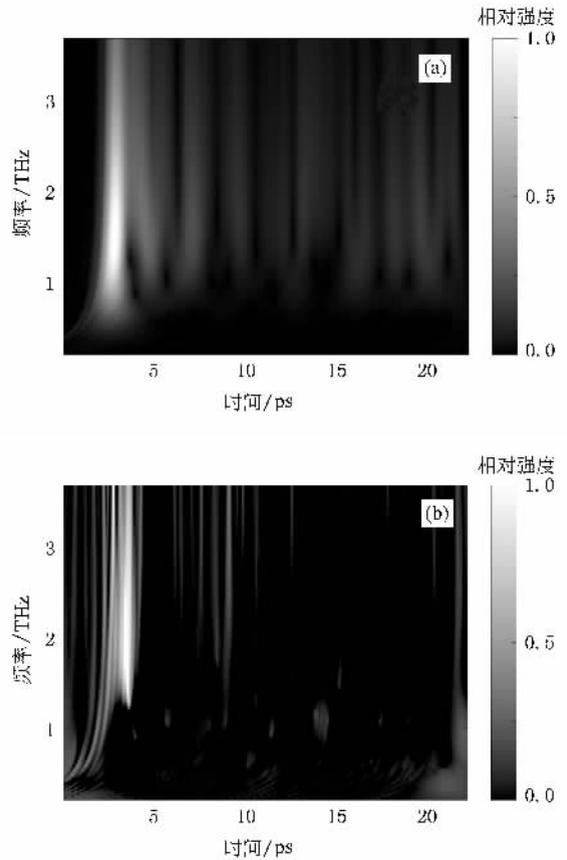


图 3 提高时间分辨率的太赫兹脉冲时间-频率分布和水蒸汽吸收太赫兹的时间-频率分布 (a)通过水蒸汽的太赫兹脉冲时间-频率分布 (b)水蒸汽吸收太赫兹的时间-频率分布

从图 3 可以看出, 减少形状因子提高了分析的时间分辨率, 然而频率分辨率却降低了, 这与我们分析的结果一致. 海森堡不确定性原理说明, 时间分辨率与频率分辨率的乘积是固定的常数, 提高一个分辨率必然要以牺牲另一个分辨率为代价, 不可能将时间分辨率和频率分辨率同时提高<sup>[9]</sup>.

### 3.3. 增大形状因子的值提高分析的频率分辨率

既然减小形状因子提高了分析的时间分辨率, 那么增大形状因子一定会提高分析的频率分辨率. 选择  $\eta = 10$  ( $G_s = 53.4$ ), 仍重复以上的分析过程, 得到的太赫兹脉冲经过水蒸汽的时间-频率分布和水蒸汽吸收太赫兹的时间-频率分布分别如图 4(a) 和 (c) 所示.

