

Couette 颗粒系统中静态应力和侧压力系数的 非线性弹性理论分析*

郑鹤鹏¹⁾ 蒋亦民^{1,2)†}

1) 中南大学物理科学与技术学院, 长沙 410083)

2) 蒂宾根大学理论物理研究所, 德国蒂宾根 72076)

(2008 年 1 月 9 日收到, 2008 年 5 月 15 日收到修改稿)

经典弹性理论能否适用于静态颗粒物质是颗粒物理的一个基本问题. 报道了非线性颗粒弹性方程对环柱几何(或称 Couette 几何)状样品中应力分布的计算结果. 由于这些结果大都可在今后用实验直接测量, 因而可将它们用于进一步判断这些弹性方程对颗粒材料的适用性以及澄清这个基本问题. 另外, 这些结果还可用于分析计算工程中的侧压力系数.

关键词: 颗粒物质, 侧压力系数, 非线性弹性理论

PACC: 8270, 4630P, 4610

1. 引言

由大量颗粒堆积而成的物体称为颗粒物质. 这是一种常见的物态形式, 如沙土、谷物、白糖、各种粉末材料等. 它们表现出许多不同于普通液体或弹性固体的行为. 对此人们至今还没有形成一致的理论 and 看法, 比如支配宏观应力场(即粗粒化(coarse-graining)平均应力^[1])在这类物体中传播的基本方程、循环加载下表现的塑性蠕变和棘齿现象^[2,3]、随着间歇拍打或摇动颗粒物质的密度会缓慢地向一平衡点弛豫^[4]、沙丘表面声波的反常波速和崩塌时发出的特别鸣响^[5]等等. 近年来, 有关颗粒物质的基础研究已成为软物质物理中一个相当活跃的研究领域^[6,7].

在远大于其构成粒子最近邻间距的空间精度上, 可用连续介质模型方法描述任何宏观物体的大尺度物理性质. 在这个前提下, 对处于静止状态的物体而言, 最基本的问题是建立它的宏观应力理论. 普通液体中的静力只有一个标量, 即压强 P , 它的空间分布可完全被静力平衡方程

$$\nabla_i P = \rho g_i$$

(其中 g_i 是重力加速度矢量, ρ 是质量密度)和边界条件确定. 描述固体中的静力则要复杂得多, 需用一个二阶对称张量, 即应力 σ_{ij} . 由于应力张量有 6 个分量, 故其空间变化不能被三个力平衡方程(本文使用重复指标自动求和的约定)

$$\nabla_j \sigma_{ij} = \rho g_i \quad (1)$$

所确定. 解决这个困难的经典做法是利用“应力等于弹性能密度 w 对柯西弹性应变 $u_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i U_j + \nabla_j U_i)$ 的导数”这一力学原理^[8], 其中 U_i 是位移矢量. 为简单起见, 本文将忽略 w 与温度或熵的函数关系, 也就是不考虑热效应.

$$\sigma_{ij} = -\partial w / \partial u_{ij} \quad (2)$$

对普通的各向同性固体, 方程(2)给出的是线性的应力-应变关系, 即胡克定律

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{kk} \delta_{ij} - 2\mu u_{ij} \quad (3)$$

其中 λ, μ 是材料的 Lamé 系数. 对非线性固体可以用方程(1)(2)建立相应的非线性应力-应变关系. 方程(1)(2)是弹性理论的基本结构, 一旦有了材料的弹性能函数 $w(u_{ij})$ 和合理的边界条件, 它们能完全确定弹性位移矢量的空间分布, 从而得到材料中的宏观应力分布情况.

* 国家自然科学基金(批准号:10674181)资助的课题.

† E-mail: jiangyimin@yahoo.cn

在远大于邻近颗粒间距的宏观精度上,静止颗粒物质中的应力也是由对称张量 σ_{ij} 来描述的. 对这类称为颗粒固态 (granular solid) 的材料, 一个重要的基本问题是, 上述弹性力学理论是否还能继续适用? 颗粒固态具有一定程度的抗剪切能力, 并能对足够小的扰动作出以弹性为主的响应. 一般认为, 如果扰动产生的变形小于 10^{-5} 时可将其看作弹性过程, 参见文献 [9].

从以上两个角度看静止颗粒物质与经典固体是一致的, 应该有相同的应力理论结构. 如果我们接受这个观点, 颗粒静力学的基本问题就转化为如何确定合适的弹性能公式. 基于这一考虑, 文献 [10] 在赫兹接触力学的提示下, 提出了一个颗粒物体的弹性能公式, 进而利用方程 (1) (2) 建立了一组可分析颗粒物中静力问题的非线性弹性方程. 目前的研究表明, 这个颗粒非线性弹性理论模型的确能反映不少颗粒固态所特有的性质, 包括库仑屈服^[10]、对微弱应力变化出的弹性响应行为^[11]、点状压力在半无穷大固体中的分布 (又称 Boussinesq 问题)^[12]、粮仓中的 Janssen 应力分布和联系侧压力系数与库仑屈服角的 Jaky 公式^[13]等. 另外该理论还有助于理解颗粒固态表面声波的复杂行为和鸣沙等声学问题^[5]. 最近通过进一步加入各类耗散过程, 方程 (1) (2) 亦能成功地描述颗粒物的塑性变形和蠕动行为^[14].

