第 57 卷 第 12 期 2008 年 12 月
1000-3290/2008/57(12)/7955-08

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57, No.12, December, 2008

非奇异宇宙的理想气体自相似模型

赖小明[1)] 卞保民[1)†] 杨 玲[1)] 杨 娟[1)] 卞 牛[2)] 李振华[1)] 贺安之[1)]

1)(南京理工大学信息物理与工程系,南京 210094)

2)(江苏省东台中学,东台 224200)

(2008 年 2 月 14 日收到;2008 年 9 月 9 日收到修改稿)

通过引力作用下理想气体运动连续性方程的无量纲化,根据量纲理论 Π 定理,以尺度因子 $R(t)$ 为物理量统一度量基准,发现了引力作用下理想气体宇宙模型的自相似性和一系列 $R(t)$ 的解析解.基于 $R(t)$,可建立对应的、具有非欧氏几何特性的均匀膨胀时空坐标系 $S(t,\xi,\theta,\varphi)$,并获得一个密度 ρ 为常数、速度 u 为零、压强 p 不为零的理想气体宇宙解.在这个解的形式中,光子红移量 z 所表现的是光子传播距离 r,当红移量 z 较小时两者成正比(即哈勃定律).由均匀膨胀坐标系还可推导出 Robertson-Walker 度规($k=-1$),计算出标准宇宙模型的坐标空间膨胀率 H_{F} 与哈勃常数 H_0 的比值随 z 的增加而显著减小,该结果对应于高红移超新星的"宇宙加速膨胀"效应.

关键词:宇宙,自相似,哈勃定律

PACC:9880

1. 引 言

引力作用下的理想气体模型是研究宇宙运动时人们普遍采用的理论模型[1—3].1917 年,爱因斯坦提出了宇宙学原理和稳定理想气体宇宙的观点.1920 年前后,Slipher[4] 发现了河外星系光谱红移现象的普遍性.1929 年,哈勃根据对河外星系光谱红移普遍性的分析,提出了小红移条件下的哈勃定律[2,5].此后,哈勃定律被认为是现代宇宙学最重要的观测基础之一.在广义相对论基础上建立的 Friedmann 宇宙学模型[6] 用 Robertson-Walker(R-W)度规描述四维时空,并给出与 $k=\pm 1,0$ 对应的三种可能存在的空间尺度因子 $R(t)$ 类型[1].20 世纪 40 年代,Gamow 在哈勃定律的基础上进一步提出"宇宙大爆炸"观点[3],直到 1965 年该理论所预言的宇宙背景低温辐射被发现[1] 后,不断完善的"宇宙大爆炸"模型才逐渐被大部分学者接受.为了进一步探索研究"大爆炸早期甚高温条件下"的宇宙行为,人们将量子引力理论与广义相对论相结合,作为宇宙动力学特性研究的理论基础[2,7]."宇宙大爆炸"模型在被更多人接受的同时,由它推出的一些理论结论也受到了质疑.1982 年,Guth 提出"宇宙暴涨"模型,就是试图解决"宇宙大爆炸"模型的"视界问题"、"平直性问题"[2,7,8].1998 年,两个独立进行高红移 Ia 型超新星巡天的研究小组得出结论,这类超新星的亮度显著小于现有理论的预测值.这个结果被理解成"超新星距离显著大于理论计算值",并据此推断"宇宙正在加速膨胀",该结论目前已被普遍接受.由于"宇宙加速膨胀"的特性与 Friedmann 宇宙学的三种可能类型尺度因子均不相容[3],故有学者提出了"暗能量"[2,9] 概念,期望借助于新概念解释宇宙的"加速膨胀".暗能量概念的提出,被认为是 21 世纪物理学面临的具有重大意义的理论挑战[2,10].早在 20 世纪 40 年代末,Bondi,Goid 和 Hoyle 曾做过宇宙稳态模型的理论研究,并根据宇宙学原理和哈勃定律计算出对应的尺度因子[1] $R(t)=R_0\mathrm{e}^{H_0 t}$.由于该理论未能给出 $R(t)$ 的观测意义,也不能解释宇宙辐射背景现象,更因"稳定宇宙需要不断产生物质"这一结论得不到证实,宇宙稳态模型未被大多数学者接受[1],在一些专著中已不再提及该模型[2,7,11].

国内的学者主要在宇宙演化、暴涨模型、利用与物理量几何奇异性分布有关的多重分形探索宇宙奇异性、应用离散时空概念探索消除引力的奇异性等诸多方面进行一些有益的理论探索[12—20].这些研究的共同基础是"宇宙大爆炸"模型.国内也有些物理

† 通讯联系人.E-mail:Bianbaomin_56@yahoo.com.cn

学研究者不接受'宇宙大爆炸'概念,甚至对作为宇宙学研究基础的广义相对论时空概念持异议[21,22],他们的探索未见取得公认的重要进展.

