

量子 Harper 模型的量子计算鲁棒性 与耗散退相干

叶 宾^{1)†} 须文波¹⁾ 顾斌杰²⁾

1) (江南大学信息工程学院, 无锡 214122)

2) (江南大学通信与控制工程学院, 无锡 214122)

(2007 年 4 月 29 日收到, 2007 年 5 月 24 日收到修改稿)

运用量子轨迹和量子 Monte Carlo 仿真的方法, 研究耗散退相干对周期驱动的量子 Harper (quantum kicked Harper, QKH) 模型量子计算的影响. 数值仿真结果表明, 一定强度的耗散干扰将破坏 QKH 特征状态的动态局域化以及相空间的随机网结构. 以相位阻尼信道噪声模型为例分析了保真度的衰减规律以及可信计算时间尺度. 与静态干扰相比, 在干扰强度小于某一阈值时, 耗散干扰下的可信计算时间尺度随量子比特的增加而快速下降, 而在干扰强度大于该阈值时, 静态干扰下的可信计算时间尺度下降更快.

关键词: 量子计算, 量子 Harper 模型, 主方程, 量子 Monte Carlo 方法

PACC: 0367, 7115Q, 0545

1. 引 言

自从物理学家 Feynman 提出量子计算和量子计算机的概念, 特别是 Shor 大数质因子分解算法^[1]和 Grover 量子搜索算法^[2]以来, 人们对量子计算及其应用研究表现出极大的兴趣, 在这一领域的理论研究和物理实现上都取得了显著的进步^[3-8]. 但是量子比特之间以及量子系统与外部环境之间的相互作用等严重影响了量子计算的可控性和可操作性, 制约了量子计算技术的进一步发展^[9-11]. 因此研究各种噪声对量子计算的影响以及如何克服噪声带来的负面效应具有重要的意义.

对 Grover 量子搜索算法等的仿真研究表明, 量子比特之间存在的静态干扰比随机噪声干扰更容易破坏量子计算的稳定性^[12]. Frahm 等^[13]使用随机矩阵理论 (random matrix theory, RMT) 系统分析了静态干扰对周期驱动的量子帐篷映射 (quantum tent map) 的影响. 文献^[14]详细研究了量子 Harper (quantum kicked Harper, QKH) 模型在规则运动和混沌运动时的鲁棒性, 并比较了随机噪声干扰和静态干扰时的保真度衰减规律. 在分析噪声对这些模型量子计算

的影响时, 通常假定量子系统与外部环境完全隔离, 从而保证了系统的酉演化性质. 然而在量子计算的物理实现中, 量子系统不可避免地存在与外部环境的耦合, 这种耦合作用将导致量子系统的部分信息流入环境, 使系统产生耗散退相干, 最终导致不可信的计算结果.

开放量子系统的耗散退相干通常会使系统从初始的纯态演化为混合态 (在某些情况下, 也可能从混合态转变为纯态), 因此需要使用密度矩阵描述系统状态的演化. 在开放量子系统具有 Markov 性质的情况下, 表征密度矩阵这种非酉演化的动力学方程是 Lindblad 形式的主方程^[15]. 对于一个有 n_q 个量子比特的量子系统, 其 Hilbert 空间维数为 $N = 2^{n_q}$. 当 $n_q > 10$ 时, 直接求解 N 维量子状态的主方程将会非常困难. 我们使用在量子光学等领域经常使用的量子 Monte Carlo 方法^[16-18]数值求解主方程, 它使用量子轨迹方法对系统多次随机演化后的状态求均值计算可观测量的数值结果, 因此能够有效地分析多量子比特组成的耗散系统. Carlo 等^[19, 20]使用量子轨迹的方法研究耗散量子干扰下量子隐形传态和量子面包师变换 (quantum baker's map) 仿真算法的稳定性. Zhurov 等^[21]分析了 Grover 量子搜索算法的耗散

和退相干,并总结出其保真度衰减的规律. Lee 等^[22]研究了量子锯齿映射(quantum sawtooth map)的量子仿真算法在幅值阻尼信道噪声模型下的耗散和退相干.为了研究耗散干扰对 QKH 模型量子计算的影响,本文运用量子轨迹方法详细分析了相位阻尼信道下保真度衰减以及模型相空间结构的变化,进一步使用 von Neumann 熵等分析了耗散干扰改变系统纯态的程度,并且讨论了耗散干扰对 QKH 模型一些独特的量子特性(例如 QKH 的反常扩散现象和特殊的随机网结构等)的影响,最后比较了静态干扰和耗散干扰对 QKH 量子计算可信计算时间尺度的不同程度影响.

