

非协调数值流形方法的稳定性和收敛性分析^{*}

魏高峰^{1)†} 李开泰¹⁾ 冯 伟³⁾ 高洪芬³⁾

1) (西安交通大学理学院, 西安 710049)

2) (山东轻工业学院, 机械工程学院, 济南 250353)

3) (上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(2006 年 12 月 30 日收到, 2007 年 5 月 18 日收到修改稿)

在流形元的基础上, 提出了非协调数值流形方法. 非协调数值流形方法的优点是在不增加广义节点自由度的前提下, 大大提高数值流形方法的计算精度和计算效率. 利用内部自由度静力凝聚处理, 推导了消除内参后的单元应变矩阵和单元刚度矩阵. 在 Hilbert 空间内, 从最小势能原理出发对非协调数值流形方法的稳定性和收敛性进行了分析和讨论, 得到了保证非协调流形元解唯一存在和收敛的基本条件, 完善了非协调数值流形方法的理论基础. 数值试验表明, 新单元构造过程简单, 有较高的精度, 从而证明了本方法的可行性.

关键词: 数值流形方法, 非协调元, 稳定性分析, 收敛性分析

PACC: 0200, 0340D, 4630C

1. 引言

数值流形方法是利用现代数学中流形分析的有限覆盖技术建立起来的一种新的数值分析方法^[1,2]. 经过 10 多年的发展和工程应用, 已逐渐成为分析复杂工程结构的有效手段^[3-5]. 与传统的有限元方法不同, 它的主要优点是通过有限覆盖技术, 引入数学与物理双重网格, 完成对求解域的剖分, 即在数学网格上进行插值函数构造, 物理网格上完成系统能量泛函积分运算. 因此, 插值子域的形状不会因为非连续界面的存在变得不规则. 对于连续与非连续问题, 插值子域总是规则的, 从而使得连续与非连续问题的插值构造相统一. 同时由于插值域与积分域是分离的, 可放松对积分子域即单元形状的限制, 使得单元的形状可以很不规则.

在数值流形方法中, 由 4 个节点覆盖形成的二维流形单元, 覆盖权函数由四边形等参元函数来表示, 流形单元上的总体位移函数由节点覆盖位移函数决定. 对零阶覆盖位移函数和一阶覆盖位移函数, 单元总体位移函数包含的完全多项式分别只是一次的和二次的, 就构成决定单元精度的完全多项式而言, 单元总体位移函数中非完全的高次项一般

说来非但对改善精度不起作用, 而且还可能起相反的作用. 上述问题对三维流形单元来说将更突出. 为克服上述缺点, 作者在单元总体位移场上附加非协调高阶位移基本项, 使单元位移函数趋于完全, 构造了非协调流形单元来改善流形单元的计算精度和计算效率^[6,7].

本文在 Hilbert 空间内, 从最小势能原理出发对非协调数值流形方法的稳定性和收敛性进行了分析和讨论, 得到了保证非协调流形元解唯一存在和收敛的基本条件, 完善了非协调数值流形方法的理论基础.

2. 非协调流形单元的构造

在单元总体位移函数中附加内部无节点的位移项, 使单元位移函数中的二次项或三次项趋于完全, 从而达到提高精度的目的. 附加项在三维数学覆盖的 8 个节点上都取零值, 即它对节点位移没有影响, 而只对单元内部的位移起调整作用. 确定附加项前的待定系数与单元边界上的节点无关, 这种仅在单元内部定义的待定参数称为内部自由度.

设定义在物理覆盖 U_i 上的覆盖位移函数 u_i 可以表示为如下的级数形式:

^{*} 山东省优秀中青年科学家奖励基金(批准号: 2007BS04045)资助的课题.

[†] E-mail: weigaofeng@126.com

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{S} \cdot \mathbf{D}_i, \quad (1)$$

式中 $\mathbf{u}_i = \{u_i(x, y, z) \quad v_i(x, y, z) \quad w_i(x, y, z)\}^T$, $\mathbf{S}$ 是基本级数, $\mathbf{D}_i$ 是物理覆盖自由度.

利用权函数 N_i 将覆盖函数 $\mathbf{u}_i$ 在单元上加权求和, 可形成协调流形单元上的总体位移函数

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \sum_{i=1}^q N_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^q N_i (\mathbf{S} \cdot \mathbf{D}_i) \\ &= \sum_{i=1}^q (N_i \cdot \mathbf{S}) \mathbf{D}_i = \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}, \end{aligned} \quad (2)$$

式中, q 为单元覆盖节点数, 对四面体单元 $q=4$, 六面体单元 $q=8$, 位移矩阵 $\mathbf{N} = [N_1 \mathbf{S} \quad N_2 \mathbf{S} \quad \dots \quad N_q \mathbf{S}]$, 自由度向量 $\mathbf{D} = [\mathbf{D}_1 \quad \mathbf{D}_2 \quad \dots \quad \mathbf{D}_q]^T$.