应用自相似模型研究引力作用下的理想气体运动已有许多先例[23—26].本文研究了引力作用下理想气体一维不定常流力学运动微分方程的无量纲化自相似性[27],发现以径向空间相对坐标 $\xi = r/R(t)$、尺度因子 $R(t)$为自变量时,理想气体密度 $\rho(t,r)$、压强 $p(t,r)$和速度 $u(t,r)$函数必然存在分离变量形式的解

$$Y(t,r) = y(\xi)Y_1(R),$$

在此基础上推出 $R(t)$函数的系列解析解.进一步的理论研究表明,引力作用下理想气体运动(无突变边界条件)的自相似性[28]决定了存在密度 ρ 为常数、速度 u 为零、压强 p 不为零的理想气体宇宙解,且均匀宇宙中尺度因子 $R(t)$函数对应于原点处的光信号周期 T.研究结果表明,宇宙的自相似性能统一解释宇宙的均匀性、哈勃红移现象和小红移条件下的哈勃定律以及Ia高红移超新星的'宇宙加速膨胀"观测效应,并通过非线性坐标变换证明'宇宙大爆炸'模型原点奇异性源于数学形式.

2. 理想气体宇宙自相似性及尺度因子

在中心对称条件下,考虑引力作用的一维不定常理想气体微分方程组为[23]

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial r} + \rho\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2\rho u}{r} = 0,\\
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial p}{\rho\partial r} + \frac{GM}{r^2} = 0,\\
&\frac{1}{\rho^n}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{np}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t} - u\frac{np}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right) = 0.
\end{aligned}\tag{1}$$

这里 ρ,p,u 分别为密度、压强和速度函数,G 为引力常数,n 为多方指数,r 为气体元 ρ 中心到原点的空间距离,t 代表原点时钟,M 代表半径为 r 的球内气体质量,且满足方程

$$\frac{\partial M}{\partial r} - 4\pi\rho r^2 = 0.\tag{2}$$

取空间尺度因子 $R(t)$替换 t 作为自变量,并将方程(1)无量纲化,可得

$$\begin{aligned}
&\frac{r\dot{R}\,\partial\ln\rho}{Ru\,\partial\ln R} + \frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln r} + \frac{\partial\ln u}{\partial\ln r} + 2 = 0,\\
&\frac{r\dot{R}}{Ru}\frac{\partial\ln u}{\partial\ln R} + \frac{\partial\ln u}{\partial\ln r} + \frac{p}{\rho u^2}\frac{\partial\ln p}{\partial\ln r} + \frac{GM}{u^2 r} = 0,\\
&\frac{pu}{r\rho^n}\left(\frac{r\dot{R}}{Ru}\frac{\partial\ln p}{\partial\ln R} + \frac{\partial\ln p}{\partial\ln r} - n\frac{r\dot{R}}{Ru}\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln R} - n\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln r}\right) = 0,
\end{aligned}\tag{3}$$

式中 $\dot{R}$为时间导数.根据量纲理论[23],以尺度 R 为基准取物理度量单位

$$Y(R,t) = Y_1(R),$$

则新物理度量单位 $Y_1(R)$与 ξ 无关,方程(3)中的物理量可写成

$$\begin{aligned}
\xi &\equiv r/R,\\
\rho &\equiv g(r,R)\rho_1,\\
p &\equiv P(r,R)p_1,\\
u &\equiv v(r,R)u_1.
\end{aligned}\tag{4}$$

(4)式中 ξ 为空间相对坐标,无量纲函数满足

$$g(R,R) \equiv P(R,R,) \equiv v(R,R) \equiv 1.$$

再由量纲 Π 定理[23]可知,用 ξ 置换 r 作为自变量,(4)式中的密度、压强、速度函数具有如下形式:

$$\begin{aligned}
\rho &= g(\xi,1)\rho_1,\\
p &= P(\xi,1)p_1,\\
u &= v(\xi,1)u_1,
\end{aligned}\tag{5}$$

即用 ξ,R 为自变量时基本物理量具有分离变量的形式,引力作用下的理想气体一维不定常流运动具有自相似性.以 $Y_1(R)$为单位的相对量 $v(\xi)$,$P(\xi)$,$g(\xi)$与 R 无关.用 ξ,R 作为自变量后,微分方程(3)转变成[28]

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{dln}\rho_1}{\mathrm{dln}R} + (L-1)\frac{\mathrm{dln}g(\xi)}{\mathrm{dln}\xi} + \frac{\mathrm{dln}v(\xi)}{\mathrm{dln}\xi}L + 2L = 0,\\
&\frac{\mathrm{dln}p_1}{\mathrm{dln}R} - n\frac{\mathrm{dln}\rho_1}{\mathrm{dln}R} + (L-1)\times\left[\frac{\mathrm{dln}P(\xi)}{\mathrm{dln}\xi} - n\frac{\mathrm{dln}g(\xi)}{\mathrm{dln}\xi}\right] = 0,\\
&\frac{\mathrm{dln}u_1}{\mathrm{dln}R} + (L-1)\frac{\mathrm{dln}v(\xi)}{\mathrm{dln}\xi} + \frac{(\gamma-1)L}{2\varepsilon}\frac{\mathrm{dln}P(\xi)}{\mathrm{dln}\xi} + \frac{GM}{L\xi^3R\dot{R}^2} = 0.
\end{aligned}\tag{6}$$