需要注意的是, 颗粒物质是具有复杂非线性力学行为的材料, 其基本物理规律仍是当前研究的前沿课题之一. 在这一情形下, 有必要从多个角度对不同的理论模型作全面考察, 特别是要研究能否对不同的几何系统都作出合理描述. 在本文中我们将给出文献 [10] 的理论模型对静止的轴对称颗粒系统 (即 Couette 几何) 的应力计算结果. 这些计算值大多能通过直接测量得到, 因此具有一定的实验意义. 同时, 这也便于今后对该理论模型的合理性与局限性的验证, 尤其是对一些非线性力学现象适用性的验证. 另外, 值得一提的是, 这个静止的轴对称颗粒系统的径向应力与轴向应力的比值

$$K_0 = \sigma_r / \sigma_z \quad (4)$$

是一个称作侧压力系数的重要工程参数^[15]. 对库仑角大约为 30° 左右的沙土材料, 利用库仑屈服条件可以知道侧压力系数应该在 $1/3 < K_0 < 3$ 范围内, 但其具体的取值则需要进行完整的应力分析计算. 因此, 本文的工作也可以看作一个理论计算侧压力系数的新途径.

2. 静止颗粒固体的非线性弹性理论

下面将对本文用来分析侧压力系数的弹性理论作一简单介绍, 有关它的详细内容可见文献 [10—14, 16]. 为了方便, 我们将用 $\Delta \equiv -u_{kk}$ 记作弹性应变张量的迹乘以 -1 , 用 $u_{ij}^0 = u_{ij} + \frac{\Delta}{3} \delta_{ij}$ 记作应变张量与迹无关的部分 (工程上称作偏应变), $u_s \equiv \sqrt{u_{ij}^0 u_{ij}^0}$ 是偏应变的大小. 显然 Δ 反映材料的体弹性应变, 而 u_s 反映材料的剪弹性应变的大小.

由于弹性应变 u_{ij} 是一小量, 我们可用级数展开的办法来得到弹性能 w 与它的函数关系. 为简单起见, 将考虑弹性应变足够的小, 使得在计算中只取展开的最低级项就能得到满足. 对于各向同性线性弹性材料, 这个展开是 Δ 和 u_s 的二次函数, 即 $w = B\Delta^2 + Au_s^2$, 其中 A, B 是与应变无关的系数. 它给出的是线性的应力-应变关系, 即弹性模量是材料常数的胡克定律 (3) 式.

颗粒物体的弹性应变也是一小量, 其弹性力学因此也可以用上述方法建立, 只是级数展开的首项次数更高, 从而给出的将是非线性的应力与弹性应变关系. 颗粒物体具有非线性弹性行为是由于颗粒间的接触力学性质造成的. 利用赫兹推导的接触力学公式容易理解这点. 赫兹计算了两个球状弹性固体在沿球心连线压力 F 作用下接触处的变形 h , 并得到 $F \propto h^{3/2}$ 或弹性能 $w \propto h^{5/2}$ 的结果 (参见文献 [8]). 这表明接触系统的弹性模量 K 不像普通固体那样与变形无关, 而是随着变形 h 的增加按 \sqrt{h} 的方式增长. 在这个提示下文献 [10, 11] 建议采用

$$w = A\sqrt{\Delta}(2\Delta^2/3 + u_s^2) \quad (5)$$

作为天然的干燥沙砾类颗粒物的弹性能表达式. (5) 式括号内相当于普通固体的二次方弹性能公式, 而 $\sqrt{\Delta}$ 则表示赫兹的“弹性模量比例于形变的 $1/2$ 次方”. 系数 A 与沙砾的密度 ρ 有关, 密度越高, 沙砾会表现得更坚硬, 相应的 A 值也就越大. 对孔隙比为 0.66 的沙砾, A 值大致为 5100 MPa, 对其他密度沙砾的 A 值可用一个基于声学测量得到的经验公式 (工程上常称为 Hardin-Richard 公式^[11]) 来推测. 把上面的弹性能对应变求导, 可得下列非线性应力-弹性应变的关系:

$$\sigma_{ij} = A\sqrt{\Delta}(\Delta\delta_{ij} - 2u_{ij})$$

$$+(A/2)(u_s^2/\sqrt{\Delta})\delta_{ij}. \quad (6)$$

如果其中的 λ 和 μ 取为

$$\mu = A\sqrt{\Delta}, \quad (7)$$

$$\lambda = A\sqrt{\Delta}[1 + u_s^2/(2\Delta^2)], \quad (8)$$

我们仍可把(6)式写成胡克定律(3)式的形式. 这样做的好处是传统弹性分析中的部分公式可得到保留, 但应注意的是, 对颗粒材料 λ 和 μ 不是常数, 而是弹性应变的函数.

上述非线性弹性方程具有一些与颗粒物质的基本行为相符合的性质, 而这些性质是传统的线性弹性理论中所不具备的. 比如(6)式给出的应力的剪切部分和压力部分的比值有一个不能超过的上限. 如果记