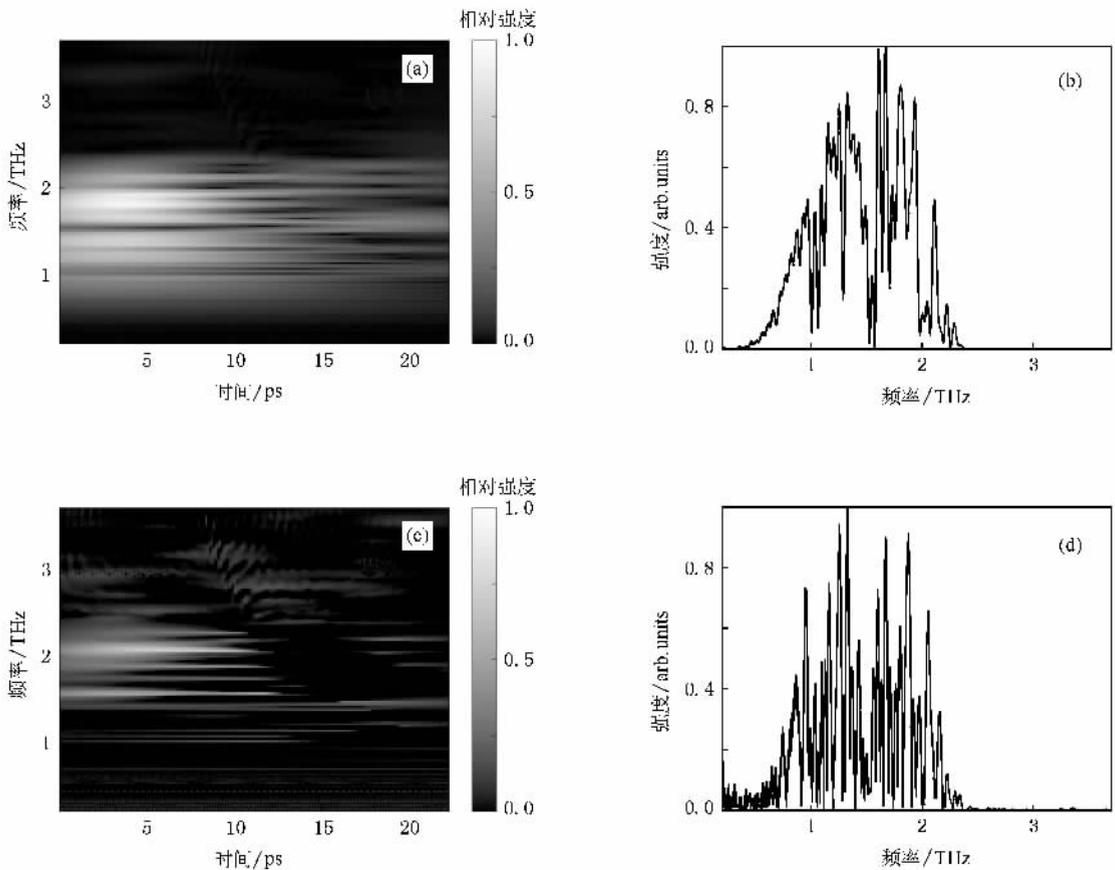


图4 提高频率分辨率的太赫兹脉冲时间-频率分布和水蒸汽吸收太赫兹的时间-频率分布与 Fourier 变换得到的频谱和吸收谱的比较 (a)提高频率分辨率的太赫兹脉冲通过水蒸汽的时间-频率分布 (b) Fourier 变换的太赫兹脉冲通过水蒸汽的频谱 (c)提高频率分辨率的水蒸汽吸收太赫兹时间-频率分布 (d) Fourier 变换的水蒸汽吸收太赫兹谱

正如海森堡不确定性原理所预测,增大形状因子提高了太赫兹脉冲分析的频率分辨率,而时间分辨率却降低了.形状因子越大,小波变换越近似于 Fourier 变换,换言之, Fourier 变换就是小波变换中 Gabor 小波的形状因子趋近于正无穷大的一个特例.为了便于比较,我们将 Fourier 变换的结果也示于图 4.图 4(b)和(d)分别为 Fourier 变换得到的太赫兹脉冲通过水蒸汽的频谱和水蒸汽对太赫兹波的吸收谱线.将图 4(a)和(c)中小波变换的时间-频率分布投影到频率轴,得到的峰值与图 4(b)和(d)中 Fourier 变换的谱线峰值能够精确地相符.

提取图 4(c)和(d)中的太赫兹脉冲通过水蒸汽的吸收谱线峰值处的频率值并与文献 [18,19] 报道的结果一并列于表 1 中.

表 1 中给出了利用小波变换得到的水蒸汽吸收谱线的频率,同时也给出了利用 Fourier 变换得到的水蒸汽吸收谱线的频率及文献报道的水蒸汽吸收谱线的频率.从表 1 可以看出,小波变换得到的吸收

表 1 小波变换与 Fourier 变换及文献 [18,19] 中水蒸汽吸收谱线峰值处的频率(单位为 THz)