方程(6)中的两个无量纲系数函数分别为

$$\begin{aligned}
L &= \frac{v(\xi)}{\zeta}\frac{u_1}{\dot{R}}\\
&= l(\xi)L_1,
\end{aligned}$$

$$\varepsilon = \frac{\rho u^2}{2} \Big/ \frac{p}{\gamma - 1} = \frac{g v^2}{P} \frac{\rho_1 u_1^2}{2} \Big/ \frac{p_1}{\gamma - 1} = \omega(\xi)\varepsilon_1 . \tag{7}$$

取

$$\frac{\mathrm{dln}\rho_1}{\mathrm{dln}R} = C_\rho ,\quad \frac{\mathrm{dln}u_1}{\mathrm{dln}R} = C_u ,\quad \frac{\mathrm{dln}p_1}{\mathrm{dln}R} = C_p ,$$

再用 $l(\xi)$代替 ξ 作自变量，由 (6)式可得

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{dln}\zeta}{\mathrm{dln}l} &= -\frac{\dfrac{nL^2}{1-L} + \dfrac{2\varepsilon(L-1)}{\gamma-1}}{\dfrac{C_p + 3nL}{1-L}L + \dfrac{2\varepsilon}{\gamma-1}\left(C_u + L - 1 + \dfrac{GM}{L\xi^3 R\dot{R}^2}\right)}, \\
\frac{\mathrm{dln}g}{\mathrm{dln}l} &= \frac{L}{1-L} - \frac{\dfrac{L}{1-L}\left(\dfrac{C_\rho}{L} + 3\right)\left[\dfrac{nL^2}{1-L} + \dfrac{2\varepsilon(L-1)}{\gamma-1}\right]}{\dfrac{C_p + 3nL}{1-L}L + \dfrac{2\varepsilon}{\gamma-1}\left(C_u + L - 1 + \dfrac{GM}{L\xi^3 R\dot{R}^2}\right)}, \\
\frac{\mathrm{dln}p}{\mathrm{dln}l} &= \frac{nL}{1-L} - \frac{\dfrac{nL}{1-L}\left(\dfrac{C_p}{nL} + 3\right)\left[\dfrac{nL^2}{1-L} + \dfrac{2\varepsilon(L-1)}{\gamma-1}\right]}{\dfrac{C_p + 3nL}{1-L}L + \dfrac{2\varepsilon}{\gamma-1}\left(C_u + L - 1 + \dfrac{GM}{L\xi^3 R\dot{R}^2}\right)}.
\end{aligned} \tag{8}$$

(8)式中的 M 项可由密度函数计算，

$$M = \int_0^r 4\pi g(\xi)\rho_1 r^2 \mathrm{d}r = 4\pi\rho_1 R^3 \int_0^\xi g(\xi)\xi^2 \mathrm{d}\xi = 4\pi\rho_1 R^3 m(\xi). \tag{9}$$

由(7)—(9)式可得

$$\frac{\mathrm{dln}\omega}{\mathrm{dln}l} = \frac{1-n}{1-lL_1} lL_1 + 2 + \frac{\left[C_p - C_\rho - 2 + (3n-1)lL_1\right]\left(\dfrac{nl^2L_1^2}{1-lL_1} + 2\omega\varepsilon_1 \dfrac{lL_1 - 1}{\gamma - 1}\right)}{(C_p + 3nlL_1)lL_1 + 2\omega\varepsilon_1 \dfrac{1-lL_1}{\gamma-1}\left(C_u + lL_1 - 1 + 4\pi G \dfrac{m}{l\xi^3}\dfrac{\rho_1 R^2}{L_1 \dot{R}^2}\right)}. \tag{10}$$

因 ω, l 仅仅是 ξ 的函数，方程(10)中的 $C_\rho, C_p, C_u, L_1, \varepsilon_1, \rho_1 R^2 \dot{R}^{-2}$只能是与 R 无关的常数. 由 C_u，L_1 为常数可计算出满足微分方程(10)的尺度因子函数

$$R(t,\tau) = R_0\left[(1 - C_u)H_0(t + \tau) + 1\right]^{\frac{1}{1-C_u}}, \tag{11}$$

式中 $R_0, H_0 \equiv \dot{R}_0/R_0$ 为初始参数. 函数 $R(t,\tau)$具有与时间起点无关的自相似性，

$$R(t,\tau) = R_t\left[(1 - C_u)H_t\tau + 1\right]^{\frac{1}{1-C_u}} = R_\tau\left[(1 - C_u)H_\tau t + 1\right]^{\frac{1}{1-C_u}}, \tag{12}$$