设单元位移场由协调和非协调两部分组成, 包含附加无节点位移项的单元位移函数表示如下:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{D}^e + \bar{\mathbf{N}} \boldsymbol{\lambda}^e, \quad (3)$$

式中第一项为协调位移函数, 第二项为非协调位移函数, $\boldsymbol{\lambda}^e$ 为内部自由度, 代入几何关系得到

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{D}^e + \bar{\mathbf{B}} \boldsymbol{\lambda}^e, \quad (4)$$

其中 $\mathbf{B}$ 为协调部分的应变矩阵, $\bar{\mathbf{B}}$ 为非协调部分的应变矩阵, 将 $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 等代入势能泛函, 并按照通常的步骤, 泛函变分为零可以得到

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{DD}^e & \mathbf{K}_{D\lambda}^e \\ \mathbf{K}_{\lambda D}^e & \mathbf{K}_{\lambda\lambda}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{D}^e \\ \boldsymbol{\lambda}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_D^e \\ \mathbf{P}_\lambda^e \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

其中

$$\mathbf{K}_{DD}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV, \quad (6a)$$

$$\mathbf{K}_{D\lambda}^e = (\mathbf{K}_{\lambda D}^e)^T = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \bar{\mathbf{B}} dV, \quad (6b)$$

$$\mathbf{K}_{\lambda\lambda}^e = \int_{V^e} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{E} \bar{\mathbf{B}} dV, \quad (6c)$$

$$\mathbf{P}_D^e = \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{f} dV + \int_{S_\sigma^e} \mathbf{N}^T \mathbf{T} dS, \quad (6d)$$

$$\mathbf{P}_\lambda^e = \int_{V^e} \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{f} dV + \int_{S_\sigma^e} \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{T} dS, \quad (6e)$$

式中 $\mathbf{E}$ 为弹性矩阵, $\mathbf{f}$ 为体力, $\mathbf{T}$ 为面力, 从 (5) 式的第二式可以解出

$$\boldsymbol{\lambda}^e = (\mathbf{K}_{\lambda\lambda}^e)^{-1} [\mathbf{P}_\lambda^e - \mathbf{K}_{\lambda D}^e \mathbf{D}^e], \quad (7)$$

利用 (7) 式消去 (5) 式中的内部自由度 $\boldsymbol{\lambda}^e$, 得到凝聚后的非协调流形单元求解方程

$$\mathbf{K}^e \mathbf{D}^e = \mathbf{P}^e, \quad (8)$$

其中

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{K}_{DD}^e - \mathbf{K}_{D\lambda}^e (\mathbf{K}_{\lambda\lambda}^e)^{-1} \mathbf{K}_{\lambda D}^e, \quad (9a)$$

$$\mathbf{P}^e = \mathbf{P}_D^e - \mathbf{K}_{D\lambda}^e (\mathbf{K}_{\lambda\lambda}^e)^{-1} \mathbf{P}_\lambda^e. \quad (9b)$$

此即包含附加内部位移项的单元刚度矩阵和载荷列阵, 具体表达式见文献 [6]. 在施加边界条件时, 由于非协调项的引入使边界条件不满足归一性, 因此, 可不考虑非协调项对边界的影响.

3. 非协调流形元稳定性分析

3.1. 能量不等式与椭圆条件

在域 V 内定义矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的内积为

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int_V \mathbf{a}^T \mathbf{b} dV \quad (10)$$

定义矢量模为

$$\|\mathbf{a}\| = (\mathbf{a}, \mathbf{a})^{1/2} \quad (11)$$

正定性是模的基本性质. 对弹性力学三维问题, 记

$$\text{位移矢量: } \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \{u_i\}, i=1, 2, 3 \quad (12)$$

$$\text{应变-位移关系 } \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u}, \quad (13)$$

$$\text{应力-应变关系 } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (14)$$

若记数值流形方法离散体系中流形单元体积 (子域) 为 V^e , 则系统域为 $V = \bigcup_e V^e$. 定义在 V^e 和 V 内的位移函数集合分别记之为 $\mathcal{H}(V^e)$ 和 $\mathcal{H}(V)$.

对采用连续分片试解的数值流形方法而言, 确保有界势能泛函以及位移等收敛于精确解的条件是泛函的二次型部分是椭圆的, 即系统变形能

$$\mathcal{U}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \geq \gamma \|\mathbf{u}\|^2 \quad (\gamma \text{ 为正常数}) \quad (15)$$

如果上面的泛函椭圆条件成立, 则相应的广义变分解唯一存在. 因此研究变分近似解稳定性的关键是要验证泛函的椭圆性^[8].

首先, 对于位移试解 $\mathbf{u} \in C^0(V)$ 的协调元, 其位移和应变对系统全域平方可积, 因此在离散化的过程中, 系统变形能的椭圆性不会破坏. 相应地, 对实施了几何边界约束之后的流形单元集合体系而言, 系统刚度矩阵是正定的, 因此协调元解的稳定性是有保证的.

另一方面, 当非协调位移试解 $\mathbf{u} \notin C^0(V)$ 被采用时, 离散体系的变形能可表示为

$$\int_V \mathbf{A}(\mathbf{u}) dV = \mathcal{U}(\mathbf{u}) = \mathcal{U}_*(\mathbf{u}) + \mathcal{A}(\mathbf{u}) \quad (16)$$

其中

$$U_*(u) = \sum_e \int_{V^e} A(u) dV \quad (17)$$

为各单元变形能之和, $\Delta(u)$ 为由于 u 对相邻单元的间断性而引起的单元交界面上的奇异积分总和, $A(u)$ 为变形能密度, $\Delta(u)$ 项的出现将破坏系统泛函 $U(u)$ 的有界性和椭圆性. 按照非协调元理论^[9,10], 如果近似地以 $U_*(u)$ 取代原泛函 $U(u)$ 进行流形元分析, $\Delta(u)$ 项对变形能的干扰将不再出现. 问题的复杂性在于, 近似泛函 $U_*(u)$ 并不一定是椭圆形的, 因此非协调元解的稳定性受到了威胁. 再者, 即使非协调元的解唯一存在, 它也未必能够收敛且收敛于精确解. 实际上, 在采用 $U_*(u)$ 的同时必须考虑某些额外的条件才能保证非协调元的稳定性.