压力为 $p = \frac{\sigma_{ii}}{3}$, 应力张量与迹无关的部分为 $\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}$ (相当与工程上常称的偏应力), 剪应力的大小将是 $\sigma_s = \sqrt{\sigma_{ij}^0\sigma_{ij}^0}$, 有

$$\sigma_s/p \leq \sqrt{6/5}. \quad (9)$$

这说明处于静止状态的干燥沙粒只是在有了压力后才具有抵抗剪切的能力, 而且剪切力的大小不能超过一个与压力成正比的上限. 这一点与库仑最先提出的沙土的屈服概念是一致的, 也是颗粒物质一个最基本的特点. 应当指出的是, 不等式(9)与严格的库仑屈服条件不完全相同, 只是它的一个简化形式, 工程上常称作 Drucker-Prager 屈服条件或库仑屈服的 Drucker-Prager 形式^[15]相符. 进一步考察弹性能表达式(5)在大剪切力时的行为, 可发现它在

$$u_s/\Delta = \sqrt{10/3} \quad (10)$$

时从弹性应变的凸函数转变为弹性应变的凹函数. 这意味着系统将在此时发生力学失稳, 也就是物理上的热力学稳定条件开始失去, 系统因此不能再继续静止地存在下去. 显然这是非线性弹性理论对库仑屈服定律的一个非常自然的物理解释. 另外, 这个力学或热力学稳定条件还要求体弹性应变 Δ 不能为负值, 因为按照(10)式有 $\Delta = 0$ 时系统就开始变得不稳定. 这表明静止颗粒系统中任何位置都不能是压力为负值的拉伸状态, 也就是干燥的无黏性颗粒物质没有抵抗拉伸的能力. 非线性弹性理论对颗粒物质其他一些性质的解释也可参见文献[10—14, 16].

下面我们给出几点说明.

第一, 赫兹接触理论给出的只是两个弹性颗粒接触点周围的力学情况, 显然属于单个颗粒尺度上的微观力学信息. 而弹性能(5)式是宏观意义上的概念, 虽

然有些相似, 但它们之间并没有直接的数学演绎关系. 由于目前还远不能用普通线性弹性理论直接计算出由大量固体颗粒组成系统的全部微观力学情况, 人们无法从微观角度出发推导出宏观弹性能的表达式或验证(5)式的适用情况^[17], 因此我们只是先假设弹性能(5)式对干燥沙砾有效, 然后再考察其丰富的力学结果与这类材料的实验现象的符合情况, 从而推断该假设的适用性. 有意思的是, 在尝试将赫兹的微观接触力学向宏观的颗粒弹性理论作概念上的推广时, 除了以能量为基础的(5)式外, Boussinesq 曾提出过直接使胡克定律(3)式中的 λ 和 μ 按 $\sqrt{\Delta}$ 方式变化的推广办法^[18], 文献[19]的作者曾利用它分析过粮仓中的应力问题, 并称其为准弹性模型^[7]. 与(6)式比较, Boussinesq 的应力只反映了它的第一项结果, 缺了第二项. 值得强调的是, 正是这个与弹性能关系密切的附加项反映了颗粒材料几乎所有的力学特性, 而这些用普通线性弹性理论是无法解释的. 因此对颗粒力学而言, 这一项是重要的. 忽略该项应力分布将变得与线性弹性理论结果很相似, 得不到颗粒材料特有的力学行为. 另外, Boussinesq 应力不是一个完善的弹性理论, 因为它不支持存在弹性能 w 和(2)式. 从物理学角度看, 这也是不能令人满意之处.

第二, 本文出现的 u_{ij} 均指与弹性能有关的弹性应变, 在本文亦称为弹性应变. 对塑性可以忽略不计的普通固体材料, 可以通过对材料几何变形的测量得到它的实验值. 如果材料容易发生塑性变形, 测量的将是弹性应变和塑性应变之和, 即总应变. 颗粒物质属于很容易发生塑性变形的材料, 在大金属球在颗粒床中的下沉^[20]、探测棒在颗粒堆中作大幅度运动导致的颗粒运动^[21]等实验中, 观测到的变形几乎都是塑性的部分, 而不是本文的 u_{ij} . 通常弹性理论中提到的应力-应变关系, 指的是弹性应变, 不是总应变. 这一点在讨论颗粒力学时需特别注意. 为排除塑性部分的干扰, 颗粒固体弹性应变的实验观测一般需把样品在测量过程中发生的变形减小到 10^{-3} 至 10^{-5} 以下, 如 Kuwano-Jardine^[22]和 Wichtmann^[9]的实验. 文献[11]报道了 Kuwano-Jardine 实验数据与这里介绍的非线性弹性理论的部分对比情况, 结果还是比较满意的. 由于塑性的干扰, 用直接测量 u_{ij} 的方法判断应力公式(6)的适用性需要难度较大的精密实验. 在这样的情况下, 测量应力数据并与相应的计算结果比较将是一种有意义的补偿办法.

第三, 因为(5)式与弹应变的方向无关, 由它给出

的弹性理论只适用于局域颗粒呈完全无序结构的所谓内禀各向同性样品.原则上它不能用于那些圆珠颗粒且有明显有序排列现象发生的实验^[23].另外(5)式只考虑了无黏性颗粒固体情况.对有少许液体存在,通过表面张力在颗粒间产生微弱吸引力的情况(如湿沙),可在其中引入一个正比于体弹性应变的项来加以描述^[11].

第四,以上已指出,应力(6)式中的参数 A 与质量密度 ρ 有关.对密度不均匀的样品, A 值将相应地随空间位置而变化,应力也将受到影响.因此,如果知道了密度的空间变化方式,就可以定量地计算密度非均匀性对应力的影响.一个静止颗粒物体的密度分布是由它的制备过程所确定,它对应力的影响属于一类在文献和研究中经常被提及的“历史”效应^[20,21].分析由于密度不均匀对应力的影响这类“历史”效应显然需要实验测量样品的局域密度,但目前除文献^[24]报道过密度分布的测量(用 γ 射线透射的方法)外,我们还未见其他有关这方面的实验数据.作为密度不均匀影响颗粒堆应力的一个初步理论探讨,有人曾用线性弹性理论^[25]和非线性弹性理论^[12]对不同制备过程得到的颗粒堆的密度分布作了大胆猜测.计算结果表明,它们也能造成沙堆底部压力低陷的现象^[6,7].除密度不均匀外,颗粒物体中应力的“历史”效应还可能来自颗粒在一定程度上发生有序排列呈内禀各向异性等原因.