且

$$H_t \equiv \dot{R}_t/R_t ,\quad H_\tau \equiv \dot{R}_\tau/R_\tau ,$$

以及

$$\begin{aligned}
R_t &= R_0\left[(1 - C_u)H_0 t + 1\right]^{\frac{1}{1-C_u}}, \\
\dot{R}_t &= \dot{R}_0\left[(1 - C_u)H_0 t + 1\right]^{\frac{C_u}{1-C_u}}, \\
R_\tau &= R_0\left[(1 - C_u)H_0 \tau + 1\right]^{\frac{1}{1-C_u}}, \\
\dot{R}_\tau &= \dot{R}_0\left[(1 - C_u)H_0 \tau + 1\right]^{\frac{C_u}{1-C_u}}.
\end{aligned} \tag{13}$$

再由常数 C_ρ, C_p, C_u 可得

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \frac{\rho(R_0)}{R_0^{C_\rho}} R^{C_\rho}, \\
p_1 &= \frac{p(R_0)}{R_0^{C_p}} R^{C_p}, \\
u_1 &= \frac{u(R_0)}{R_0^{C_u}} R^{C_u}.
\end{aligned} \tag{14}$$

将(14)式代入(5)式，可得理想气体宇宙自相似解

$$
\begin{aligned}
\rho &= g(\xi)\,\frac{R^{C_\rho}}{R_0^{C_\rho}}\,\rho(R_0),\\
p &= P(\xi)\,\frac{R^{C_p}}{R_0^{C_p}}\,p(R_0),\\
u &= v(\xi)\,\frac{R^{C_u}}{R_0^{C_u}}\,u(R_0).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

(15)式中物理量为根据原点接收信号计算出来的"观测值".由 ε_1, $\rho_1 R^2 \dot{R}^{-2}$ 为常量,可得

$$
\begin{aligned}
C_\rho + 2C_u - C_p &= 0,\\
C_\rho - 2C_u + 2 &= 0.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

(16)式表明,均匀理想气体宇宙模型本质上只存在一个待定实数 C_u.根据原点处出现的由实物元发出的光信号周期反映的光传播距离 r 和 $R(t)$,定义实物元发光时的相对坐标 $\xi \equiv r/R(t)$.这样基于原点时钟 t 和尺度因子 R 可建立非欧氏均匀膨胀时空坐标系 $S_{C_u}(t,\xi,\theta,\varphi)$,它们是爱因斯坦曾经提及的"原点观测者参考系"[29],也是谢多夫-泰勒自相似模型中的'相对坐标'概念在引力作用理想气体宇宙中的推广.

原点处的光信号'集合'是反映实物互相作用的信息源泉.物理'观察'的意义是依时间顺序记录直接反映物体状态的光信号.观测者在此基础上研究信号之间的时间相关性,发现信号变化规律,理解信号所反映的不同光源相对于原点的距离信息,选用最佳数学形式表示光源的距离及其变化.尺度因子 $R(t) \propto \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,T$ 具有长度量纲,T 为原点时钟度量出的光源标识光谱信号 T_0 的周期,时间 t 为用原点时钟间隔表示的标识光子在均匀宇宙中的传播时间.球坐标系径向坐标 ξ 表示距离的形式为 $r = \xi R(t)$,基于 $R(t)$ 建立的时空坐标系的基本特征是"坐标空间膨胀率"H 处处相等,

$$
\begin{aligned}
H &\equiv \frac{\partial r}{r\partial t} = \frac{\mathrm{d}R}{R\mathrm{d}t}\\
&= \frac{\dot{R}}{R} = H(t).
\end{aligned}
\tag{17}
$$

与空间坐标无关的函数 $H(t)$ 是空间物质均匀分布的数学表现形式.由坐标微元表示的信号传输径向距离元

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}r &= R\mathrm{d}\xi + \xi \mathrm{d}R\\
&= R\mathrm{d}\xi + \xi\dot{R}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

显然,尺度 $R(t)$ 是单位坐标间隔距离的'数学形式",而不是距离 r 本身.

3. 理想气体宇宙恒定密度解与哈勃定律

微分方程(1)无量纲化后的分离变量解形式(5)和(14)式说明,原点处光信号集合所含有的信息能够反映引力作用下理想气体宇宙中的两类基本关系.第一类是单位坐标处($\xi = 1$)参考气元物理量 $Y_1(R)$ 随原点时间的变化关系,$Y_1(R)$ 是尺度因子 $R(t)$ 的函数.第二类是任意坐标处气元物理量相对于参考元物理量比值 $y(\xi)$,$y(\xi)$ 是坐标 ξ 的函数.