2. QKH 量子计算的耗散干扰与量子轨迹

在与外部环境完全隔离的理想情况下, QKH 模型的波函数 $|\psi\rangle$ 的酉演化方程为

$$\begin{aligned} |\psi_{n+1}\rangle &= \hat{F} |\psi_n\rangle \\ &= e^{-iL\cos(\hat{h}\hat{p})\gamma\hbar} e^{-iK\cos(\hat{\theta})\gamma\hbar} |\psi_n\rangle, \end{aligned} \quad (1)$$

式中 \hat{F} 为单周期演化算符(Floquet 算子), \hat{h} 和 $\hat{\theta}$ 分别为动量和位置算符, $\hat{h} = -i\partial/\partial\theta$. 在经典极限下, QKH 模型对应的离散映射方程是

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + K\text{sr}(\theta_n), \\ \theta_{n+1} &= \theta_n - L\text{sr}(p_{n+1}). \end{aligned} \quad (2)$$

根据参数 K 和 L 的变化, QKH 模型表现出复杂的动力学行为:当 $K=L \rightarrow 0$ 时,系统在经典极限下是可积的,随着 K, L 的增大,相空间中会出现混沌, KAM 环面被不断破坏,规则运动和混沌运动同时存在;当 $K=L > 0.63$ 时,出现大范围混沌运动. QKH 模型具有一些特殊的量子特性,例如它具有分形性质的能谱^[23]、反常扩散现象^[24]以及特殊的“随机网”结构^[25]等.

封闭 QKH 模型的量子仿真算法可以概述为^[14]

1) 选择 \hat{p} 的本征态 $|p\rangle$ 与量子寄存器基态一一对应.

2) 使用量子傅里叶变换(QFT)把波函数 $|\psi\rangle$ 从 p 表象转化为 θ 表象表示.

3) 在 θ 表象下, $\hat{U}_\theta = e^{-iK\cos(\hat{\theta})\gamma\hbar}$ 为对角阵. 使用短时间片分解算法近似计算 \hat{U}_θ 中的余弦函数,近似计算的精度由时间片的个数 n_s 控制.

4) 使用 QFT 逆变换把 $|\psi\rangle$ 转化为最初的 p 表

象. 此时 $\hat{U}_p = e^{-iL\cos(\hat{h}\hat{p})\gamma\hbar}$ 为对角阵. 近似计算 \hat{U}_p 的方法和第 3) 步相同.

5) 用单比特和双比特量子门组成的量子线路实现这些对角阵和 QFT.

实现该量子仿真算法只需要附加一位量子比特,对系统进行一次迭代至多需要 $n_g = n_q^2 + (4n_q + 18)n_s + 6n_q$ 个基本量子门. 同经典仿真算法相比, QKH 的量子仿真算法在多数情况下可以获得平方加速,而且仅需要几个量子比特就可以有效地计算模型的特征量.

由于量子系统不可避免的要与周围的环境产生交互作用,因此使用开放的 QKH 模型更加接近量子计算的物理实现. 开放量子系统的部分信息将会流入外部环境,例如一个光子通过波导传播发生的随机散射或者原子自发地发射一个光子等,从而导致量子系统的耗散和退相干. 此时波函数 $|\psi\rangle$ 不再保持其酉演化性质,所以把 QKH 与环境的这种交互作用看作模型的耗散干扰. 考虑到环境的自由度非常大,信息只是单向的流入环境而没有反馈,在 Markov 近似的情况下,开放量子系统的状态演化由 Lindblad 形式的主方程描述:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -\frac{i}{\hbar} [H_s, \rho] \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\mu} \{L_{\mu}^{\dagger} L_{\mu} \rho\} + \sum_{\mu} L_{\mu} \rho L_{\mu}^{\dagger}, \end{aligned} \quad (3)$$