第五,在小于组成粒子邻近间距的微观尺度上,任何物体都有很强的离散行为,具体表现为一些物理量出现严重的空间不均匀、时间涨落等.一个宏观上电中性物体的电荷密度,在微观尺度上可能具有很大的空间不均匀.花粉在水中作布朗运动表明,由于水的离散性使其受到的力具有明显的时间涨落性质.物体表现的离散行为和连续介质行为属不同空间尺度上的现象,前者是微观尺度上的不均匀和涨落,后者是经过局域平均后物性表现的连续变化行为,它们并不矛盾.如描述水动力学的 Navier-Stokes 方程当然不包含布朗运动现象,但布朗运动肯定不否认它的正确性.类似地,颗粒材料的一些微观观测结果(如应力在邻近颗粒间距尺度上具有严重不均匀的力链现象),并不意味着连续介质观对它们就不适用了.这里需要注意的是,目前文献报道的不少颗粒实验工作中使用的样品或探测物的几何尺寸有时只是邻近颗粒间距的 20 倍以下,如文献^[20]中使用的金属球、文献^[21]中的探测棒和容器截面尺寸等.有些实验则完全是

微观力链的测量^[23]或者几乎是单个颗粒的流动效果(如细长管道颗粒流对沙堆的冲击效应^[26]),它们均在不同程度上看到了样品的离散行为.由此可推测,连续介质方程适用的空间精度应是邻近颗粒间距的 20—30 倍以上.有些二维模拟计算甚至宣称在邻近颗粒间距的三四倍时,就可以有宏观应力场的概念^[1].尽管这个具体尺寸目前还不十分清楚,但我们相信宏观物理变量的概念和相应的连续介质理论是存在的.

3. 应力和侧压力系数的弹性力学分析

在已知足够数目的边界条件情况下,可利用以上介绍的非线性弹性理论计算任意几何颗粒系统中的宏观静力分布.这里我们将对图 1 所示的轴对称系统进行理论分析.如果装置比较长,系统的中间离上下两端足够远的部分会由于粮仓效应进入饱和状态.如果在顶端施加与底部相同的压力 L , 我们可进一步忽略顶端和底部边界的影响,把整个环柱看作处于这个应力饱和状态,即环柱的应力和弹性应变只是径向距离 r 的函数,沿轴向是均匀的.这时我们需要处理的将是一个与 z 无关的 Couette 几何系统的应力分析问题.本文仅限于研究这一简单情况.另外我们还将忽略样品密度的不均匀性,即把 ρ 当做与位置无关的常数处理.

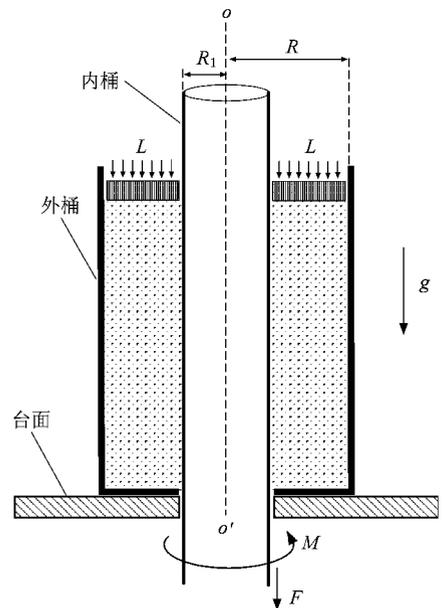


图 1 外桶和台面固定,对内桶施有力矩 M 和力 F 的静止颗粒环柱系统.颗粒环柱的加载 L 与其底部压力相同,整个环柱可近似看作处于应力沿对称轴 oo' 不变的饱和状态,重力加速度 g 与对称轴平行.

在柱坐标系下,上述情形的力平衡方程(1)可简化为

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} + r\sigma'_{rr} = 0, \quad (11)$$

$$2\sigma_{r\theta} + r\sigma'_{r\theta} = 0, \quad (12)$$

$$(r\sigma_{rz}) = r\rho g. \quad (13)$$

这里上标撇号表示对 r 求导.另外由于弹性应变只是 r 的函数,弹性位移矢量 U_r, U_θ, U_z 中的前两个必须与 z 无关,第三个分量 U_z 可以与 z 呈线性关系.由此可得到下列弹性应变公式:

$$\begin{aligned} u_{rr} &= U'_r, \\ u_{\theta\theta} &= \frac{U_r}{r}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$u_{zz} = -C;$$

$$u_{r\theta} = \frac{r}{2} \left(\frac{U_\theta}{r} \right)',$$

$$u_{rz} = \frac{1}{2} U'_z, \quad (15)$$

$$u_{\theta z} = 0.$$

这里 C 是与位置无关的常数.将这些应变分量代入胡克定律(3)式,得到应力张量的3个对角分量为

$$\sigma_{rr} = \lambda\Delta - 2\mu U'_r, \quad (16)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda\Delta - 2\mu U_r/r, \quad (17)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\Delta + 2\mu C. \quad (18)$$

