

# 对称双势阱玻色-爱因斯坦凝聚系统在周期驱动下的动力学相变及其量子纠缠熵表示<sup>\*</sup>

房永翠<sup>1)†</sup> 杨志安<sup>1)</sup> 杨丽云<sup>2)</sup>

1) 济南大学理学院, 济南 250022)

2) 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

(2007 年 7 月 19 日收到, 2007 年 8 月 17 日收到修改稿)

研究了在对称双势阱玻色-爱因斯坦凝聚体系粒子间相互作用项上外加周期调制而引起的系统动力学相变, 特别地研究了该系统通向混沌的相变过程. 发现在一定驱动参数下, 当外加调制频率与系统固有频率达到共振时, 相平面会出现不稳定性现象, 即混沌. 在混沌区域, 粒子在各量子态随机分布, 平均布居数差在零附近波动. 特别地, 研究表明, 混沌现象的出现可以用量子纠缠熵来表征, 混沌现象出现时, 两种平均纠缠熵都趋于它们的最大值.

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚, 双势阱, 混沌, 纠缠熵

PACC: 0365, 0155, 7335

## 1. 引言

1995 年, 在爱因斯坦理论预言 70 年之后, 经过几代物理学家的不懈努力, 首次在实验上实现了碱金属原子稀化气体的玻色-爱因斯坦凝聚 (BEC)<sup>[1-3]</sup>. BEC 的实现有着十分重要的科学意义和潜在的应用价值, 它既联系着物理学的基本理论, 又和先进的物理技术紧密相关. BEC 不仅对基础研究有重要意义, 而且在芯片技术、精密测量和纳米技术等领域都有着广阔的应用前景, 使其成为理论和实验研究的热门课题<sup>[4-11]</sup>.

从实验物理学角度, 利用日益精密的激光技术等实验手段, 人们可以精确控制凝聚体, 利用 Feshbach 共振技术可以调节原子间的相互作用, 从而可以通过给系统加上一个周期调制的外场, 来研究系统在周期驱动下的动力学行为. Feshbach 共振最早是物理学家 Feshbach<sup>[12]</sup> 在原子核物理中发现的. 在 20 世纪 90 年代初, Tiesinga 等<sup>[13]</sup> 预言了在碱金属原子气体系统中存在有 Feshbach 共振, 他们提出在这些系统里, 原子碰撞的散射长度可以通过改变磁场来调节. 在 1999 年, MIT 的 Ketterle 实验组首

先在钠系统中观测到了 Feshbach 共振<sup>[14]</sup>. 利用 Feshbach 共振, 可以使散射长度达到任何一个值, 从而可以任意地改变原子间的相互作用, 所以 Feshbach 共振在 BEC 领域应用非常广泛.

在理论研究方面, 平均场近似下的 Gross-Pitaevskii 方程<sup>[11]</sup> (Gross-Pitaevskii equation, GPE) 被成功地应用于研究 BEC 的动力学性质, 如整体频率<sup>[15, 16]</sup> 等, 并在一定条件下可以把 GPE 简化成两模薛定谔方程<sup>[17-19]</sup>, 从而可以用双势阱模型来描述 BEC 系统. 双势阱模型虽然简单, 却蕴藏着丰富的物理内涵, 被广泛地用于研究 BEC 的各种动力学性质, 并得到了许多非常有意义的现象, 如隧穿性质<sup>[17-19]</sup>、自囚禁<sup>[20-32]</sup> 等现象. 这一模型所预言的一些现象已被实验所证实<sup>[33]</sup>. 在纯量子情况下, 这种多体量子系统呈现出量子纠缠特性<sup>[29]</sup>, 并且量子涨落本身对系统动力学性质也有影响<sup>[24, 29]</sup>. 在周期驱动下, 对 BEC 双势阱模型相平面的研究, 发现了诸如不稳定性 (混沌) 等许多有意义的现象<sup>[22-24]</sup>. 而不稳定性 (混沌) 的出现能够破坏原子间的相干性, 导致 BEC 的瓦解. 因此对不稳定性 (混沌) 的控制及其应用的研究, 引起了人们的关注, 这些也正是本文所关心的问题.