式中 ρ 是系统的密度矩阵, H_s 为系统的哈密顿量, $[\cdot, \cdot]$ 和 $\{\cdot, \cdot\}$ 分别表示对易式和反对易式, L_{μ} ($\mu = 1, \dots, n_q$) 为 Lindblad 算符. 令

$$H_{\text{eff}} = H_s - (\hbar/2) \sum_{\mu} L_{\mu}^{\dagger} L_{\mu},$$

则主方程(3)可以简化为

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [H_{\text{eff}} \rho - \rho H_{\text{eff}}^{\dagger}] + \sum_{\mu} L_{\mu} \rho L_{\mu}^{\dagger}, \quad (4)$$

此时主方程右边第一项可以看作密度矩阵 ρ 在哈密顿量 H_{eff} 作用下的演化,而第二项的作用是发生状态的量子跃迁(quantum jump). 对初始状态为 $\rho(t_0) = |\psi(t_0)\rangle\langle\psi(t_0)|$ 的纯态,经过 dt 时间,演化为混合态:

$$\begin{aligned} \rho(t_0 + dt) &= (1 - \sum_{\mu} dp_{\mu}) |\psi_0\rangle\langle\psi_0| \\ &\quad + \sum_{\mu} dp_{\mu} |\psi_{\mu}\rangle\langle\psi_{\mu}|, \end{aligned}$$

式中

$$|\psi_0\rangle = \frac{(1 - iH_{\text{eff}} dt/\hbar) |\psi(t_0)\rangle}{\sqrt{1 - \sum_{\mu} dp_{\mu}}}$$

为系统在哈密顿量 H_{eff} 作用下的演化状态,系统处于该状态的概率为 $1 - \sum_{\mu} dp_{\mu}$. 同时,系统有 dp_{μ} 的概率处于某一跃迁状态 $|\psi_{\mu}\rangle$,

$$|\psi_{\mu}\rangle = \frac{L_{\mu} |\varphi(t_0)\rangle}{\|L_{\mu} |\varphi(t_0)\rangle\|}.$$

为了研究 QKH 模型量子计算中的耗散和退相干,耗散干扰作用于构成理想 QKH 量子仿真算法任意一对相邻的量子门之间. 密度矩阵在经过理想 QKH 仿真算法中任一基本量子门进行酉演化后,按照主方程(3)继续进行非酉演化,并且有 $H_s = 0$, Lindblad 算符的形式取决于具体的耗散干扰噪声模型^[19].

当 n_q 较大时,由于 Hilbert 空间维数 N 的指数增长,对于复杂的非线性系统通常无法得到主方程(3)的解析解,即使进行直接的数值求解都非常困难. 使用量子 Monte Carlo 的方法研究开放量子系统则比较方便^[16,19]. 其方法是根据上述主方程对状态 $|\varphi(t_0)\rangle$ 的演化规律,首先在 $[0, 1]$ 内生成一均匀分布的随机数 δ ,当 $\delta > \sum_{\mu} dp_{\mu}$ 时系统经过自由演化的终态为 $|\psi_0\rangle$,而当 $0 \leq \delta \leq dp_1$ 时状态跃迁为 $|\psi_1\rangle$, $dp_1 \leq \delta < dp_1 + dp_2$ 时跃迁为 $|\psi_2\rangle$,依次类推. 仿真中 N 维系统状态 $|\psi\rangle$ 的一次演化称为一个量子轨迹,因为无需计算 $N \times N$ 维密度矩阵 ρ 的演化,所以它可以有效的对多量子比特系统进行数值仿真. 在得到 W 个量子轨迹后,密度矩阵可近似为

$$\begin{aligned} \rho(t_0 + dt) \\ \approx \frac{1}{W} \sum_w |\varphi(t_0 + dt)\rangle \langle \varphi(t_0 + dt)|. \end{aligned}$$

仿真实验表明选取 $W = 150$ 时已经能够很好的近似主方程的解. 对某一算符 O 的期望值可近似为 $O = \text{Tr}(O\rho) \approx O_w$,其中 O_w 表示 W 个量子轨迹的系综平均.