这里的 Δ 是弹性应变张量迹的负值,

$$\Delta = -u_{rr} - u_{\theta\theta} - u_{zz}.$$

应力张量的3个非对角分量可通过积分方程(12),(13)和 $u_{\theta z} = 0$ 得到.我们有

$$\sigma_{r\theta} = M \frac{R^2}{r^2}, \quad (19)$$

$$\sigma_{rz} = F \frac{R}{r} - \frac{\rho g}{2r} (R^2 - r^2), \quad (20)$$

$$\sigma_{\theta z} = 0, \quad (21)$$

式中 M, F 是积分常数,其值可用施加于内圆桶的力矩和沿轴向单位长度的受力来确定.另外,从胡克定律可以得到非对角应力分量为

$$\sigma_{r\theta} = -2\mu u_{r\theta},$$

$$\sigma_{rz} = -2\mu u_{rz}.$$

将它们与(15)(19)(20)式相比较,我们有

$$\left(\frac{U_\theta}{r} \right)' = -\frac{MR^2}{\mu r^3}, \quad (22)$$

$$U'_z = -F \frac{R}{r\mu} + \frac{\rho g}{2r\mu} (R^2 - r^2). \quad (23)$$

将应力分量的表达式(16)(17)代入方程(11),可以得到下列位移分量 U_r 的方程:

$$(\lambda\Delta - 2\mu U'_r) - 2\mu(U_r/r) = 0. \quad (24)$$

最后利用(14)(15)和(22)(23)式可得

$$\Delta = -U'_r - U_r/r + C, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} u_s^2 = \frac{1}{2\mu^2} \left\{ \frac{M^2 R^4}{r^4} + \left[\frac{FR}{r} - \frac{\rho g}{2r} (R^2 - r^2) \right]^2 \right\} \\ + (U'_r)^2 + C^2 + \frac{U_r^2}{r^2} - \frac{1}{3} \left(U'_r + \frac{U_r}{r} - C \right)^2. \end{aligned} \quad (26)$$

无论是对 λ, μ 为常数的线性情况,还是 λ, μ 由(7)(8)式给出的非线性情况(11)~(26)式都是正确的.

由以上所述可知,分析 Couette 几何系统的静力学主要是解常微分方程(24)得出径向位移 U_r ,然后再将它代入(16)~(18)式中计算应力,为此需要知道 U_r 的边界条件.在本文中,我们仅考虑圆桶容器远比颗粒物质坚硬的情况.这时颗粒体在圆桶容器处没有径向位移,也就是当 $r = R$ 或 R_1 时,可以取

$$U_r = 0 \quad (27)$$

作为 U_r 的边界条件.另外,常数 C 可用样品上部加载力 L 的公式来确定,

$$L = 2\pi \int_{R_1}^R r\sigma_{zz} dr. \quad (28)$$

如果我们用 λ, μ 是常数的线性弹性理论来估算侧压力系数,方程(24)有通解

$$U_r = C_1 r + C_2/r.$$

边界条件(27)式要求这个通解中的常数 $C_1 = 0, C_2 = 0$.这时我们有

$$U_r = 0, \quad (29)$$

$$K_0 = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}. \quad (30)$$

因此无论系统的力矩 M 和力 F 如何改变,线性弹性理论总是给出一个恒定的、与位置 r 无关的侧压力系数 K_0 .

对于以上介绍的颗粒非线性弹性理论,如果除加载力 L 外没有其他作用力存在(即 $M, F, g = 0$),方程(24)和边界条件(27)式将给出解 $U_r = 0$.这时我们有 $\Delta = C$ 和 $u_s^2 = 2C^2/3$,即

$$\mu = A\sqrt{C},$$

$$\lambda = 4A\sqrt{C}/3.$$

因此应力

$$\sigma_{rr} = 4AC^{3/2}/3,$$

$$\sigma_{zz} = 10AC^{3/2}/3,$$

即侧压力系数 $K_0 = 0.4$.这个理论结果与工程上给

出的沙土材料侧压力系数的经验值相符.但是,如果不忽略重力($g \neq 0$)力矩 M 或力 F 样品中将出现随位置变化的径向位移 $U_r(r)$.这时 $K_0 \neq 0.4$,且偏离的程度与 M, F 和系统中的 R_1/R 有关.这显然是普通线性弹性理论中没有的非线性效应,可以用它来检验这个非线性弹性理论对颗粒静力的描述是否成功.

4. 数值计算结果

方程 (24) 是关于径向位移 U_r 的非线性常微分方程,可用常规算法(如 Runge-Kutta 法)数值求解.在本文计算中我们将计入重力,并取 $R/R_1 = 2$,参数 $C = (\rho g R/A)^{2/3}$.计算时内桶的外力 F 和力矩 M 只能在一定的范围内取值,如超出该范围,靠近内桶附近的剪弹性与体弹性应变之比会大于稳定条件(10)式所要求的 $\sqrt{10/3}$,系统将不能处于静力学稳定状态.因此,计算时应随时检查稳定条件,以保证计算得到的应力分布确实对应实验能观测到的静止颗粒体系.