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金 (批注号: 10474008, 10604009) 和中国工程物理研究院预研基金资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: fangyongcui@126.com

本文的主要研究内容是,在 BEC 对称双势阱模型中的粒子间相互作用项上,加上周期驱动  $c = c_0(1 + \sin\omega t)$ ,讨论这种周期外场对系统动力学性质的影响,特别是系统混沌现象的产生.研究了周期驱动下,对称双势阱中 BEC 通向混沌的相变行为,及其量子纠缠熵表示.研究结果表明,当相互作用较小,即  $0 < c_0 < 2$  时,相空间为周期轨道,随着相互作用强度的增加,在  $2 < c_0 < 10.7$  出现了自囚禁现象;当相互作用继续增大到处于  $10.7 < c_0 < 12.8$  时,系统会发生相互共振,从而在相空间可以观察到混沌现象的发生.混沌现象发生时,粒子在各态随机分布,布居数差的平均值  $s$  在 0 附近波动,与此对应的纯量子情况中,平均熵趋于最大值,随着相互作用强度继续增大到  $c_0 > 12.8$ ,系统又会出现自囚禁现象.

## 2. BEC 通向混沌的相变行为

对双势阱 BEC 体系,其两模近似薛定谔方程为<sup>[17-19]</sup>

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad (1)$$

其中  $a, b$  分别是粒子出现在两个势阱中的概率幅,总概率  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . 体系的哈密顿为

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{2} - \frac{c}{2}(|b|^2 - |a|^2) & -\frac{v}{2} \\ -\frac{v}{2} & -\frac{\gamma}{2} + \frac{c}{2}(|b|^2 - |a|^2) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

其中参数  $c$  表示粒子间的相互作用强度<sup>[28,34]</sup>,  $\gamma$  是两势阱的能量差,  $v$  是两势阱的耦合系数. 本文的讨论是基于粒子间的相互作用为排斥作用( $c > 0$ ), 对称双势阱  $\gamma = 0$  的情况,同时,为了方便比较和计算,取  $v = 1$ .

如果粒子数足够大,这个系统能够用平均场近似很好地描述. 在平均场近似下,令  $a = |a|e^{i\theta_a}$ ,  $b = |b|e^{i\theta_b}$ , 并引入布居数差  $s = |b|^2 - |a|^2$  和相对相位  $\theta = \theta_b - \theta_a$ , 得到这个系统的经典哈密顿为

$$H = -\frac{c}{2}s^2 + v\sqrt{1-s^2}\cos\theta, \quad (3)$$

其中  $s, \theta$  是一对经典哈密顿系统的正则变量,满足

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial s},$$

于是有

$$\dot{s} = v\sqrt{1-s^2}\sin\theta, \quad (4a)$$

$$\dot{\theta} = -cs - \frac{vs}{\sqrt{1-s^2}}\cos\theta. \quad (4b)$$

在平均场近似下,在系统的相互作用项上外加的周期调制形式为  $c = c_0(1 + \sin\omega t)$ , 则经典哈密顿(3)变为

$$H = -\frac{1}{2}s^2c_0(1 + \sin\omega t) + v\sqrt{1-s^2}\cos\theta, \quad (5)$$

相应的  $s, \theta$  的动力学方程(4a)和(4b)变为

$$\dot{s} = v\sqrt{1-s^2}\sin\theta, \quad (6a)$$

$$\dot{\theta} = -sc_0(1 + \sin\omega t) - \frac{vs}{\sqrt{1-s^2}}\cos\theta, \quad (6b)$$