小波变换	Fourier 变换	文献 [18]	文献 [19]
1.096	1.096	1.098	1.097
1.126	1.126	1.113	1.112
1.164	1.162	1.163	1.161
1.253	1.252	—	1.253
1.323	1.323	—	1.321
1.373	1.372	—	1.376
1.413	1.412	1.411	1.413
1.431	1.432	—	1.432
1.547	1.557	—	1.542
1.601	1.601	1.603	1.604
1.672	1.672	1.670	—
1.800	1.802	—	1.800
1.868	1.868	1.868	1.868
1.928	1.928	—	1.923
2.043	2.050	2.041	2.040
2.173	2.157	—	2.163
2.299	2.299	2.294	2.298
2.431	2.429	2.429	2.445

谱线与 Fourier 变换得到的结果精确地符合,且与文

献 [18, 19] 中报道的数据相符, 证明小波变换可以作为一种精确可信的时间-频率分析方法用于太赫兹脉冲的时间-频率特性分析.

#### 4. 小波变换与 Fourier 变换分析太赫兹波时间-频率特性的比较

传统的太赫兹时域光谱技术基于 Fourier 变换, 将整个太赫兹脉冲波形变换到频域进行分析, 掩藏了太赫兹光谱的时间分辨特性. 而小波变换是二维的时间-频率联合分析, 将太赫兹脉冲展开到二维的时间-频率平面上, 清楚地表现出每个时间区域的频率特性和每个频率特性发生的时间区域. 与传统的 Fourier 变换相比, 小波变换分析太赫兹时域光谱技术提供了更丰富、更直接的时间-频率特征信息, 这有利于认识太赫兹脉冲特性、揭示太赫兹脉冲与物质作用的时间-频率变化规律和测量物质在太赫兹波段的色散和吸收特性.

小波变换分析太赫兹时域光谱方法是一种灵活的技术, 形状因子为此提供了一个方便的控制方向, 使从时域分析到频域分析的转换可以通过改变形状因子而简单完成. 减小形状因子可以提高时间分辨率更适于时域分析, 增大形状因子可以提高频率分辨率更适于频域分析, 而 Fourier 变换可以看作是形状因子趋于正无穷大时 Gabor 小波变换的一个特例.

传统的太赫兹时域光谱技术的频率分辨细节依赖于太赫兹脉冲信号在时域的长度, 为了在频域中插值处理, 需要数值方法虚假地增加太赫兹脉冲的时域长度, 通常的方法是在采集的时域信号两端添加大量的“零”<sup>[15, 16]</sup>以在频域实现插值, 而小波变换可以通过逐渐减小小波函数在频率离散的步长得到逐渐精细的频率细节, 不需要数值的补零处理.

#### 5. 结 论

小波变换分析太赫兹时域光谱技术是传统太赫兹时域光谱技术的扩展和延伸, 本文采用不同形状因子的 Gabor 小波作为母小波函数, 研究 Gabor 小波形状因子对于分析太赫兹波时间-频率特性的影响. 形状因子如同一个灵活的控制开关, 通过改变形状因子可以提高分析的时间分辨率和频率分辨率, 使从时域分析到频域分析的转换可以简单完成. 本文通过对小波变换与 Fourier 变换得到的水蒸汽在太赫兹波段的吸收谱线以及与文献报道的结果比较, 说明了小波变换是一个精确可信的技术, 适合于太赫兹脉冲的时间-频率特性分析. 小波变换分析太赫兹时域光谱技术将在研究太赫兹脉冲性质、揭示太赫兹脉冲与物质的作用 and 变化规律以及测量物质在太赫兹波段的色散和吸收特性等应用中发挥重要的作用.