计算中取轴向应变 C 固定,相当于限制了颗粒柱的高度,使其不随 F 或 M 的变化而改变,同时系统还保持着轴向的均匀性.在实验中能否做到这一点,尚待检验.如果颗粒柱的高度发生变化,为保证系统轴向均匀性,我们可通过仔细测量颗粒柱的高度变化或利用(28)式来获得 C 随 F 或 M 变化的关系.由于目前还没有这方面的实验数据,因此本文只限于讨论 C 固定这一简单情况.桶仓中饱和应力的数量级是 $\rho g R$,将它作为应力的单位,其对应的应变

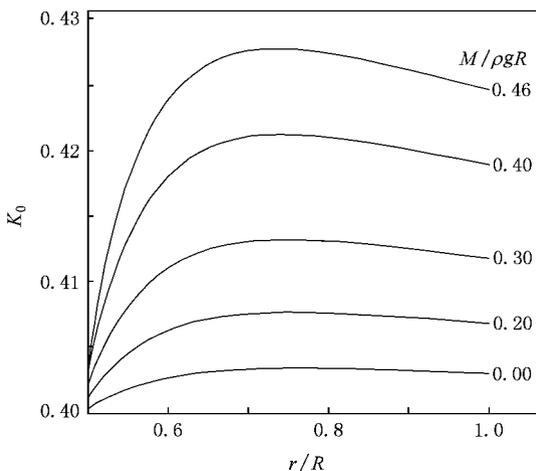


图2 不同力矩 M 时,侧压力系数 K_0 随 r 的变化

是 $(\rho g R/A)^{2/3}$.我们因此以 $C = (\rho g R/A)^{2/3}$ 为例给出计算结果.

图2所示为内桶外力 $F = 0$ 时侧压力系数 K_0 随 r 和力矩 M 的变化情况.从图2可以看出,侧压力系数 K_0 的值与 0.4 的偏差不是很大,约小于 6%.力矩 M 有增加侧压力系数的效果,而且外桶处的侧压力系数比内桶处大.这是两个实验可能观测到的非线性力学效应.另外, K_0 的最大值不是出现在边界处,而是在两桶之间实验无法看到的材料内部.

图3进一步给出与侧压力系数有关的径向压力 σ_{rr} 和轴向压力 σ_{zz} 随 r 和 M 的变化情况.理论预测两者均随力矩 M 的增加而增加.对此可作如下解释:采用的刚性圆桶边界条件(27)式限制了颗粒系统的侧向变形,并且力矩提高的是颗粒系统的剪切力.对变形受到限制的系统,这个压力随剪切力的增加而

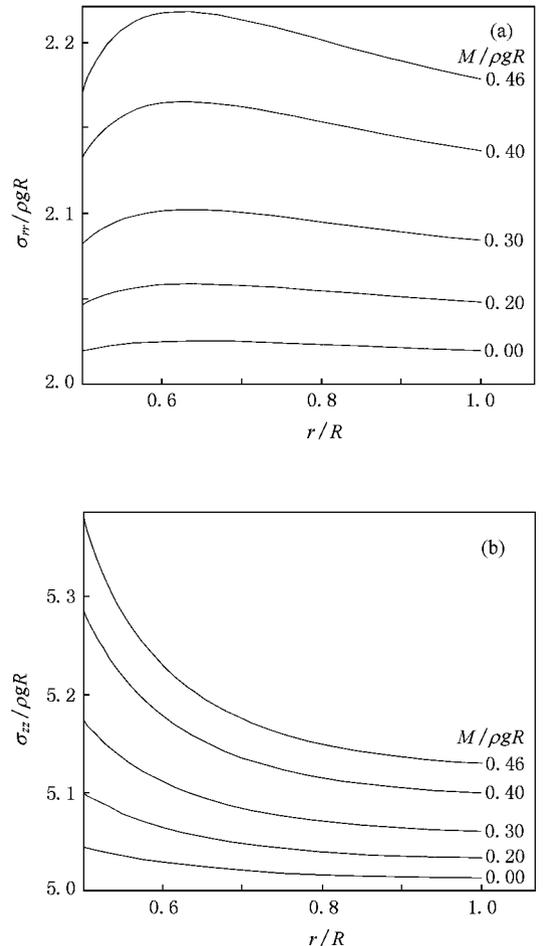


图3 不同力矩 M 时,径向压力 σ_{rr} 和轴向压力 σ_{zz} 随柱坐标 r 的变化 $F = 0, u_{11} = -(\rho g R/A)^{2/3}$. (a) σ_{rr} 随 r 的变化 (b) σ_{zz} 随 r 的变化

增加反映了颗粒物质特有的“剪胀”现象^[10]. 这意味着在剪力增加时, 材料本应侧向膨胀, 但由于受限制无法膨胀就表现为压力的增加. 另外计算的轴向压力 σ_{zz} 从内桶壁向外壁单调降低, 而径向压力 σ_{rr} 先增加再降低. 这一复杂的非线性行为大致可理解为圆柱的形状、边界条件和剪胀效应的综合结果. 对于圆柱形几何系统, 通常力矩 M 产生的剪形变随径向位置 r 的减小而增加(参见(26)式), 剪胀效应在内桶桶壁处最强, 其导致的应力增加现象也将相应地在内桶桶壁处最强. 但与轴向应力相比, 径向应力更多地受径向位移 U_r 的影响, 参见(16)(18)式. 由于边界条件的限制, U_r 沿半径的变化有峰结构(极大)的行为, 其导数沿半径方向减小, 从而存在径向应力沿半径方向增加的机制. 它与沿半径方向减小的剪

胀效应结合, 导致了图 3(a) 中 σ_{rr} 随 r 的变化曲线出现了峰结构的现象.