此时相空间哈密顿系统的演化行为由方程(6)支配,随着相互作用系数  $c_0$  的不同出现的变化情况. 对于这个系统,我们感兴趣的是粒子间相互作用的大小对系统动力学行为的影响,可令周期驱动频率  $\omega$  取固定值,本文中取  $\omega = 10$ . 同时,为了方便与量子情况作比较,在数值计算中取初值为  $s = 1, \theta = 0$ , 也就是说在初始时刻,所有的粒子都分布在一个阱中,且两阱的相对相位为 0. 图 1 绘出了初值为  $s = 1, \theta = 0$  的轨道在相互作用参数  $c_0$  取值不同时的相图. 图 2(a)示出了布居数差对时间的平均值  $s$  随  $c_0$  的变化情况.

如图 1(a)所示,当  $c_0$  比较小,处于  $0 < c_0 < 2$  时,布居数差  $s$  在  $[-1, 1]$  之间变化,相对相位  $\theta$  在  $[0, 2\pi]$  内变化,粒子分布是平衡分布,即约瑟夫森振荡. 对应的布居数差对时间的平均值  $s = 0$ , 见图 2(a)中  $0 < c_0 < 2$  的区域. 随着  $c_0$  的增强,当  $2 < c_0 < 10.7$  时,布居数差  $s$  在  $[0, 1]$  间变化,相对相位  $\theta$  单调增加,见图 1(b);与此相应,布居数差对时间的平均值  $s \neq 0$ , 接近于  $s$  的初值 1, 出现自囚禁现象,如图 2(a)所示. 布居数差对时间的平均值  $s$  反映出粒子在两个阱中分布的平衡程度,  $s \neq 0$  表明粒子在两个阱中分布不平衡,  $s$  越趋近于 1, 粒子数分布越不平衡,表明大多数粒子集中在一个阱中. 也就是说  $s$  越大,自囚禁现象越明显.

当  $c_0$  改变范围到  $10.7 < c_0 < 12.8$  时,相空间出现了不稳定性(混沌)现象,见图 1(c),粒子在整个相空间的分布是随机的,使得布居数差的平均值发生突变,并在零附近波动,见图 2(a)中  $10.7 < c_0 < 12.8$  的区域. 我们认为混沌现象的出现,是由于外加驱动频率与系统固有频率达到共振引起的,当  $c_0$  很小和很大时,系统都不会出现混沌现象. 当  $c_0 >$