3.2. 非协调流形元的弱联接条件

作为非协调离散模型, 其试解在相邻单元之间总是含有某种形式的间断性. 但是为了保证非协调元解的稳定性, 单元间的函数间断性必须有一定的限制.

定义 为阻止相邻单元间可能发生的相对刚体运动而必须施加于单元界面上的最少的节点参数联系, 称之为非协调流形元的弱联接条件.

定理 1 对于一个无刚体位移的非协调元离散体系而言, 其非协调元的解唯一存在.

对此, 只要证明该非协调元体系的总变形能的椭圆性即可. 由弱联接条件的定义, 满足了该条件的非协调元体系中各单元的刚体位移和整个体系的刚体位移是一致的, 体系无刚体运动, 每一个单元也无刚体运动. 但是对单元 e 而言, 应变模 $\|\varepsilon\|_e$ 也是 u 的模, 以致椭圆条件对单元 e 也成立, 即存在一个与单元形状无关的正常数 c_e , 使得

$$\forall u \in \mathfrak{N}(V^e), \int_{V^e} A(u) dV \geq c_e \|u\|_e^2, \quad e = 1, 2, \dots, n \quad (18)$$

式中 n 为系统中的单元个数, 对逐个单元叠加上式得

$$U_*(u) = \sum_e \int_{V^e} A(u) dV \geq \alpha \sum_e \|u\|_e^2 \quad (19)$$

其中 $\alpha = \min(c_e, e = 1, 2, \dots, n)$ 为与离散网格形状无关的正常数. 注意到(19)式右端对 u 恒为正定

$$\left(\sum_e \|u\|_e^2 \right)^2 = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ (在 } V^e \text{ 内 } e = 1, 2, \dots, n) \quad (20a)$$

$$\Leftrightarrow u = 0 \text{ 在 } V \text{ 内} \quad (20b)$$

因此 $\left(\sum_e \|u\|_e^2 \right)^{1/2}$ 在系统域 V 上构成 u 的模. 所以(19)式可进一步表示为

$$\forall u \in \mathfrak{N}(V), U_*(u) = \sum_e \int_{V^e} A(u) dV \geq \beta \|u\|^2, \quad (21)$$

其中 β 是与网格形状无关的正常数. 不等式(21)表明: 具有弱联接的非协调元体系的变形能是椭圆的, 因此非协调元的解唯一存在.

3.3. 内参型非协调流形元的稳定性

内参型非协调流形元的单元试解由两部分组成, 即

$$u = u_q + u_\lambda, \quad (22)$$

其中

$$u_q = \sum_{i=1}^q N_i u_i = \sum_{i=1}^q N_i (S \cdot D_i) = N_q \cdot D \quad (23)$$

为单元位移函数, q 为单元覆盖节点数, D 为单元覆盖节点的广义自由度, 我们约定 u_q 满足完备性要求, 能反映单元的全部刚体位移和常应变状态. 在单元界面 S_n 上, u_q 可以是连续的, 也可以是非连续的, 但它至少必须是满足弱联接条件的. 另一方面, 单元内位移 $u_\lambda = N_\lambda \lambda$ 由单元内部位移参数 λ 定义, 对相邻单元而言, 它通常是非协调的, 而且不含刚体位移. 对这类内参型非协调元, 相应于(22)式, 单元应变可记为

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_q + \varepsilon_\lambda \\ &= L(N_q \cdot D) + L(N_\lambda \lambda) \\ &= B_q D + B_\lambda \lambda, \end{aligned} \quad (24)$$

式中 L 为微分算子, B_q, B_λ 为应变矩阵. 对此有下面定理:

定理 2 无刚体运动的内参型非协调流形元体系的解的唯一存在性由下列应变基独立条件保证:

$$\begin{aligned} B_q &= [B_{q1} \ B_{q2} \ \dots] \text{ 与} \\ B_\lambda &= [B_{\lambda1} \ B_{\lambda2} \ \dots] \text{ 线性独立.} \end{aligned} \quad (25)$$

为了把椭圆条件(21)应用于内参型非协调元, 首先必须验证在采用组合试解(22)的情况下, 单元应变模 $\|\varepsilon\|_e$ 还是不是 u 的模, 如果是, 则应有

$$\forall u \in \mathfrak{N}(V^e), \|\varepsilon\|_e = 0 \Rightarrow u_q = 0 \text{ 且 } u_\lambda = 0. \quad (26)$$

注意到在条件(25)下, ε_q 与 ε_λ 线性独立, 以致

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_e = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_q = \mathbf{L}u_q = 0 & \forall u_q \in \mathfrak{N}(V^e) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_\lambda = \mathbf{L}u_\lambda = 0 & \forall u_\lambda \in \mathfrak{N}(V^e) \end{cases} \quad (27)$$

由于 u_q 满足弱联接条件,体系无刚体位移,单元也无刚体位移,由(27)式的第一式导致 $u_q = 0$.此外,由于 u_λ 不含刚体位移,由(27)式第二式导致 $u_\lambda = 0$,于是构模条件(26)成立.

反之,若两类应变基函数线性相关,例如当 $B_{\lambda i} + aB_{qj} = \alpha$ (a 为常数)时,由 $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_e = 0$ 得参数关系 $a\lambda_i = D_j$.通常 $\lambda_i, D_j \neq 0$,这时

$$u_\lambda = N_{\lambda i}\lambda_i \neq 0, u_q = N_{qj}D_j \neq 0, \quad (28)$$

构模条件(26)式将不再成立.