所有实物元都以光量子形式互相交换能量.记录原点处出现的光信号周期 T,在此基础上可获得相应光源空间顺序的信息,具有长度量纲的光波长 $\lambda \propto T$ 是原点处尺度因子的唯一选择.所以,均匀宇宙中观测点处出现的自由传播光波长满足

$$
\lambda(t,\tau) = \lambda_0\left[(1 - C_u)\frac{\dot{\lambda}_0}{\lambda_0}(t + \tau) + 1\right]^{\frac{1}{1-C_u}},
\tag{19}
$$

式中 λ_0 是光量子本征波长(与原子辐射周期对应),τ 为光子从光源到原点的传播时间,t 为该光子离开原点继续传播的时间.光波长数值上定义为电磁振动 2π 相位差对应的观测周期 T 和常数 $c \equiv 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ 的乘积,即 $\lambda \equiv Tc$.当选取 C 参数满足 $1 - C_u = 0$ 时,由(19)式可得

$$
\lambda(t,\tau) = \lambda_0 \mathrm{e}^{\frac{\dot{\lambda}_0}{\lambda_0}(t+\tau)}.
\tag{20}
$$

结合(17)式,可得此时的膨胀率 H_0 为常数(即哈勃常数),

$$
H_0 = \dot{\lambda}/\lambda = \text{const}.
\tag{21}
$$

并且由(16)式可得 $C_\rho = 0$,进而可得

$$
\rho = \rho_1 = \text{const}.
$$

即理想气体宇宙存在平均密度处处是常量的物理解.均匀宇宙中光传播速度处处相等,到达原点处的光子在由光源发出后的自由传播距离 $L = ct$,它与两个观测周期之比相对应.

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{c}{H_0}\ln\frac{T}{T_0}\\
&= \frac{c}{H_0}\ln\frac{\lambda}{\lambda_0}\\
&= L_{\mathrm{H}}\ln(1 + z),
\end{aligned}
\tag{22}
$$

式中 $L_{\mathrm{H}} \equiv c/H_0$ 即为哈勃距离,量级达 10^{25}—10^{26} m.(22)式表明,若宇观距离上超星系团相对于观测者

的空间距离不变,则会表现出超星系团的光谱宇宙红移量 z 不随观测者的时钟变化.当平均密度处处为常数时,气体元的平均速度为零,由方程(1)可直接得到压强满足

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}+\frac{4\pi}{3}G\rho^2 r=0.$$

这是非线性尺度因子的度量效应.由此可见,爱因斯坦的稳态宇宙具有可观测性[29],密度为定值的宇宙具有平坦的空间特性[2,30],只是借助于光信号'距离信息'建立的时空坐标系具有非欧氏几何性.当光谱的宇宙红移量 z 很小时,原点观测者描述的光子径向传播距离形式为

$$r\approx L_{\mathrm{H}}z. \tag{23}$$

(23)式即'光谱宇宙红移与距离成正比'的哈勃定律[1].如果将该红移当作低速条件下的多普勒效应[31],(23)式就被解释为'速度与距离成正比".对于近距离星系 $r\ll L_{\mathrm{H}}$,宇宙红移量极小,原点接收的光信号周期

$$T=T_0\mathrm{e}^{H_0 r/c}=T_0\mathrm{e}^{r/L_{\mathrm{H}}}\rightarrow T\cong T_0. \tag{24}$$

所以,宇观局域范围内光信号的宇宙红移量在目前的测量精度下难以被直接发现,此时宇宙时空坐标系将表现出欧氏几何性质.由(22)式可知,若用实物元先后到达两个相邻坐标处时'坐标点发出'的光信号红移差表示实物元的速度,则有

$$\begin{aligned}\bar{u}&=\frac{\Delta r}{\Delta t}\\&=\frac{c}{H_0}\frac{\Delta T}{T\Delta t}\\&=\frac{L_{\mathrm{H}}}{\lambda}\frac{\Delta\lambda}{\Delta t}.\end{aligned} \tag{25}$$

由此可知,若要由(25)式计算 $\bar{u}/c$,则对应的宇宙红移量$\frac{\Delta T/T}{\Delta t}$测量分辨率要优于 $H_0<10^{-17}$.所以,(25)式表示的速度在目前不是一个可测物理量.

4."宇宙大爆炸'模型及'宇宙加速膨胀'观测效应

根据黎曼几何学,在均匀膨胀时空坐标系中,与坐标微元对应的时空间隔元为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2&=-c^2\mathrm{d}t^2+(R\mathrm{d}\xi+\xi\dot{R}\,\mathrm{d}t)^2\\&\quad+r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)\\&=-(1-\xi^2\dot{R}^2/c^2)c^2\mathrm{d}t^2+R^2\mathrm{d}\xi^2\\&\quad+2\frac{\xi R\dot{R}}{c}\mathrm{d}\xi c\mathrm{d}t\\&\quad+\xi^2R^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2).\end{aligned} \tag{26}$$

取 $C_u=0$,尺度因子 $R_1=\dot{R}_0t+R_0$ 对应于一个膨胀速度 $\dot{R}$为定值的坐标系 S_1,下标'1'表示(11)式中幂指数为 1.取下列非线性时空坐标变换:

$$\begin{aligned}\xi'&=\frac{\xi\dot{R}_0}{\sqrt{c^2-\xi^2\dot{R}_0^2}},\\t'&=\frac{t+R_0/\dot{R}_0}{\sqrt{1+\xi'^2}}.\end{aligned} \tag{27}$$