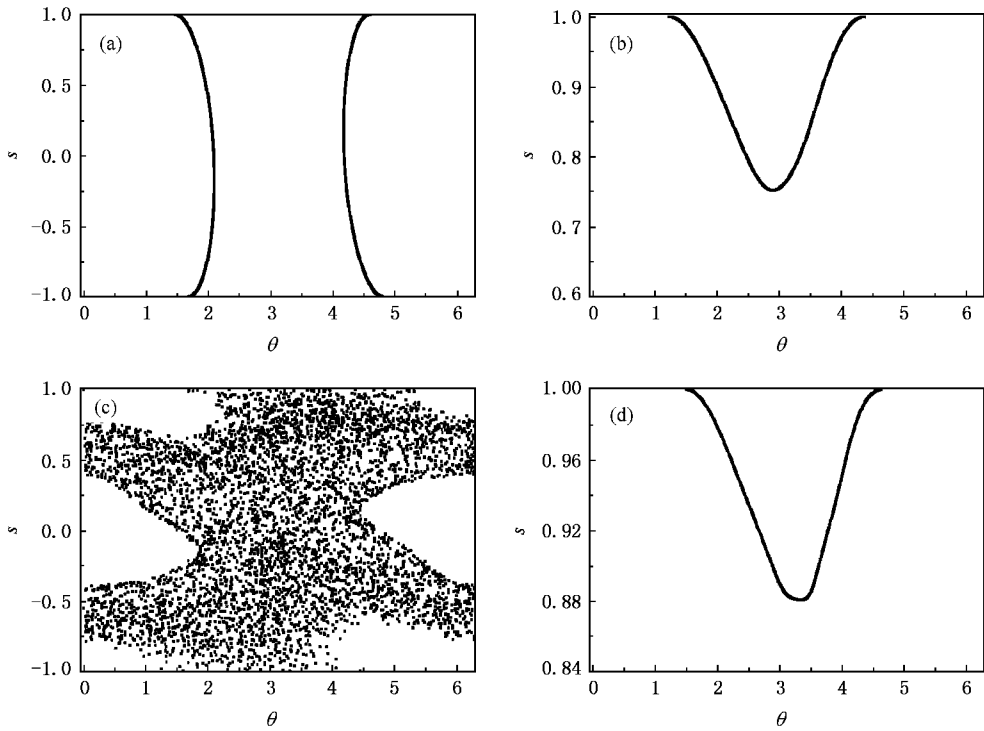


图1 相平面中系统哈密顿的演化 (a)(b)(c)(d)分别表示  $c_0 = 1.0, 3.0, 11.0, 13.0$  时势阱中粒子布居数差和相对相位的关系

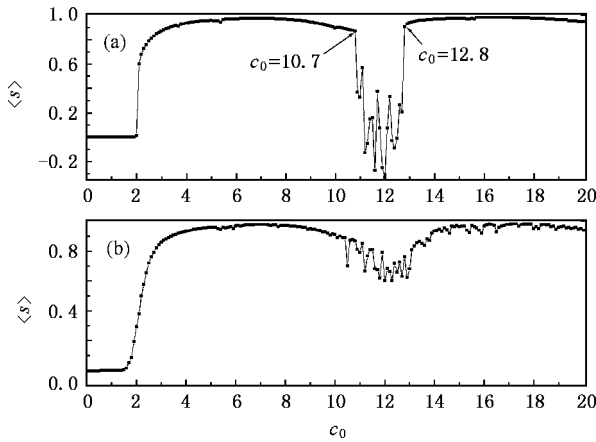


图2 (a)经典情况平均布居数差的平均值随  $c_0$  的变化曲线；  
(b)粒子数  $N = 50$  时量子情况平均布居数差随  $c_0$  的变化曲线

12.8 后 相空间混沌现象消失,又出现了自囚禁现象,见图 1(d),  $s$  在  $[0, 1]$  之间变化,  $\theta$  单调增加; 相应的  $s \neq 0$ , 接近于  $s$  的初值,见图 2(a)中  $c_0 > 12.8$  的区域.

混沌现象的出现,可以由最大李雅普诺夫 (Lyapunov) 指数  $\lambda$  来表征,最大李雅普诺夫指数  $\lambda$  的计算公式为<sup>[35]</sup>

$$\lambda = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \sum_{j=0}^{M-1} \ln \frac{[\delta s(j+1)]^2 + [\delta \alpha(j+1)]^2}{[\delta s(j)]^2 + [\delta \alpha(j)]^2}, \quad (7)$$

其中  $T$  为计算时选取的总的演化时间,  $M$  为数值计算的总步数.  $\lambda > 0$  表示混沌现象的发生. 对于图 1 的相空间轨道,我们计算了  $\lambda$  随  $c_0$  的变化行为,结果在图 3 中示出.

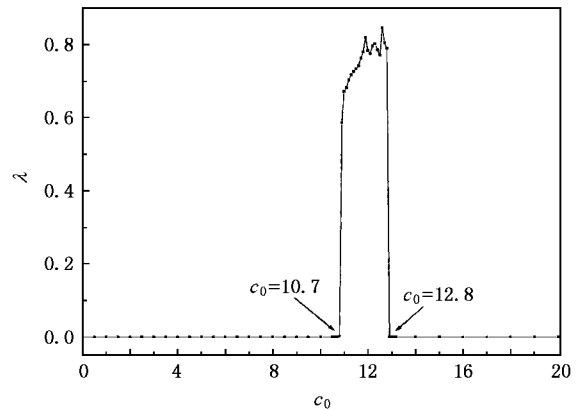


图3  $\omega = 10$  李雅普诺夫指数随  $c_0$  的变化曲线

从图 3 所示的  $\lambda$  随  $c_0$  变化曲线可以看到,在区域  $10.7 < c_0 < 12.8$  中,  $\lambda > 0$ ,说明了此时系统处于混沌状态. 此外不论系统处于约瑟夫森振荡区域