以上证明了在条件(25)下,内参型非协调流形元的应变模 $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_e$ 是 u 的模,因而椭圆条件对单个元成立.也即在应变基独立条件下,内参型非协调流形元体系保留了变形能的椭圆性,相应的离散解唯一存在.

4. 非协调流形元收敛性分析

发展非协调数值流形方法的一个关键问题是变分解的收敛性问题. Babuska^[11]把广义变分原理化为数学上的鞍点问题即泛函的极大极小值问题,提出了数值方法的收敛准则即 B-B 条件. B-B 条件是关于变分解的理论基础,是非协调元收敛的充分必要条件,对此已有一些严格的数学理论和各种关于非协调元的数值检验方法^[12-17].由于这些理论涉及抽象的概念和复杂的分析,使用这一充分必要条件去考察数值流形方法是比较困难的.为此,本文用了一系列概念鲜明、可靠实用的力学原则,对非协调数值流形方法解的收敛性进行了讨论.

对基于最小势能原理的数值流形方法,离散体系的势能泛函可表示为各单元势能之和,即

$$\Pi_p = \sum_e \Pi_p^e \\ = \sum_e \left[\int_{V^e} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T E \boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\mathbf{f}}^T \mathbf{u} \right) dV - \int_{S_\sigma^e} \bar{\mathbf{T}}^T \mathbf{u} dS \right] \quad (29)$$

其中单元应变 $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}u$, $\bar{\mathbf{f}}$ 和 $\bar{\mathbf{T}}$ 分别为流形单元 V^e 内和单元边界 S_σ^e 上的已知分布载荷.

如前所述,在非协调数值流形方法中仍可按(29)式进行离散分析.这时,为了保证解的稳定性,非协调元必须满足弱联接条件和应变基独立条件.但是非协调元解的唯一存在并不能保证它一定收敛

于真解.为了保证解的收敛性,必须对单元的非协调试探函数作进一步的限制,现分析如下.

记单元位移试解

$$u = u^0 + u^\Delta, \quad (30)$$

其中 u^0 为试解的协调部分, u^Δ 为非协调部分.我们约定,系统的几何边界条件已由单元位移函数 u^0 实施,而且边界 S_σ^e 上的已知表面力 $\bar{\mathbf{T}}$ 按位移 u^0 的位移函数 T_q 化为等效节点载荷,这相当于以式 $\int_{S_\sigma^e} \bar{\mathbf{T}}^T u^0 dS$ 代替了(29)式中的表面力项.于是,将

(30)式引入(29)式,再利用此非协调系统势能泛函的驻值条件可得下列变分方程

$$\begin{aligned} \delta \Pi_p(u^0, u^\Delta) &= \sum_e \int_{V^e} -(\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{f}})(\delta u^0 + \delta u^\Delta) dV \\ &+ \sum_n \int_{S_{ab}} (\mathbf{T}^{(a)} + \mathbf{T}^{(b)})^T \delta u^0 dS \\ &+ \sum_e \int_{S_\sigma^e} (\mathbf{T} - \bar{\mathbf{T}})^T \delta u^0 dS \\ &+ \sum_e \oint_{\partial V^e} \mathbf{T}^T \delta u^\Delta dS = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

其中 $\boldsymbol{\sigma} = E\boldsymbol{\varepsilon}$ 为单元应力, $\mathbf{T} = n\boldsymbol{\sigma}$ 为单元表面力, $S_{ab} = V_{(a)}^e \cap V_{(b)}^e$ 为任一对相邻单元的交界面.注意到虚位移 δu^0 和 δu^Δ 的任意性,由变分方程(31),得到在变分意义下单元内的应力平衡方程,单元交界面 S_{ab} 上的边界力平衡方程和 S_σ^e 上的力边界条件.此外,我们还得到了非协调元体系的一个能量相容条件

$$\sum_e \oint_{\partial V^e} \mathbf{T}^T \delta u^\Delta dS = 0, \quad (32)$$

(32)式的力学意义是,各单元表面 ∂V^e 上表面力 $\mathbf{T} = n\boldsymbol{\sigma}$ 对非协调位移 δu^Δ 所做虚功之和必须为零.对一给定的非协调元体系而言,相容条件(32)是系统泛函取驻值的必要条件,因此,也是获得合理的变分近似解的基础.

下面首先考虑非协调元解的收敛性问题,这时条件(32)可以进一步放宽.注意到数值流形方法网格细分的极限情况,即当典型单元的尺度 $h \rightarrow 0$ 时,各单元应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 趋于一常量态 $\boldsymbol{\sigma}_e$,这时相应于能量相容条件(32)有

$$\sum_e \oint_{\partial V^e} \boldsymbol{\sigma}_e^T \mathbf{n}^T \delta u^\Delta dS \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \quad (33)$$

这就是非协调元解的收敛条件.(33)式为一极限型能量约束,使用不便.为了避免复杂的数学分析,取(33)式的齐次封闭形式,并且改记 δu^Δ 为 u^Δ ,

即有

$$\sum_e \oint_{\partial V^e} \boldsymbol{\sigma}_e^T \mathbf{n}^T \mathbf{u}^\Delta dS = 0. \quad (34)$$

这个简化了的收敛条件即是 Irons 的常应力分片检验准则的一种数学表示. 对于满足了试解完备性要求以及稳定性要求的非协调元而言, 分片检验条件(34)是数值解收敛于真解的充分条件.

有些非协调元并不严格满足分片检验条件(34), 却仍可能收敛于真解, 原因在于它们虽然不能满足条件(34), 但在特定的网格剖分下却能够满足条件(33). Wilson 非协调流形元中所谓的弱分片检验就是指的这种情况.