将坐标变换代入(26)式,可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2&=-c^2\mathrm{d}t'^2+c^2t'^2\\&\quad\times\left[\frac{\mathrm{d}\xi'^2}{1+\xi'^2}+\xi'^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)\right].\end{aligned} \tag{28}$$

Friedmann 宇宙模型 R-W 度规时空坐标系 S_{F} 的四维间隔元为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2&=-c^2\mathrm{d}t_{\mathrm{F}}^2+R_{\mathrm{F}}^2\\&\quad\times\left[\frac{\mathrm{d}\xi_{\mathrm{F}}^2}{1-k\xi_{\mathrm{F}}^2}+\xi_{\mathrm{F}}^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)\right].\end{aligned} \tag{29}$$

由(29)式可知,取 $k=-1$ 的 R-W 度规与(28)式符合,且有 $R_{\mathrm{F}}=ct_{\mathrm{F}}$.这意味着能够从理想气体宇宙的引力理论推出 R-W 度规中 $k=-1$ 的尺度因子形式(即宇宙中理想气体空间分布的均匀性要求 $k=-1$).两组时空坐标的变换关系为

$$\begin{aligned}t_{\mathrm{F}}&=(t+R_0/\dot{R}_0)\sqrt{1-\xi^2\dot{R}_0^2/c^2}\quad(t\geqslant0),\\\xi_{\mathrm{F}}&=\xi\dot{R}_0/\sqrt{c^2-\xi^2\dot{R}_0^2}\quad(c/\dot{R}_0>\xi\geqslant0).\end{aligned} \tag{30}$$

由(30)式中的'时间变换"关系可以发现,R-W 度规中的'宇宙时间"t_{F} 并不与观测者的计量时钟直接对应.若以原点处零时刻发出的光信号传播距离 $R(t)=ct$ 为尺度因子,即 $\dot{R}_0=c$,$R_0=0$ 时,有

$$\begin{aligned}t_{\mathrm{F}}&=t\sqrt{1-\xi^2}\\&=t\sqrt{1-r^2c^{-2}t^{-2}}\quad(ct>r\geqslant0),\\\xi_{\mathrm{F}}&=\xi/\sqrt{1-\xi^2}\\&=\frac{r}{ct_{\mathrm{F}}}\quad(1>\xi\geqslant0).\end{aligned} \tag{31}$$

在任意时刻 t,S_1 系中 $\xi\rightarrow1$ 的坐标点都将对应于 $t_{\mathrm{F}}\rightarrow0$.这意味着宇宙中满足 $\xi\rightarrow1$ 条件的光信号无论从多远的空间距离 r 处传到原点,对时空坐标系 S_{F} 而言,这些光信号都与'宇宙时间'零点对应.

又尺度因子 $R_F = ct_F \to 0$，即上述信号的发出位置在“数学”上也被集中于 S_F 系的‘空间’原点处，这就是‘宇宙大爆炸’模型描述的‘宇宙起源状态”.可见“宇宙大爆炸’是 R-W 度规下对原点处出现的光信号集合‘重新’组合后的‘数学’形式.

在与 $C_u = 1$ 对应的坐标系 S_0 中，当 $H_0 t < 1$ 时，$R_H = R_0 e^{H_0 t} \approx R_0(1 + H_0 t) = R_1$.此时可计算出膨胀率 H_F 与哈勃常数 H_0、宇宙红移量 z 的关系

$$\begin{aligned} H_F &= \frac{\dot{R}_F}{R_F} \\ &= \frac{1}{(t + R_0/\dot{R}_0)\sqrt{1 - \xi^2 \dot{R}_0^2/c^2}} \\ &\approx \frac{H_0}{(1 + rH_0/c)\sqrt{1 - e^{-2rH_0/c} r^2 H_0^2/c^2}} \\ &= \frac{H_0}{[1 + \ln(1 + z)]\sqrt{1 - \left[\frac{\ln(1 + z)}{1 + z}\right]^2}} \\ &\leqslant H_0 . \end{aligned} \tag{32}$$

当 z 很小时，$H_F \approx H_0$. H_F/H_0 随 z 的增加持续减小，当 $z = 1$ 时，H_F/H_0 减小到 0.63.根据现有宇宙理论计算出来的膨胀率 H_F 会明显小于观测值 H_0，意味着同时计算出来的 Ia 型超新星距离也明显小于实际值(亮度比预期的小 15%).由此可推断，1998 年以来对高红移超新星观测发现的‘宇宙加速膨胀’效应[32—34]主要反映 H_F 与 H_0 差异.