$0 < c_0 < 2$  还是处于自囚禁区域  $2 < c_0 < 10.7$  和  $c_0 > 12.8$  相空间轨道都是确定论的运动, 都有  $\lambda = 0$ , 表明李雅普诺夫指数对这两种情况不能区分.

### 3. 量子涨落对系统动力学行为的影响

上面讨论的双势阱 BEC 模型, 在纯量子时的两模哈密顿为<sup>[12,36]</sup>

$$\hat{H} = \frac{\gamma}{2}(a^+a - b^+b) - \frac{c}{2N}(a^+a^+aa + b^+b^+bb) + \frac{v}{2}(a^+b + b^+a), \quad (8)$$

其中算符  $a^+, b^+$  ( $a, b$ ) 分别是相应两阱的产生(湮灭)算符,  $N$  是总粒子数.

在纯量子情况下, 系统的演化由如下薛定谔方程决定:

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (9)$$

其中  $|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^N a_n |n, N-n\rangle, |n, N-n\rangle$  ( $n = 0, 1, \dots, N$ ) 是福克态 (Fock states),  $a_n$  是占有率. 因此, 量子情况的布居数差为

$$s = \sum \frac{|a_n|^2 (N - 2n)}{N}. \quad (10)$$

这里用  $N$  作了归一化.

在纯量子情况下, 选择  $|0, N\rangle$  作为初始态, 以对应于平均场近似下的初值  $s = 1$ . 图 2(b) 画出了当粒子数  $N = 50$  时, 由薛定谔方程(9)算出的平均布居数差. 从图 2(b) 可以看出, 量子情况下的平均布居数差也描述了 BEC 相变的几个过程: 当  $0 < c_0 < 2$  时, 布居数差的平均值  $s = 0$ , 系统处于约瑟夫森振荡状态; 当  $2 < c_0 < 10.7$  时,  $s \neq 0$ , 接近于 1, 系统处在自囚禁状态; 当  $10.7 < c_0 < 12.8$  时(对应于经典时发生混沌的区域), 布居数差的平均值  $s < 1$ , 系统出现不规则的隧穿. 在  $c_0 > 12.8$  后, 系统又处于自囚禁状态,  $s$  接近于 1. 与如图 2(a) 所示的经典情况比较可以看出, 在经典情况出现混沌的区域, 在由图 2(b) 显示的量子情况中, 布居数差的平均值也如同经典情况一样发生较大的变化.

## 4. 系统混沌行为的量子纠缠熵表示

### 4.1. 量子纠缠熵

为了更清晰地描述在纯量子情况下粒子分布情况, 引入了量子纠缠熵. 两模 BEC 系统的纠缠熵是<sup>[37,38]</sup>

$$E(\rho) = - \sum_{n=0}^N |a_n|^2 \log_2 |a_n|^2. \quad (11)$$

由于在每个福克态上的概率是随时间变化的, 因此用平均熵来表征两模 BEC 量子情况下的量子相变行为<sup>[39]</sup>. 平均熵的计算有两种方法: 1) 先对一定时间内各态上的概率求平均, 然后计算熵; 2) 先计算熵, 然后再平均. 这样就得到如下两种平均熵的计算公式:

$$E_{av} = - \sum_{n=0}^N |a_n|^2 \log_2 |a_n|^2 / \log_2 N, \quad (12)$$

$$E = - \sum_{n=0}^N |a_n|^2 \log_2 |a_n|^2 / \log_2 N. \quad (13)$$

这两个公式都用  $\log_2 N$  作了归一化. 平均熵越大, 表明系统的平均纠缠程度越高.