3. 开放 QKH 量子计算的鲁棒性

耗散量子噪声造成量子信息的丢失,使量子计算产生不可信的计算结果. 幅值阻尼信道和相位阻尼信道是模拟耗散干扰的两种重要的噪声模型. 幅值阻尼描述开放量子系统能量的耗散,相位阻尼信道描述系统无能量损失下的信息的丢失,是一种纯粹的量子力学性质的噪声. 在单量子比特的情况下,相位阻尼信道使初始密度矩阵 ρ 演化为

$$\rho \rightarrow \begin{pmatrix} \rho_{00} & (1-p)\rho_{01} \\ (1-p)\rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix},$$

式中 p 为噪声信道使量子比特状态发生改变的概率. $\rho_{00}, \rho_{01}, \rho_{10}, \rho_{11}$ 为密度矩阵 ρ 相应位置的元素. 从上式可以看出,在相位阻尼作用下 ρ 的对角线上元素保持不变,而非对角元将随时间逐渐衰减为 0. 在耗散的多比特量子计算中,我们假设在 dt 时间内噪声信道改变一个量子比特状态的概率 $p = \gamma dt/\hbar$,其中 γ 为耗散干扰强度,并且假设所有量子比特状态变化的概率相同. 下面以相位阻尼噪声模型为例,分析耗散干扰引起的各种退相干效应以及耗散干扰对量子混沌仿真算法稳定性的影响等.

3.1. 退相干效应

动态局域化是表征量子混沌运动的现象之一,它是由于量子相干作用抑制了动量的混沌扩散,导致波函数的指数局域化. 根据 K 和 L 的不同, QKH 模型在 (K, L) 二维平面上具有很复杂的局域化现象^[25]. 例如当 $K = 1, L = 5$ 时,演化算符在动量空间的所有特征状态都表现出局域化;当 $K = 4, L = 5$ 时,出现局域化与非局域化状态并存的 QKH 特有现象. 一个方便地表示模型在某一时刻局域化程度的特征量是局域化因子 IPR (inverse participation ratio), 它给出了系统状态幅值在特征状态上分布的个数. 使用量子 Monte Carlo 的方法,近似计算 IPR 为

$$\begin{aligned} \xi &= 1/\sum_p |\varphi(p)|^4 \\ &\approx 1/\sum_p |\varphi(p)|^2 \cdot W. \end{aligned}$$

图 1 示出部分局域化的 QKH 模型的 IPR 随耗散干扰强度和演化次数的变化. 当耗散干扰强度 γ 很小时,局域化程度与理想 QKH 模型基本相同——初始的波包首先做量子扩散,随后量子扩散运动停止并趋于饱和,处于局域化与非局域化并存的状态. 当 γ 增大时,非局域化的特征状态越来越多,波包在相空间扩散的范围增大,局域化现象逐渐被破坏. 当 γ 足够大时,IPR 达到最大的饱和值(该值与模型 Hilbert 空间的维数相等),此时所有特征状态的局域化现象消失. 正是因为动态局域化是一种纯粹的量子相干现象,所以它对耗散干扰引起的退相干才会如此敏感.