分片检验条件(34)与计算网格的形状以及单元集合的方式有关, 使用起来仍感不便, 为此可取其强形式, 即对单个元素要求

$$\oint_{\partial V^e} \boldsymbol{\sigma}_e^T \mathbf{n}^T \mathbf{u}^\Delta dS = 0 \quad (35a)$$

或等价地

$$\oint_{V^e} \boldsymbol{\sigma}_e^T \boldsymbol{\varepsilon}^\Delta dV = 0, \quad (35b)$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}^\Delta = \mathbf{L} \mathbf{u}^\Delta$ 为单元非协调应变, 消去(35)式中的常应力因子, 即得到单个元分片检验的实用形式

$$\oint_{\partial V^e} \mathbf{n}^T \mathbf{u}^\Delta dS = \int_{V^e} \boldsymbol{\varepsilon}^\Delta dV = 0. \quad (36)$$

5. 非协调函数的生成

如何寻求能满足分片检验条件的非协调流形元位移逼近函数是发展非协调数值流形方法的一个关键. 对一般弹性力学三维问题, 记单元边界上的单元外法线矢量的三个分量为 $\{l \ m \ n\}$, $\mathbf{u}_i^\Delta$ 为 $\mathbf{u}^\Delta$ 的任一分量, 则分片检验条件(36)可由下式保证

$$\oint \left\{ \begin{matrix} l \\ m \\ n \end{matrix} \right\} \mathbf{u}_i^\Delta dS = 0, \quad (37)$$

借助于覆盖单元节点广义位移参数 $\mathbf{D}$ 和内位移参数 $\boldsymbol{\lambda}$, 任何类型的非协调位移函数都可统一记为

$$\mathbf{u}^\Delta = \mathbf{u}_q^\Delta + \mathbf{u}_\lambda = \mathbf{T}_q^\Delta \mathbf{D} + \mathbf{N}_\lambda \boldsymbol{\lambda}, \quad (38)$$

为了吸收分片检验条件(37), 可对上式附加一个机动项, 即取

$$\mathbf{u}^\Delta = [\mathbf{T}_q^\Delta \ \mathbf{N}_\lambda] \left\{ \begin{matrix} \mathbf{D} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{matrix} \right\} + \mathbf{N}^* \boldsymbol{\lambda}^*, \quad (39)$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}^*$ 包含三个虚设参数. $\mathbf{N}^*$ 的选取是容易的, 但要能保证矩阵

$$\mathbf{P}_* = \oint \left\{ \begin{matrix} l \\ m \\ n \end{matrix} \right\} \mathbf{N}^* dS, \quad (40)$$

非奇. 此外还定义矩阵

$$\mathbf{P} = \oint \left\{ \begin{matrix} l \\ m \\ n \end{matrix} \right\} [\mathbf{T}_q^\Delta \ \mathbf{N}_\lambda] dS = [\mathbf{P}_q \ \mathbf{P}_\lambda], \quad (41)$$

于是(37)式可表示为

$$\mathbf{P} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{D} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{matrix} \right\} + \mathbf{P}_* \boldsymbol{\lambda}^* = 0, \quad (42)$$

由此得虚参数

$$\boldsymbol{\lambda}^* = -\mathbf{P}_*^{-1} \mathbf{P} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{D} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{matrix} \right\}, \quad (43)$$

代入(39)式, 得到要求的非协调形函数一般公式

$$\mathbf{u}^\Delta = ([\mathbf{T}_q^\Delta \ \mathbf{N}_\lambda] - \mathbf{N}^* \mathbf{P}_*^{-1} \mathbf{P}) \left\{ \begin{matrix} \mathbf{D} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{matrix} \right\}, \quad (44)$$

如果单元总体位移函数不含非协调成分, 即 $\mathbf{u}_q^\Delta = 0$, 则(44)式简化为只含内参 $\boldsymbol{\lambda}$ 的形式

$$\mathbf{u}^\Delta = \mathbf{u}_\lambda^* = (\mathbf{N}_\lambda - \mathbf{N}^* \mathbf{P}_*^{-1} \mathbf{P}_\lambda) \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{N}_\lambda^* \boldsymbol{\lambda} \quad (45)$$

将(44)(45)式应用于二维非协调元时, 只须改取

$$\mathbf{P}_* = \oint \left\{ \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \right\} \mathbf{N}^* dS, \quad (46)$$

$$\mathbf{P} = \oint \left\{ \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \right\} [\mathbf{T}_q^\Delta \ \mathbf{N}_\lambda] dS \text{ 或}$$

$$\mathbf{P}_\lambda = \oint \left\{ \begin{matrix} l \\ m \end{matrix} \right\} \mathbf{N}_\lambda dS, \quad (47)$$

6. 数值算例

6.1. 分片试验

如图1所示一正方体($2 \times 2 \times 2$), 弹性模量 $E = 1500$, 泊松比 $\mu = 0.3$, 采用4个不同的8节点三维体元, 划分方案分不规则体元和规则体元二种, 受均匀拉力作用.

采用几种不同的单元, 即8节点零阶覆盖流形单元 H800, 8节点一阶覆盖流形单元 H801, 8节点零阶覆盖非协调流形单元 NH800 和 8节点一阶覆盖非协调流形单元 NH801, 进行数值试验, 由表1试验结果可以看出, H800 和 H801 是常规的协调元, 自然可以满足分片试验, 而 NH800 和 NH801 附加了非协调位移项, 属于非协调元. 所得结果如表1所示.