在图 4 中, 画出了粒子数分别为  $N = 50$  和 100 时两种平均熵随  $c_0$  的变化曲线.

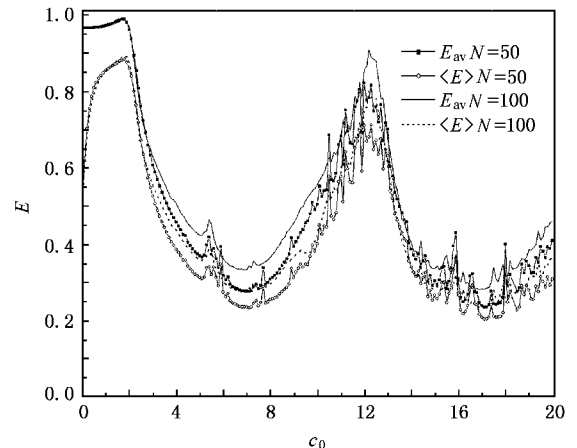


图 4 粒子数  $N = 50$  和 100 时量子情况的平均熵随  $c_0$  的变化曲线

在  $c_0$  较小, 处于  $0 < c_0 < 2$  时, 粒子只占据在少数几个态上, 并且占据的态是随时间变化的, 这样瞬时熵就很小, 因此平均熵  $E$  也比较小, 而在每个态上的概率基本上是相等的, 所以  $E_{av}$  比较大. 随着  $c_0$  的增大, 占据的态增多, 相应的平均熵  $E$  增大. 当

$c_0$  超过自囚禁的相变点,处于区域  $2 < c_0 < 10.7$  时,这时由于自囚禁现象的发生,粒子被限制在少数几个态上,瞬时熵变小,因此平均熵  $E$  和  $E_{av}$  也相应地减小.当  $10.7 < c_0 < 12.8$  时,在平均场近似情况下系统处于混沌状态,系统占据较多的态,相应的量子情况的平均熵  $E$  和  $E_{av}$  也变大,接近于它们的最大值 1,而且粒子数越多, $E$  和  $E_{av}$  越接近于 1.随着  $c_0$  继续增大,在  $c_0 > 12.8$  后,系统再次处于自囚禁状态,平均熵  $E$  和  $E_{av}$  都减小.

#### 4.2. 经典和量子情况的比较

将经典情况平均场近似下的相图 1 和平均布居数差  $s$  随  $c_0$  的变化图  $\chi(a)$ ,与纯量子情况下的平均布居数差  $s$  随  $c_0$  的变化图  $\chi(b)$  和平均熵  $E$  和  $E_{av}$   $s$  随  $c_0$  的变化图 4 比较,可以发现:在自囚禁区域  $2 < c_0 < 10.7$  和  $c_0 > 12.8$  时,系统只占据在少数几个态上,见图 1(c) 和图 1(d),经典和量子情况的平均布居数差  $s$  都接近于布居数差的初值  $s = 1$ ,见图 2,量子情况下的平均熵  $E$  和  $E_{av}$  接近于 0,见图 4.在经典情况发生混沌的区域,  $10.7 < c_0 < 12.8$  时,粒子在可整个空间的分布是随机的,也就是说系统占据较多的态,见图 1(c),经典情况的平均布居数差  $s$  接近于 0,见图  $\chi(a)$ ,而量子情况的  $s$  也不再接近于 1,见图  $\chi(b)$ ,相应的量子情况时的平均熵  $E$  和  $E_{av}$  都接近于 1,见图 4.但与经典情况下粒子布居数差在混沌区域边界发生突变不同,在量子情况下,原来经典情况的相变点,扩展成一个变化区域.而在  $c_0$  较小的区域(约瑟夫振荡区域),  $c_0$  处于  $0 < c_0 < 2$  时,虽然  $E_{av}$  达到最大值,但由于

经典和量子情况在这一区域粒子都只占据在少数几个态上,并且占据的态是随时间变化的, $E$  由比较小的值逐渐增大,所以约瑟夫振荡区域与混沌区域的差别可以通过平均熵  $E$  表现出来,而  $E_{av}$  不能体现这一差别.