相位阻尼信道导致系统由初始的纯态向混合态转变的程度可以用 von Neumann 熵定量的表示^[26,27]. 密度矩阵 ρ 的量子 von Neumann 熵定义为

$$\begin{aligned} S(\rho) &= -\text{Tr}(\rho \log \rho) \\ &= -\sum_x \lambda_x \log \lambda_x, \end{aligned} \quad (5)$$

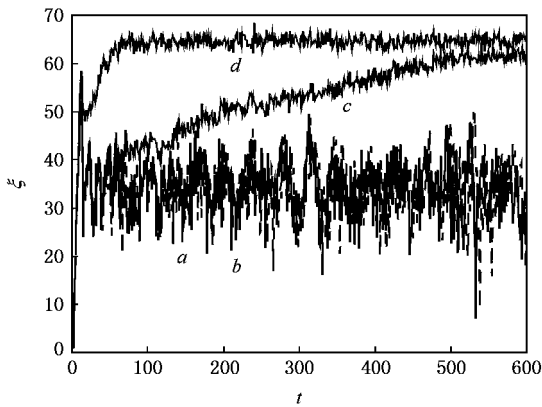


图1 耗散 QKH 的 IPR 随演化次数 t 的变化 $K=4, L=5, n_q=6$ 系统初态为 $|\psi(t_0)\rangle = |p=0\rangle$ 曲线 a, b, c, d 的干扰强度 γ 分别为 $0, 1 \times 10^{-8}, 5 \times 10^{-7}$ 和 1×10^{-5} ; 曲线 a 和 b 因干扰强度太小几乎重叠

式中 λ_x 为密度矩阵 ρ 的特征值. 当系统为纯态时, von Neumann 熵为 0, 当且仅当系统处于完全混合态 I/N 时, von Neumann 熵取其最大值, $S(I/N) = \log_2^N = n_q$. 不同干扰强度下 QKH 密度矩阵的 von Neumann 熵随系统演化次数的增加见图 2. 在 QKH 处于理想演化状态时, von Neumann 熵始终位于最小值 (见图 2 曲线 a , 与横轴重合). 在中等干扰强度时, 随着系统演化次数的增加, von Neumann 熵逐渐增大, 表明密度矩阵由纯态向混合态转变的程度在不断加强 (见图 2 曲线 b). 但是当 von Neumann 熵到达某一最大值后, 随着系统演化其值逐渐减小, 并在某一稳定值附近波动 (如图 2 曲线 c 和 d). 此稳定值对应于相位阻尼噪声模型中密度矩阵的非对角元素随时间而指数地衰减为零时的情形. 从图 2 还可以看出, 干扰强度越大, von Neumann 熵到达稳定值所需的演化次数越少.

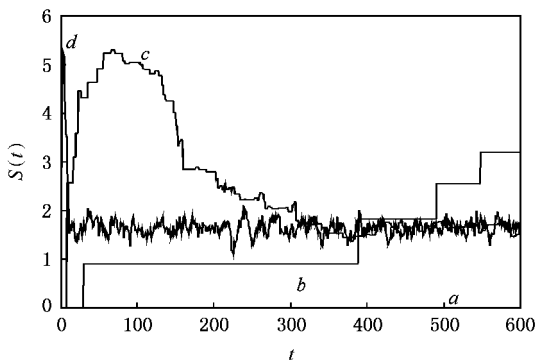


图2 耗散 QKH 密度矩阵的 von Neumann 熵随演化次数 t 的变化 曲线 a, b, c, d 的参数与图 1 相同

3.2. 耗散干扰与量子混沌

当经典 Harper 模型 (2) 为近可积时, 在相空间分界线附近出现大片的可积区域被混沌轨道包围的随机网结构 (见图 3(a)). 使用量子 Monte Carlo 方法, 本文计算了相位阻尼噪声干扰下 QKH 模型的 Husimi 分布函数. Husimi 函数通过定义“量子相空间分布函数”, 可以方便的看出波函数在相空间的变化. 量子态 $|\psi\rangle$ 的 Husimi 函数被定义为^[28]

$$h(\theta_0, p_0) = |\langle \psi_{(\theta_0, p_0)} | \psi \rangle|^2,$$

式中

$$\psi_{(\theta_0, p_0)} = H \sum_p e^{-i(p-p_0)^2/4w^2 - i\theta_0 p} |p\rangle$$