在图 2 和图 3 中 $M = 0.46\rho gR$ 大致是力矩在 $F = 0$ 时能取得的最大值, 如力矩超过此值热力学稳定条件(10)式将在内桶桶壁附近得不到满足, 系统无法继续保持静止状态.

因为材料内部的应力一般无法测量, 所以从实验角度看更感兴趣的是样品边界的受力情况. 图 4 给出了没有力矩和最大力矩两种情形下理论计算得到的径向压力和轴向压力在边界 R 和 R_1 处随力 F 的变化情况. 从图 4 可以看出, 无论力和力矩如何改变, 两边界处的径向压力几乎总是保持同样的值, 而两边的轴向压力在 M 或 F 较大时能出现百分之几的差异. 这一非线性效应也是实验可观测的现象. 径向应力在内桶桶壁和外桶壁处的值比较接近, 显然是由于它随 r 的变化行为具有峰结构现象(见图 3(a))所造成的.

5. 讨 论

人们很早就掌握了普通固体的宏观应力分析方法(线性弹性理论)和普通液体的宏观动力学理论(Navier-Stokes 方程). 但对像沙子这样的颗粒物质, 如何建立类似的理论是目前的一个前沿研究课题. 文献[10]认为, 经典弹性力学仍是颗粒固体的基本理论, 并且可以比较合适地选用(5)式作为其弹性能. 尽管这一观点已经比较成功地解释了不少颗粒物体特有的行为性质^[11-14, 16], 我们仍有必要了解它对不同几何形状和边界力的样品中应力情况的描述能力, 以便进一步考察其合理性和工程应用价值. 为此, 本文用它分析了图 1 所示的 Couette 几何系统的应力情况.

宏观方程组是与实验数据有密切联系的理论, 它能给出许多可通过直接测量来验证的计算结果, 从而在不同角度都处于可用实验监测的状况. 当然在与实验对比时, 我们需要注意理论方程的适用范围和前提. 就本文的计算结果而言, 其实验测量应注意下面一些问题. 首先, 颗粒样品的尺寸和探测装置的尺寸应比邻近颗粒间距大得多, 以保证所测量的确是宏观物理量. 第二, 尽量使用像天然干沙一类的颗粒物质, 以避免出现部分结晶等有序化现象. 第三, 将观测到的变形数据与理论结果对比时应特别注意区分弹性应变和塑性应变. 文献中提到的应变

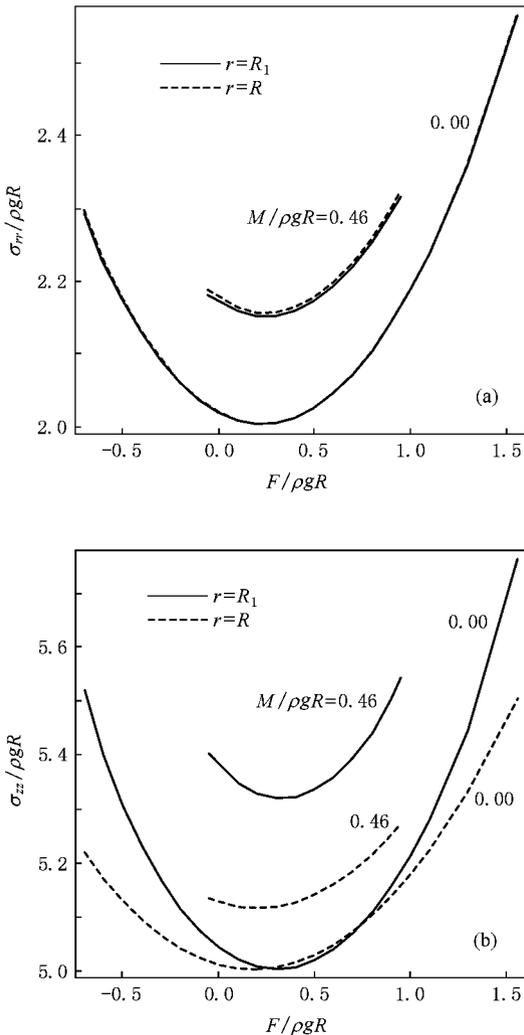


图 4 力矩 $M = 0$ 和 $0.46\rho gR$ 时, 内桶桶壁 ($r = R_1$) 和外桶桶壁 ($r = R$) 处的径向压力 σ_{rr} 和轴向压力 σ_{zz} 随力 F 的变化 $u_{zz} = -(\rho gR/A)^{2/3}$. (a) σ_{rr} 随 F 的变化 (b) σ_{zz} 随 F 的变化

大多是总应变,但赫兹考虑的是纯弹性固体间的接触,他的应力与应变的 1.5 次方成比例的著名关系中出现的是弹性应变,相应地,本文用到的幂律关系式(6)中出现的也是弹性应变,不是包含了大量塑性的总应变(如文献[20]测量的金属球在颗粒床中的下沉深度)。第四,样品环柱应尽量高些,以减小柱顶和柱底边界的影响。最后是如何保证样品密度的均匀性,这一点是最困难的。值得提到的是,除制备过程会对均匀性产生影响外,在对内桶施加和改变外力矩或外力时,亦有可能出现不同程度的密度变化。也许疏松样品会比致密样品的密度效应大,如这样我们就可以通过增加样品的密度来降低密度非均匀性的影响。当然,理论可以计算密度不均匀对应力的影响^[12,25],但由于缺乏样品密度分布的实验数据,这类理论分析往往含有一定的猜测成分。因此,我们