## 5. 总 结

本文主要研究了在相互作用项上加上周期驱动后,对称双势阱中 BEC 系统的动力学行为,特别是系统通向混沌的相变行为,及其量子纠缠熵表示.我们发现因相互作用项上的周期驱动作用,随着驱动参数的变化,系统相继表现了约瑟夫振荡状态、自囚禁状态、和不稳定状态(即混沌状态)等不同情况.当系统处于混沌状态时,粒子在各态随机分布,布居数差的平均值  $s$  在 0 附近波动,平均熵  $E_{av}$  和  $E$  的值与约瑟夫振荡状态和自囚禁状态时的值不同,此时平均熵  $E_{av}$  和  $E$  基本相等,都接近于最大值 1.这表明在平均场近似下发生混沌的区域,粒子在各量子态的分布概率是相等的,而且各态间高度纠缠.这两种平均熵可以表征系统不稳定现象(混沌)的发生,它们在纯量子情况中的作用,相当于最大李雅普诺夫指数  $\lambda$  在经典情况中的作用,可以表示不稳定(混沌)现象的发生.同时,这两种平均熵还能将系统的约瑟夫振荡状态和自囚禁状态区分开来.与最大李雅普诺夫指数  $\lambda$  相比,这两种平均熵能更好地反映出系统相变的各个过程.

我们真诚地感谢北京应用物理与计算数学研究所刘杰老师和傅立斌老师的有益指导.

- [1] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R, Wieman C E, Cornell E A 1995 *Science* **269** 198
- [2] Davis K B, Mewes M O, Andrews M R, Druten N J, Durfee D S, Kurn D M, Ketterle W 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3969
- [3] Bradley C C, Sackett C A, Tollett J J, Hulet R 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 1687
- [4] Franco D, Giorgini S, Lev P, Sandro S 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 463
- [5] Anthony L J 2001 *Rev. Mod. Phys.* **73** 307
- [6] Liu J, Zhang C W, Raizen M G, Niu Q 2006 *Phys. Rev. A* **73** 13601

- [7] Liu J, Wang W G, Zhang C W, Niu Q, Li B W 2005 *Phys. Rev. A* **72** 63623
- [8] Liu J, Wang W G, Zhang C W, Niu Q, Li B W 2005 *Phys. Lett. A* **353** 216220
- [9] Liu W M, Fan W B, Zheng W M, Liang J Q, Chui S T 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 170408
- [10] Liu W M, Wu B, Niu Q 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2294
- [11] Zhang L, Ge M L 2000 *Fashionable Problem in Quantum Mechanics* (Beijing: Tsinghua University Press [in Chinese])[张礼、葛墨林 2000 量子力学的前沿问题(北京:清华大学出版社)]