为高斯相干态, 它对应经典相空间中一个中心点位于 (θ_0, p_0) , $|p\rangle$ 表象下宽度为 w 的高斯波包, H 为归一化常数. 图 3 示出一个高斯波包在不同耗散干扰强度下, 其 QKH 随机网结构的扩散情况. 该高斯波包对应相空间中心点附近的一个初始状态, 每个相空间由 8×8 个相格 (cell) 组成, 每个相格的尺寸为 $0 \leq \theta \leq 2\pi, -\pi \leq p < \pi$, 波包宽度 $w = \sqrt{\hbar/2\kappa}$ 有效普朗克常数 $\hbar = 2\pi(8 \times 8)/N$. 从图 3 可以看出, 当耗散干扰强度 γ 较小时, 随机网结构很好地保持了无干扰时的形状, 随着干扰强度 γ 增强, 随机网结构被破坏, 相空间的对称性消失. 由此可见, 耗散干扰易于破坏量子计算的稳定性, 产生不可信的计算结果.

为了研究耗散干扰对量子计算稳定性的影响, 本文定量分析了 QKH 状态保真度随系统演化次数的衰减规律. 对初态为 $|\psi(t_0)\rangle$ 的量子系统, 保真度定义为

$$f(t) = |\langle \psi_\gamma(t) | \psi(t) \rangle|^2,$$

式中 $|\psi(t)\rangle$ 和 $|\psi_\gamma(t)\rangle$ 分别表示 $|\psi(t_0)\rangle$ 在理想演化算符 $U(t)$ 和扰动演化算符 $U_\gamma(t)$ 下经过 t 次迭代后的状态. 使用耗散仿真算法, 根据 W 个量子轨迹得到保真度的近似值为

$$f(t) \approx \frac{1}{W} \sum_w |\langle \psi(t) | \psi_\gamma^w(t) \rangle|^2.$$

因为在耗散量子计算中, 每个量子比特经过一个量子门变换后维持其原状态不变的概率下降为 $\exp(-\gamma)$ 倍, 所以 n_q 个量子比特经过一个量子门操作后保真度下降为 $\exp(-An_q\gamma)$ 倍 (式中 A 为一常数). 经过 n_g 个基本量子门的量子计算后, 得到系统状态的保真度衰减规律为 $f(t) \approx \exp(-\lambda t) =$

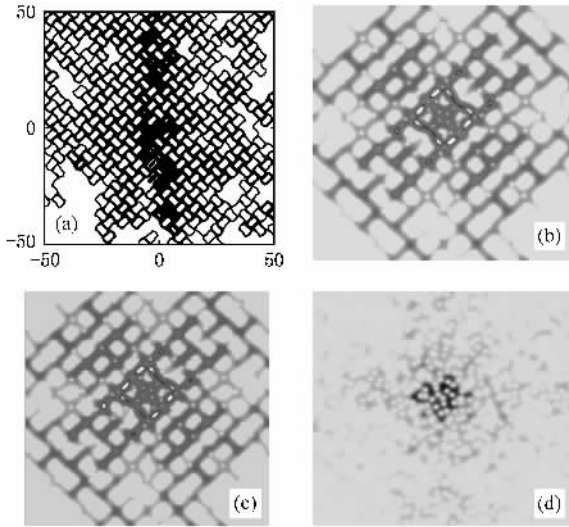


图 3 经典 Harper 模型相空间和开放 QKH 模型 Husimi 分布的随机网结构。在经典 Harper 模型(2)的 (θ, p) 相空间中 (a), $K=L=1.4$ 约 100 个初始相点各迭代 1000 次; QKH 演化终态 $|\psi\rangle$ 的 Husimi 函数在 (θ, p) 空间的分布分别对应耗散干扰强度 $\gamma=0$ (b), $\gamma=1 \times 10^{-8}$ (c) 和 1×10^{-6} (d); $n_q=11, K=L=0.6$, 经过 100 次耗散 QKH 仿真算法迭代; Husimi 分布图中灰色表示相点的概率幅值, 黑色表示相点的幅值最大, 白色表示幅值最小(为了网状结构更清楚, 增大了 Husimi 分布的对比度)