- 
- [ 1 ] Auston D H, Nuss M C 1988 *IEEE J. Quantum Electron.* **24** 184
- [ 2 ] Fitzgerald A J, Berry E, Zinovev N N, Walker G C, Smith M A, Chamberlain J M 2002 *Phys. Med. Biol.* **47** R67
- [ 3 ] Smith P R, Auston D H, Nuss M C 1988 *IEEE J. Quantum Electron.* **24** 255
- [ 4 ] Harde H, Keiding S R, Grischkowsky D 1991 *Phys. Rev. Lett.* **66** 1834
- [ 5 ] Pedersen J E, Keiding S 1992 *IEEE J. Quantum Electron.* **28** 2518
- [ 6 ] Grischkowsky D, Keiding S, Exter M, Fattinger C 1990 *J. Opt. Soc. Am. B* **7** 2006
- [ 7 ] Nuss M C, Mankiewich P M, O'Malley M L, Westerwick E H, Littlewood P B 1991 *Phys. Rev. Lett.* **66** 3305
- [ 8 ] Deng Y Q, Xing Q R, Lang L Y, Chai L, Wang Q Y, Zhang Z G 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5224 (in Chinese) [ 邓玉强、邢岐荣、郎利影、柴路、王清月、张志刚 2005 物理学报 **54** 5224 ]
- [ 9 ] Deng Y, Wang C, Chai L, Zhang Z 2005 *Appl. Phys. B* **81** 1107
- [ 10 ] Chui C K 1992 *An Introduction to Wavelets* ( Boston : Academic Press )
- [ 11 ] Te C C, Ferguson B, Abbott D 2002 *Proc. SPIE* **4937** 294
- [ 12 ] Mittleman D M, Jacobsen R H, Neelamani R, Baraniuk R G, Nuss M C 1998 *Appl. Phys. B* **67** 379
- [ 13 ] Hong J C, Kim Y 2004 *Exp. Mech.* **44** 387
- [ 14 ] Lang L Y, Xing Q R, Li S X, Mao F, Chai L, Wang Q Y 2004 *Chin. Opt. Lett.* **2** 677
- [ 15 ] Griffith P R 1975 *Chemical Infrared Fourier Transform Spectroscopy* ( New York : Wiley )
- [ 16 ] Exter M, Fattinger C, Grischkowsky D 1989 *Opt. Lett.* **14** 1128
- [ 17 ] Deng Y, Wu Z, Chai L, Wang C, Yamane K, Morita R, Yamashita M, Zhang Z 2005 *Opt. Express* **13** 2120
- [ 18 ] Chevillon R A, Grischkowsky D 1999 *J. Opt. Soc. Am. B* **16** 317
- [ 19 ] Foltynowicz R J, Allman R E 2005 *Sandia Report SAND2005-5709*

# Terahertz time-frequency analysis with Gabor wavelet-transform<sup>\*</sup>

Deng Yu-Qiang<sup>1)†</sup> Lang Li-Ying<sup>2)</sup> Xing Qi-Rong<sup>3)</sup> Cao Shi-Ying<sup>4)</sup> Yu Jing<sup>1)</sup> Xu Tao<sup>1)</sup>  
Li Jian<sup>1)</sup> Xiong Li-Min<sup>1)</sup> Wang Qing-Yue<sup>3)</sup> Zhang Zhi-Gang<sup>3)‡</sup>

1) *Division of Optics and Lasers, National Institute of Metrology, Beijing 100013, China*

2) *College of Information and Electrical Engineering, Hebei University of Engineering, Handan 056038, China*

3) *School of Precision Instruments and Optoelectronics Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China*

4) *School of Electronics Engineering and Computer Science, Peking University, Beijing 100871, China*

( Received 25 April 2008 ; revised manuscript received 27 August 2008 )

## Abstract

We applied different shaping factors of Gabor wavelet for the analysis of terahertz time-domain spectroscopy with wavelet-transform. Gabor wavelet analysis allows a convenient switching between time domain and frequency domain by varying shaping factors. The comparison of absorption spectral lines obtained between with wavelet-transform and with other methods demonstrated that wavelet-transform is a reliable technique for the analysis of the absorption properties and the extraction of the characteristic spectral lines in terahertz range.

**Keywords** : terahertz radiation , wavelet-transform , spectra analysis

**PACC** : 4280W , 0765G , 0630F

<sup>\*</sup> Project supported by the Scientific Research Foundation of National Institute of Metrology, China ( Grant No. AKY0748 ), the State Key Program of Science and Technology of China ( Grant No. 2006BAF06B05 ), the International Cooperation Program of Ministry of Science and Technology, China ( Grant No. 2007DFA11430 ) and the Special Foundation of Starting Research for Doctor of National Institute of Metrology, China ( Grant No. TGQD05-12 ).

<sup>†</sup> E-mail : yqdeng@nim.ac.cn