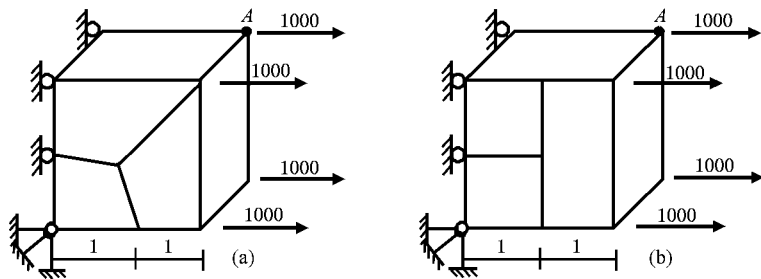


图 1 分片试验数学覆盖单元划分 (a)不规则网格 (b)规则网格

当数学覆盖单元为规则平行六面体时,NH800可精确再现位移场,当数学覆盖单元为不规则平行六面体时,则不能通过分片试验.在数值流形方法中,数学网格是人为给定的,与材料的形状无关,通常取为规则六面体,在这种情况下,非协调流形元严格通过分片试验.

表 1 分片试验中节点 A 位移值

单元	不规则单元位移			规则单元位移		
	u_A	v_A	w_A	u_A	v_A	w_A
H800	1.333	-0.4	-0.4	1.333	-0.4	-0.4
H801	1.333	-0.4	-0.4	1.333	-0.4	-0.4
NH800	1.488	-0.279	-0.541	1.333	-0.4	-0.4
NH801	1.333	-0.4	-0.4	1.333	-0.4	-0.4
精确解	1.333	-0.4	-0.4	1.333	-0.4	-0.4

6.2. 常弯、常剪及纯拉悬臂梁试验

如图 2 所示矩形悬臂梁,长 10,高 2,宽 2,左端固定,弹性模量 $E = 1500$,泊松比 $\mu = 0.3$,载荷工况包括常弯、常剪及纯拉三种情况,数学覆盖网格为规则六面体网格,对 H800、H801、NH800 和 NH801 四种单元分别进行 A 点位移和 B 点应力值计算,所得结果如表 2 所示.

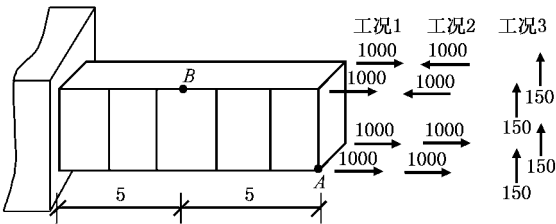


图 2 悬臂梁示意图

H800 是三维 8 节点零阶覆盖流形元,从表 2 中可以看出他的精度比较低,NH800 是在其基础上附加了关于 ξ^2, η^2, ζ^2 的二次非协调位移项,从计算结果可见,它能很好地模拟纯弯曲状态.H801 是三维

8 节点一阶覆盖流形元,它的节点广义自由度要比 H800 多出 3 倍以上,因此本例题中结果已经接近了精确值.

表 2 均匀网格悬臂梁计算结果

单元	纯拉载荷		常弯载荷		常剪载荷	
	v_A	σ_{xB}	v_A	σ_{xB}	v_A	σ_{xB}
H800	1.333	1000	44.3	-1 743	48.2	1 154.1
H801	1.333	1000	94.7	-3 031	103.07	2 211.8
NH800	1.333	1000	97.5	-2 957	100.5	1 866.3
NH801	1.333	1000	99.4	-3 004.2	102.5	2 248.7
精确解	1.333	1000	100	-3 000	102.6	2 250

从上面两个算例可以看出,不管覆盖网格如何变化,非协调元的解都是收敛的.

6.3. 均匀与非均匀有限数学覆盖网格悬臂梁试验

如图 3 所示矩形悬臂梁,长 10,高 2,左端固定,弹性模量 $E = 1500$,泊松比 $\mu = 0.25$,载荷工况为纯弯和横向剪切情况,数学覆盖网格分为规则四边形网格和不规则四边形网格两种情况,采用几种不同的单元,即 4 节点零阶覆盖流形单元 H400、4 节点一阶覆盖流形单元 H401 和 4 节点零阶覆盖非协调流形单元 NH400,进行数值试验.对 H400、H401 和 NH400 三种单元分别进行 A 点位移和 B 点应力值

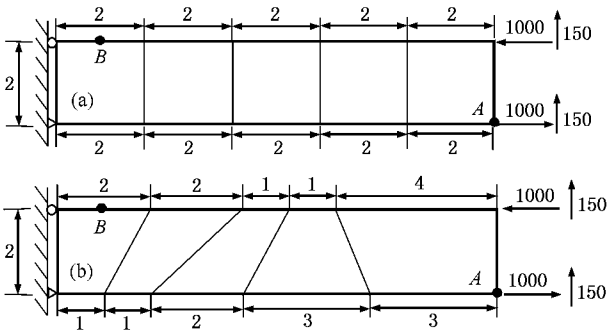


图 3 网格悬臂梁数值计算模型 (a)均匀规则覆盖 (b)非均匀覆盖

计算, 所得结果如表3、表4所示.

每个单元的节点应力都是通过应力矩阵乘以节点位移得出的, 而 B 点的应力是经所在平面所有节点应力加权平均得到的. 从表3、表4可以看出, 在各项指标中, NH400 比 H400、H401 要好. H401 和 NH400 相比, 它们在精度上相差无几, 但 H401 节点广义自由度要比 NH400 多出3倍以上. 在数值流形分析中, 计算量最大的运算是求解系统的平衡方程, 而解方程的运算量是与自由度的三次方成正比的, 所以, 采用非协调流形单元的效果是非常显著的.