$\exp(-An_q n_g \gamma t)$ 。图 4 示出在规则或混沌运动时, 保真度随演化次数 t 变化的仿真结果。从图 4 可以看出, 对于小的耗散干扰强度 γ , 保真度能够长时间按照近似的指数规律衰减; 当 γ 较大时, 保真度在较短的时间内为指数衰减, 随后由于演化算符能谱的不连续性引起保真度在一较小值附近波动。在耗散量子面包师变换和量子锯齿映射等的量子计算中发现保真度具有同样的指数衰减性质^[21, 22]。因此可以推断保真度随时间的指数衰减是耗散量子系统的一种普适行为。

比较图 4 相同干扰强度下规则运动和混沌运动的保真度曲线还可以看出, 系统的动力学特性对耗散干扰下的保真度衰减几乎没有影响; 这与静态干扰下混沌系统的量子计算更加稳定的特性完全不同^[14]。由于耗散干扰破坏了系统的酉演化性质, 此时保真度衰减不能像静态干扰那样使用干扰算符量子相关函数的线性响应近似理论解释。考虑到主方程中 Lindblad 算符与系统动力特性无关, 而且相邻两个基本量子门之间 $H_s=0$, 系统的保真度和动力学特性无关是合理的。

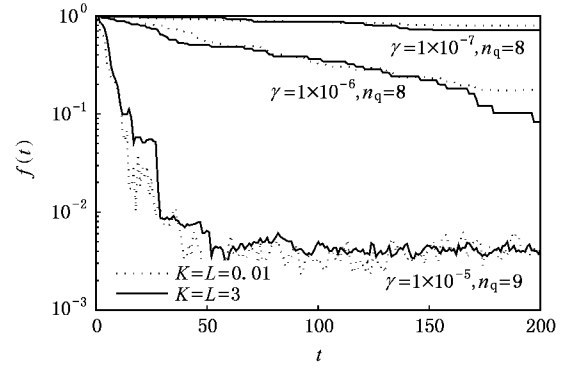


图 4 保真度随耗散 QKH 模型演化次数 t 的衰减曲线。系统初态对应相空间中心点附近一高斯波包, 纵轴 $f(t)$ 取对数坐标

3.3. 耗散干扰和静态干扰

在静态干扰下, QKH 模型的保真度为高斯衰减:

$$f(t) \sim \exp[-n_q(\epsilon n_g t)^2],$$

其中 ϵ 表示静态干扰强度。如果固定可信计算时间尺度 t_f 对应的保真度阈值为 $f(t_f)=0.9$, 则在静态干扰强度 $\epsilon \leq \epsilon_{ch}$ 时

$$t_f = B(\epsilon n_g n_q^{1/2}),$$

当 $\epsilon > \epsilon_{ch}$ 时

$$t_f = 1(10\epsilon^2 n_q n_g^2),$$

式中 B 为一常数, 静态干扰阈值为^[13]

$$\epsilon_{ch} = 2^{-n_q/2} (n_g n_q^{1/2}).$$

根据耗散干扰时保真度的指数衰减规律 $f(t) \approx \exp(-An_q n_g \gamma t)$ 得到可信计算时间尺度 t_f 为

$$t_f \approx 1(n_q n_g \gamma). \quad (6)$$

因此当 $\gamma = \epsilon \leq \epsilon_{ch}$ 时, 耗散干扰下的 t_f 随 γ 的变化与静态干扰时相同, 但是耗散干扰下 t_f 随 n_q 的增大而减小的比静态干扰时快, 此时耗散干扰比静态干扰具有较大的危害性。当 $\gamma = \epsilon > \epsilon_{ch}$ 时, 耗散干扰下的可信计算时间尺度 t_f 随 n_q 或 γ 的增加而减小的比静态干扰时慢, 此时静态干扰更易于破坏量子计算稳定性。

QKH 量子仿真算法在静态干扰存在的情况下, 仍然能够长时间精确模拟系统的混沌运动, 并且在适度的干扰强度下表现出状态的可逆性^[14]。图 5 给出 QKH 模型相空间一个高斯波包在耗散干扰下经过 30 次正向迭代和 30 次反演迭代后的 Husimi 分布。可以看出, 无论是规则运动还是混沌运动, 在耗散干扰下初始状态经过进一步反演后的 Husimi 分