- [ 12 ] Fashbach H 1992 *Theoretical Nuclear Physics* ( New York : Wiley )
- [ 13 ] Tiesinga E , Verhaar B J , Stoof H 1993 *Phys. Rev. A* **47** 4114
- [ 14 ] Inouye S , Andrews M R , Stenger J , Miesner H J , Stamper D M , Ketterle W 1998 *Nature* **392** 151
- [ 15 ] Edwards M , Ruprecht P A , Burnett K , Dodd R J , Clark C W 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 1671
- [ 16 ] Stringari S 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 2360
- [ 17 ] Wu B , Niu Q 2000 *Phys. Rev. A* **61** 23402
- [ 18 ] Liu J , Wu B , Niu Q 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 170404
- [ 19 ] Wu B , Liu J , Niu Q 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 140402
- [ 20 ] Raghavan S , Smerzi A , Fantoni S , Shenoy S R 1999 *Phys. Rev. A* **59** 620
- [ 21 ] Martin H 2001 *Phys. Rev. A* **64** 11601(R)
- [ 22 ] Smerzi A , Fantoni S 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 3589
- [ 23 ] Kagan Y , Surkov E L , Shlyapnikov G V 1997 *Phys. Rev. A* **55** R18
- [ 24 ] Wang G F , Fu L B , Zhao H , Liu J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5003 ( in Chinese ) [ 王冠芳、傅立斌、赵 鸿、刘 杰 2005 物理学报 **54** 5003 ]
- [ 25 ] Wang G F , Fu L B , Liu J 2006 *Phys. Rev. A* **73** 13619
- [ 26 ] Fu L B , Chen S G 2005 *Phys. Rev. E* **71** 16607
- [ 27 ] Fu L B , Liu J , Chen S G 2002 *Phys. Lett. A* **298** 388
- [ 28 ] Wang G F , Ye D F , Fu L B , Chen X Z , Liu J 2006 *Phys. Rev. A* **74** 33414
- [ 29 ] Ma Y , Fu L B , Yang Z A 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5628 ( in Chinese ) [ 马 云、傅立斌、杨志安 2006 物理学报 **55** 5628 ]
- [ 30 ] Milburn G J , Corney J , Wright E M , Walls W F 1997 *Phys. Rev. A* **55** 4318
- [ 31 ] Liu B , Fu L B , Yang S P , Liu J 2007 *Phys. Rev. A* **75** 33601
- [ 32 ] Liu Z Z , Yang Z A 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1245 ( in Chinese ) [ 刘泽专、杨志安 2007 物理学报 **56** 1245 ]
- [ 33 ] Albiez M , Gati R , Fölling J , Hunsman S , Cristiani M , Oberthaler M K 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 10402
- [ 34 ] Liu J , Fu L B , Qu B Y , Chen S G , Choi D , Wu B , Niu Q 2002 *Phys. Rev. A* **66** 23404
- [ 35 ] Shimada I , Nagashima T 1979 *Progr. Theor. Phys.* **61** 1605
- [ 36 ] Sigmund K , Sols F 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 60403
- [ 37 ] Dodd R J , Burnett K , Edwards M , Clark C W 1997 *Phys. Rev. A* **56** 587
- [ 38 ] Rokhsar D S 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 2164
- [ 39 ] Fu L B , Liu J 2006 *Phys. Rev. A* **74** 63614

## Phase transition and entanglement entropy of Bose-Einstein condensates in double-well trap under periodic modulation<sup>\*</sup>

Fang Yong-Cui<sup>1†</sup> Yang Zhi-An<sup>1)</sup> Yang Li-Yun<sup>2)</sup>

<sup>1</sup> *School of Science , Jinan University , Jinan 250022 , China*

<sup>2</sup> *Institute of Applied Physics and Computational Mathematics , Beijing 100088 , China*

( Received 19 July 2007 ; revised manuscript received 17 August 2007 )

### Abstract

Dynamical phase transition of Bose-Einstein condensates ( BEC ) in double-well trap with external periodic modulation applied to the interaction term is investigated in this paper. Particularly , phase transition to chaos is studied. It is found that , when resonance between the modulation frequency and the natural frequency of the system happens , the system turns to instability ( chaos ) at certain values of the parameters. In the chaotic region , distribution of particles is random , and the average of population difference fluctuates around zero. Especially , chaos can be manifested by the entanglement entropy. In the chaotic zone , both of the average entanglement entropies approach to their maxima.

**Keywords** : Bose-Einstein condensate ( BEC ) , double-well , chaos , entanglement entropy

**PACC** : 0365 , 0155 , 7335

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 10474008 , 10604009 ) and Science and Technology Fund of China Academy of Engineering Physics.

<sup>†</sup> E-mail : fangyongcui@126.com