认为发展局域密度测量技术是研究与密度非均匀性有关的一类“历史”效应的关键。另外,本文计算结果显示的应力非线性效应都不是很大(约为百分之几),实验时应注意提高应力测量的精度。

6. 结 论

本文利用非线性颗粒弹性理论计算了 Couette 颗粒系统中应力的分布。研究发现,轴向压力和径向压力均随着内桶力矩 M 的增加而增大,力矩有增加侧压力系数的效果,且外桶桶壁处的侧压力系数比内桶桶壁处大。在样品的边界处,无论施加于内桶桶壁处的力 F 和力矩 M 如何改变,几乎保持同样的径向压力,而轴向压力在 F 或 M 较大时能出现百分之几的差别。这些计算结果将有助于今后的实验研究。

- [1] Goldenberg C, Atman A P F, Claudin P, Combe G, Goldhirsch I 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 168001
- [2] Garcia-Rojo R, Alonso-Marroquin F, Herrmann H J 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 54301
- [3] Garcia-Rojo R, Alonso-Marroquin F, Herrmann H J 2005 *Phys. Rev. E* **72** 41301
- [4] Ribiere P, Richard P, Philippe P, Bideau D, Delannay R 2007 *Eur. Phys. J. E* **22** 249
- [5] Bonneau L, Andreotti B, Clement E 2007 *Phys. Rev. E* **75** 16602
- [6] Lu K Q, Liu J X 2004 *Physics* **33** 629 (in Chinese) [陆坤权、刘寄星 2004 物理 **33** 629]
- [7] de Gennes P G 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** S374
- [8] Landau L D, Lifshitz E M 1986 *Theory of Elasticity* (Oxford: Pergamon Press)
- [9] Wichtmann T 2005 *Ph. D. Dissertation* (Bochum: Ruhr-Univ. Bochum)
- [10] Jiang Y M, Liu M 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 144301
- [11] Jiang Y M, Liu M 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 148001
- [12] Krimer D O, Pfitzner M, Braeuer K, Jiang Y M, Liu M 2006 *Phys. Rev. E* **74** 061310
- [13] Braeuer K, Pfitzner M, Krimer D O, Mayer M, Jiang Y M, Liu M 2006 *Phys. Rev. E* **74** 061311
- [14] Jiang Y M, Liu M 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 105501
- [15] Shen Z J 2000 *Theoretical Soil Mechanics* (Beijing: China Waterpower Press) (in Chinese) [沈珠江 2000 理论土力学(北京:中国水利水电出版社)]
- [16] Jiang Y M, Liu M 2007 *Eur. Phys. J. E* **22** 255
- [17] Wang H Y, Cao X P, Jiang Y M, Liu M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2784 (in Chinese) [王焕友、曹晓平、蒋亦民、刘佑 2005 物理学报 **54** 2784]
- [18] Boussinesq J 1873 *C. R. Hebd. Seances Acad. Sci.* **77** 1521
- [19] Evesque P P, de Gennes P G 1998 *C. R. Acad. Sci.* **326** 761
- [20] Peng Z, Hou M Y, Shi Q F, Lu K Q 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1195 (in Chinese) [彭政、厚美瑛、史庆藩、陆坤权 2007 物理学报 **56** 1195]
- [21] Kong W S, Hu L, Du X N, Zhang X G, Wang W M, Wu Yu 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2318 (in Chinese) [孔维姝、胡林、杜学能、张兴刚、王伟明、吴宇 2007 物理学报 **56** 2318]
- [22] Kuwano R, Jardine R J 2002 *Geotechnique* **52** 727
- [23] Miao T D, Yi C H, Qi Y L, Mu Q S, Liu Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4713 (in Chinese) [苗天德、宜晨虹、齐艳丽、慕青松、刘源 2007 物理学报 **56** 4713]
- [24] Philippe P, Bideau D 2003 *Europhys. Lett.* **60** 677
- [25] Xie X M, Jiang Y M, Wang H Y, Cao X P, Liu M 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2194 (in Chinese) [谢晓明、蒋亦民、王焕友、曹晓平、刘佑 2003 物理学报 **52** 2194]
- [26] Zhang H, Guo Y B, Chen X, Wang D, Chen P J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2030 (in Chinese) [张航、郭蕴博、陈骁、王端、程鹏俊 2007 物理学报 **56** 2030]

A nonlinear elastic analysis of static stress and lateral pressure coefficient for granular Couette systems *

Zheng He-Peng¹⁾ Jiang Yi-Min^{1) 2) †}

1) *College of Physical Science and Technology, Central South University, Changsha 410083, China*

2) *Institute of Theoretical Physics, Tuebingen University, Tuebingen 72076, Germany*

(Received 9 January 2008 ; revised manuscript received 15 May 2008)

Abstract

Whether or not the classical theory of elasticity is valid for static granular matter is a basic question of granular physics. We present in this work stress distributions inside hollow cylindrical (Couette geometry) specimens , calculated with the nonlinear elastic equations recently reported in literature. Most of these results can be experimentally measured , and are useful for clarifying the basic question by testing the applicability of the nonlinear elastic equations to granular matter. Moreover they can also be used for analyzing the lateral pressure coefficient of interest in soil engineering.

Keywords : granular matter , lateral pressure coefficient , nonlinear elasticity

PACC : 8270 , 4630P , 4610

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10674181).

† E-mail : jiangyimin@yahoo.cn