基于理想气体宇宙运动自相似性建立的均匀膨胀时空坐标系与当今物理学流行的时空观不完全相同.这种时空概念，以根据实验定律构建的理想气体微分方程为理论基础，以统一量纲原则建立物理度量体系，以原点处出现的光信号周期为观测参量建立尺度因子概念，最终获得理想气体宇宙的运动规律，并对主要的‘宇宙膨胀’观测事实作出统一的解释.在此基础上还揭示了 R-W 时空度规的物理意义以及‘宇宙大爆炸’奇异性的数学意义.

5.结　论

引力作用下理想气体宇宙的运动具有严格的自相似性，这种自相似性使任何观测者都能根据观测光信号建立具有非欧氏几何特性的系列四维时空膨胀坐标系.该膨胀坐标系尺度因子 $R(t)$ 与可测量标识光子周期(波长)参数的对应，是宇宙具有自相似性的表现形式.非奇异性理想气体宇宙自相似模型与宇宙学原理以及哈勃红移、Ia 高红移超新星的观测结果符合，自相似模型与现有 Friedmann 标准宇宙模型相容(R-W 度规取 $k = -1$).“宇宙大爆炸’模型的原点奇异性源于 R-W 度规的特殊数学形式.理想气体宇宙自相似性模型表明，基于原点处出现的光信号来获得实物元的距离、速度信息，我们只能取非欧氏几何时空坐标系作为描述宇宙空间实物元之间相对关系的数学形式.

[1] Weinberg S 1980 Gravitation and Cosmology (Beijing: Science Press) pp468, 474, 503, 529, 542, 594, 720 (in Chinese) [温伯格 S 1980 引力论和宇宙论(中译本)(北京:科学出版社)第 468, 474, 503, 529, 542, 594, 720 页]

[2] Liang C B 2006 *Infinitesimal Geometry Guide and General Theory of Relativity* (Beijing: Science Press) pp358, 371, 380, 382, 402, 407, 412, 417 (in Chinese) [梁灿彬 2006 微分几何入门与广义相对论(北京:科学出版社)第 358, 371, 380, 382, 402, 407, 412, 417 页]

[3] Yu Y Q 2002 *Cosmophysics Lectures* (Beijing: Peking University Press) pp4, 89, 110 (in Chinese) [俞允强 2002 物理宇宙学讲义(北京:北京大学出版社)第 4, 89, 110 页]

[4] Slipher V M 1929 *Publ. Astron. Soc. Pacific.* **41** 262

[5] Hubble E 1929 *Proc. Natl. Acad. Sci.* **15** 168

[6] Friedmann A 1922 *Z. Phys.* **10** 377

[7] Yu Y Q 2001 *Thermal Big-Bang Cosmology* (Beijing: Peking University Press) pp20, 61, 113 (in Chinese) [俞允强 2001 热大爆炸宇宙学(北京:北京大学出版社)第 20, 61, 113 页]

[8] Mansouri R, Brandenberger R 2000 *Large Scale Structure Formation* (Kluwer: Academic Publishers) p169

[9] Schubnell M 2004 *AIP Conf. Proc.* **698** 323

[10] Lu T 2006 *Physics* **35** 261 [陆　2006 物理 **35** 261]

[11] Wright A 2005 *Year of Physics a Celebration* (Beijing: Peking University Press) p100 (in Chinese) [莱特 A 2005 爱因斯坦与物理百年(中译本)(北京:北京大学出版社)第 100 页]

[12] Feng B, Zhang X 2003 *Phys. Lett.* B **570** 145

[13] Huang Q G, Li M 2003 *J. High Ener. Phys.* **6** 14

[14] Piao Y S, Feng B, Zhang X 2004 *Phys. Rev.* D **69** 103520

[15] Li Z C 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 768 (in Chinese) [李宗诚 2003 物理学报 **52** 768]

[16] Li Z C 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 774 (in Chinese) [李宗诚 2003 物理学报 **52** 774]

[17] Chen G 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2971 (in Chinese) [陈　光 2005 物理学报 **54** 2971]

[18] Li M 2005 *Chin*. *J*. *Nature* (1) 15 (in Chinese) [李 淼 2005 自然杂志 (1) 15]

[19] Guo H Y, Huang C G, Tian Y, Xu Z, Zhou B 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 2494 (in Chinese) [郭汉英、黄超光、田 雨、徐 湛、周 彬 2005 物理学报 **54** 2494]

[20] Wu Y B, Lü J B, Li S, Yang X Y 2008 *Acta Phys*. *Sin*. **57** 2621 (in Chinese) [吴亚波、吕剑波、李 松、杨秀一 2008 物理学报 **57** 2621]

[21] Yang B L 2006 *Exploration into the Formal Logic and Material Foundation of Quantum Mechanics* (Ⅲ) (Shanghai: Shanghai Jiaotong University Press) p222 (in Chinese) [杨本洛 2006 量子力学形式逻辑与物质基础探析(Ⅲ)(上海:上海交通大学出版社) 第 222 页]