表3 均匀网格悬臂梁计算结果

单元	纯弯载荷		剪切载荷	
	v_A	σ_{xB}	v_A	σ_{xB}
H400	51.4	-2058.4	57.3	-2566.1
H401	97.6	-2753.3	101.6	-4000.5
NH400	98.5	-2985.1	101.8	-4118.2
精确解	100	-3000	102.6	-4050

表4 非均匀网格悬臂梁计算结果

单元	纯弯载荷		剪切载荷	
	v_A	σ_{xB}	v_A	σ_{xB}
H400	45.7	-1758.4	51.2	-2246.4
H401	94.7	-3031.2	103.07	-3987.5
NH400	97.5	-2957.2	101.5	-4118.2
精确解	100	-3000	102.6	-4050

6.4. MacNeal 细长梁试验

图4为 MacNeal 和 Harder 建议的 $6 \times 0.2 \times 0.1$ 细长梁^[18], 采用三种不同的有限覆盖网格, 即(a) 1×6 规则四边形网格 (b) 1×6 梯形网格 (c) 1×6 平行四边形网格. MacNeal 曾经论证过, 在梯形网格的 MacNeal 梁问题中, 用四节点四边形有限元进行模拟必定会发生闭锁现象. 而在数值流形方法中, 当覆盖位移函数取零阶覆盖函数时, 数值流形方法退化为四边形有限元, 因此四节点四边形零阶覆盖数值流形方法也将发生闭锁现象, 所以有必要对非协调数值流形方法进行 MacNeal 细长梁试验.

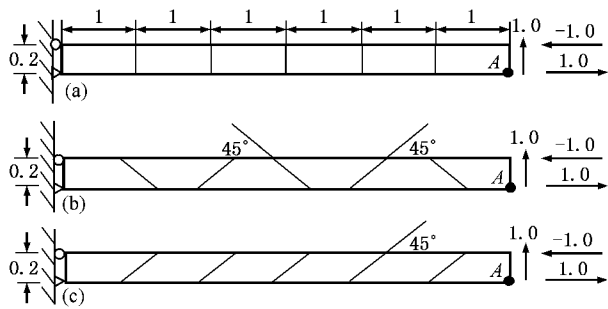


图4 MacNeal 细长梁数值计算模型 (a) 1×6 规则四边形网格 ($E = 10^7, V = 0.3, t = 0.1$) (b) 1×6 梯形网格 ($E = 10^7, V = 0.3, t = 0.1$) (c) 1×6 平行四边形网格 ($E = 10^7, V = 0.3, t = 0.1$)

表5 弯曲载荷下 MacNeal 梁计算结果 (A 点垂直挠度)

单元	(a)		(b)		(c)	
	v_A	$\Delta\%$	v_A	$\Delta\%$	v_A	$\Delta\%$
H400	0.0005	90.74	0.0001	98.15	0.0001	98.15
H401	0.0049	9.26	0.0049	9.26	0.0049	9.26
NH400	0.0054	14.81	0.0050	7.41	0.0052	3.70
精确解	0.0054	0.00	0.0054		0.0054	

表6 横向剪切载荷下 MacNeal 梁计算结果 (A 点垂直挠度)

单元	(a)		(b)		(c)	
	v_A	$\Delta\%$	v_A	$\Delta\%$	v_A	$\Delta\%$
H400	0.0908	16.00	0.0004	96.30	0.0088	91.86
H401	0.0977	9.62	0.0977	9.62	0.0977	9.62
NH800	0.1073	0.74	0.0841	22.20	0.1073	0.74
精确解	0.1081		0.1081		0.1081	

表5和表6给出了 A 点垂直挠度的数值结果 v_A 和误差 $\Delta\%$, 从数值结果可见, H400 有限覆盖单元在图4(b)和(c)覆盖网格下发生了闭锁现象, 是可以理解的. 当然, 如果对覆盖网格继续进行细分, 仍然是可以收敛至理论解的.

6.5. 数学覆盖网格畸变敏感性分析

图5为网格畸变试验模型图, 参数 e 是可变的, 我们采用 NH400 来计算 A 点挠度. 当 e 值为零时, 说明有限覆盖网格没有畸变; 当 e 值逐渐增大时,

畸变程度增加,通常情况下 H800 单元性能会变差.但对于 NH400 单元和 H401 单元,由图 6 可以看出,不管畸变程度如何,仍然可以得到比较满意的结果,对畸变不敏感.

从以上几个算例可以看出,不管覆盖网格如何变化,非协调元的解都是稳定的.

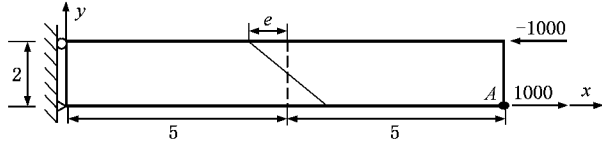


图 5 网格畸变试验模型图

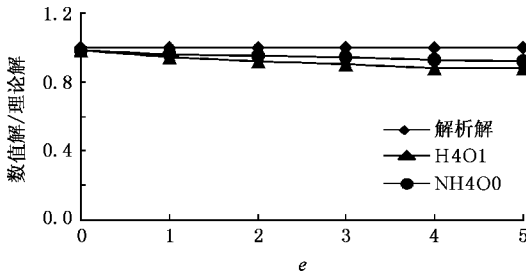


图 6 畸变状态下纯弯梁试验结果

7. 结 论

本文对非协调数值流形方法进行了稳定性和收敛性分析.数值试验表明,新单元构造过程简单,对单元畸变不敏感,能够保证通过小片试验,计算精度

可以得到一定提高.