[22] Song W M, Yin H J, Zhang X J 2006 *The Symbolic Logic of Real-object and Matter Field* (Beijing: Science Press) p125 (in Chinese) [宋文淼、阴和俊、张晓娟 2006 实物与暗物的数理逻辑(北京:科学出版社) 第 125 页]

[23] Sedov L I 1982 *Similar Method and Dimensional Theory in Mechanics* (Beijing: Science Press) pp17, 20, 379, 410 (in Chinese) [谢多夫 JI H 1982 力学中的相似方法与量纲理论(中译本)(北京:科学出版社) 第 17, 20, 379, 410 页]

[24] Cahill M E, Taub A H 1971 *Commun*. *Math*. *Phys*. **21** 1

[25] Maeda H, Harada T 2001 *Phys*. *Rev*. D **64** 124024

[26] Maeda H, Harada T 2004 *Classical and Quantum Gravity* **21** 371

[27] Bian B M, He A Z, Li Z H, Yang L, Zhang P, Shen Z H, Ni X W 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 5534 (in Chinese) [卞保民、贺安之、李振华、杨 玲、张 平、沈中华、倪晓武 2005 物理学报 **54** 5534]

[28] Bian B M, Yang L, Zhang P, Ji Y J, Li Z H, Ni X W 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 4181 (in Chinese) [卞保民、杨 玲、张 平、纪运景、李振华、倪晓武 2006 物理学报 **55** 4181]

[29] Einstein A 1977 *Collected Papers of Albert Einstein* (Vol. 2) (Beijing: Commercial Press) pp85, 358, 584 (in Chinese) [爱因斯坦 A 1977 爱因斯坦论文集(第二卷) 许良英、范岱年编译(北京:商务印书馆) 第 85, 358, 584 页]

[30] Fan Z H 2005 *Physics* **34** 244 (in Chinese) [范祖辉 2005 物理 **34** 244]

[31] Einstein A 1976 *Collected Papers of Albert Einstein* (Vol. 1) (Beijing: Commercial Press) p418 (in Chinese) [爱因斯坦 A 1976 爱因斯坦论文集(第一卷) 许良英、范岱年编译(北京:商务印书馆) 第 418 页]

[32] Adams S 2006 *Twentieth-Century Physics* (Shanghai: Shanghai Science and Technology Press) p271 (in Chinese) [亚当斯 S 2006 20 世纪的物理学(中译本)(上海:上海科学技术出版社) 第 271 页]

[33] Riess A G, Filippenko A V, Challis P, Clocchiatti A, Diercks A, Garnavich P M, Gilliland R L, Hogan C J, Jha S, Kirshner R P, Leibundgut B, Phillips M M, Reiss D, Schmidt B P, Schommer R A, Smith R C, Spyromilio J, Stubbs C, Suntzeff N B, Tonry J 1998 *Astron*. *J*. **116** 1009

[34] Kuznetsova N, Barbary K, Connolly B, Kim A G, Pain R, Roe N A, Aldering G, Amanullah R, Dawson K, Doi M, Fadeyev V, Fruchter A S, Gibbons R, Goldhaber G, Goobar A, Gude A, Knop R A, Kowalski M, Lidman C, Morokuma T, Meyers J, Perlmutter S, Rubin D, Schlegel D J, Spadafora A L, Stanishev V, Strovink M, Suzuki N, Wang L, Yasuda N 2008 *Am*. *Astron*. *Soc*. **673** 981

Self-similarity model of nonsingular perfect gas universe

Lai Xiao-Ming[1)] Bian Bao-Min[1)†] Yang Ling[1)] Yang Juan[1)]
Bian Niu[2)] Li Zhen-Hua[1)] He An-Zhi[1)]

1)(*Department of Information Physics and Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing* 210094, *China*)

2)(*Dongtai High School of Jiangsu Province, Dongtai* 224200, *China*)

(Received 14 February 2008; revised manuscript received 9 September 2008)

Abstract

The present paper investigates the dimensionless dynamical continuity equation of perfect gas motion in gravitational field. Based on Π axiom of dimensional theory, self-similarity of perfect gas universe with gravity and a series of exact solutions of $R(t)$ are deduced. Based on $R(t)$, a non-Euclidean homogeneous space-time coordinate system $S(t,\xi,\theta,\varphi)$ can be established. A perfect gas universe solution can be worked out, in which there is a constant density ρ, the velocity u value being zero, and there is a nonzero pressure p. In this solution, the red shift z represents the propagating distance r. When z is much less than 1, it is proportional to r (Hubble's law). The Robertson-Walker ($k=-1$) metric of normal universe model is obtained from homogeneous expanding coordinates, and the ratio of expanding rate H_F to the Hubble constant H_0 decreases notably as the value of z rises. It corresponds to the "universal accelerated expansion" observed in the spectrum of a high-red-shift supernova.

Keywords: universe, self-similar, Hubble's law

PACC: 9880

† Corresponding author. E-mail: Bianbaomin_56@yahoo.com.cn