非协调数值流形方法由于引入了非协调项,使三维六面体覆盖流形单元中对应于零阶覆盖位移函数的单元位移函数的二次项完全了,从而提高了单元精度.这种非协调流形元在计算中可以达到与一阶覆盖位移函数对应的协调流形单元同级的计算精度,但是前者的广义节点自由度只是后者的 $2/5$.在数值流形分析中,计算量最大的运算是求解系统的平衡方程,而解方程的运算量是与自由度的三次方成正比的,所以采用非协调流形单元的效果是非常显著的.

对内参型非协调元使用简化积分容易引出与内参对应的零能变形模式,这时对内参自由度的静力凝聚将不能进行.一个有效的处理办法是列出零能变形模式的显式,然后直接将它从单元内位移中删除.通常零能变形模式对应单元应力的阶部分,它的删除并不破坏单元的常应力状态,不影响解的稳定.

目前,数值流形方法分析程序采用的是传统的有限元覆盖单元类型,对这些单元进行改造,可以有效改善单元性能.在同样单元划分情况下,无需增加覆盖位移函数的阶数,即节点广义自由度数,即可提高计算精度,减少机时,增加计算效率.

等参坐标下的非协调位移基本项形式构造比较复杂,本文仅仅进行了一些简单的分析,今后希望能够进一步对其进行分析,并逐步推广至 C^1 问题,促进新型高效非协调流形元的发展.

- [1] Shi G H 1997 *Numerical Manifold Method and Discontinuous Deformation Analysis* (Beijing: Qinghua University Press) (in Chinese)[石根华 1997 数值流形方法与非连续变形分析(北京:清华大学出版社)]
- [2] Lin J S 2003 *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **192** 1515
- [3] Zhou W Y, Yang Q 1997 *The Second International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation*. 10-12 July 1997 Kyoto, Japan
- [4] Li S C, Cheng Y M 2004 *Advances in Mechanics* **34** 446 (in Chinese)[李树忱、程玉民 2004 力学进展 **34** 446]
- [5] Li S C, Cheng Y M, Li S C 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4760 (in Chinese)[李树忱、程玉民、李术才 2006 物理学报 **55** 4760]
- [6] Wei G F, Feng W 2006 *Acta Mechanica Sinica* **38** 79 (in Chinese)[魏高峰、冯 伟 2006 力学学报 **38** 79]
- [7] Wei G F, Feng W 2006 *Rock and Soil Mechanics* **27** 189 (in Chinese)[魏高峰、冯 伟 2006 岩土力学 **27** 189]
- [8] Bezeley G P, Cheung Y K, Irons B M, Zienkiewicz O C 1965 *Proc. 1st Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*. Ohio, USA: p547 Wright-Paterson
- [9] Taylor R L, Simo J C, Zienkiewicz O C, Chan A 1986 *Int. J. Num. Meth. Eng.* **22** 39
- [10] Wu C C, Cheung Y K 1991 *Int. J. Num. Meth. Eng.* **31** 1669
- [11] Babuska I 1973 *Num. Math.* **20** 179
- [12] Shi Z C 1987 *Math. Comput.* **49** 391
- [13] Shi Z C, Wang J C 2000 *Math. Comput.* **22** 97 (in Chinese)[石钟慈、王家城 2000 计算数学 **22** 97]
- [14] Xue Y, Cheng L Q, Liu Y Z 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4029 (in Chinese)[薛 纭、陈立群、刘延柱 2004 物理学报 **53** 4029]
- [15] Wu C C, Bian X H 1997 *Incompatible Numerical Method and Hybrid Element Method* (Beijing: Science Press) (in Chinese)[吴长春、卞学 1997 非协调数值方法与杂交元方法(北京:科学出版社)]

[16] Taylor R L , Simo J C , Zienkiewicz , Chan A 1986 *Int . J . Num . Meth . Eng .* **22** 39

[17] Brezzi F 1974 *Rairo , Ser . Rouge .* **8** 129

[18] MacNeal R H , Harder R L 1985 *Finite Element in Analysis and Design* **1** 3

Stability and convergence analysis of incompatible numerical manifold method^{*}

Wei Gao-Feng^{1 2 †} Li Kai-Tai¹ Feng Wei³ Gao Hong-Fen³

1 兪 College of Science , Xi 'an Jiaotong University , Xi 'an 710049 , China)

2 兪 Institute of Mechanical Engineering , Shandong Institute of Light Industry , Jinan 250353 , China)

3 兪 Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics , Shanghai University , Shanghai 200072 ,China)

(Received 30 December 2006 ; revised manuscript received 18 May 2007)

Abstract

The incompatible numerical manifold method (INMM) is developed on the basis of numerical manifold method (NMM). The advantages of INMM are that the calculation accuracy and computing efficiency can be greatly increased without adding generalized degrees of freedom. The expressions of element strain matrix and element stiffness matrix are given based on eliminating the internal parameters. On the basis of least potential energy theory the stability and convergence are analyzed and discussed in Hilbert space , and the basic condition ensuring uniqueness and convergence of solution is given. The theorization of INMM is perfected. To illustrate the stability and convergence of the present approach , numerical examples are provided. It is shown that this method produces highly accurate and convergent results.

Keywords : numerical manifold method , incompatible element , stability analysis , convergence analysis

PACC : 0200 , 0340D , 4630C

^{*} Project supported by the Shandong Science Fund of Excellent Young and Middle-aged Scientist (Grant No.2007BS04045).

[†] E-mail : weigaofeng@126.com