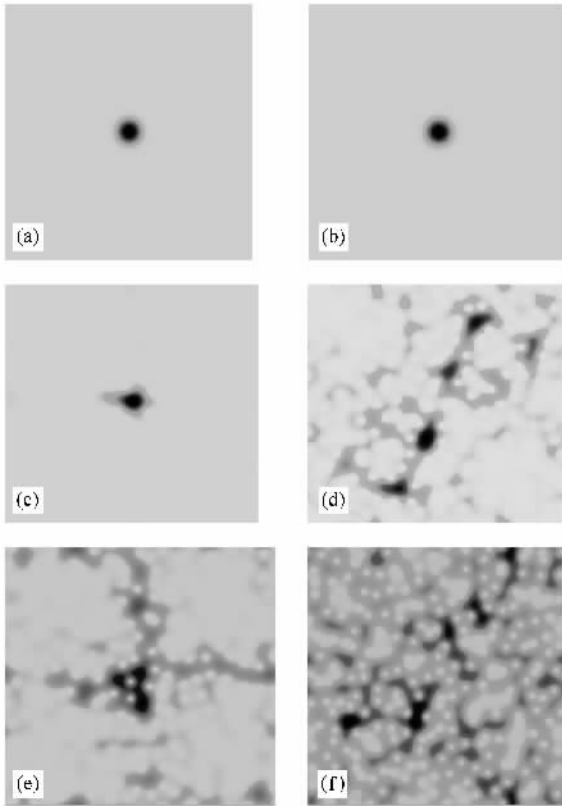


图5 耗散 QKH 在规则运动 (a)(c)(e) ($K=L=0.01$) 和混沌运动 (b)(d)(f) ($K=L=3$) 时的 Husimi 函数在 (θ, p) 空间 ($\theta \in [0, 2\pi), p \in [-\pi, \pi)$) 的分布 (a)(b) 显示系统初态对应相空间的中心点 (c)(d) 为经过 30 次 QKH 迭代的 Husimi 分布 (e), (f) 为对 (c)(d) 状态进行 30 次反演迭代; $n_a = 8, \gamma = 1.5 \times 10^{-6}$

布不仅没有返回到初始状态,反而比反演迭代前具有更强的遍历性.因此耗散干扰下不存在状态的可逆性.其原因在于耗散干扰破坏了量子 QKH 的酉演化性质,扰动态与未扰态之间的距离无法保持造成的.

4. 结 论

量子系统与外部环境的相互作用导致系统的耗散和退相干.使用量子 Monte Carlo 方法对开放 QKH 模型在相位阻尼噪声模型下的研究表明,退相干作用将破坏 QKH 的动态局域化现象和相空间中的随机网结构.和静态干扰相比,在干扰强度较小时耗散干扰更容易影响量子计算的稳定性.由于耗散干扰是一种非酉性质的干扰量,它导致量子计算在适度干扰强度下的可逆性丢失,并且无法长时间稳定地模拟量子混沌系统.从耗散干扰的退相干效应和耗散干扰下量子计算保真度衰减规律以及可信计算时间尺度的分析可以看出,耗散干扰对量子计算有较强的负面影响,因此在设计高可靠性的大规模量子计算时必须对耗散干扰加以充分考虑.

- [1] Shor P W 1994 *Proc. 35th Annual Symposium on the Foundations of Computer Science* (New York : IEEE Press) p124
- [2] Grover L K 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 325
- [3] Nielsen M A , Chuang I L 2000 *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge : Cambridge University Press)
- [4] Zhao Z , Chen Y A , Zhang A N , Yang T , Briegel H J , Pan J W 2004 *Nature* **430** 54
- [5] Zhang Y , Liu D , Long G L 2007 *Chin. Phys.* **16** 324
- [6] Huang Y F , Ren X F , Zhang Y S , Duan L M , Guo G C 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 240501
- [7] Zhu J M , Wang S J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5018 (in Chinese) [祝敬敏、王顺金 2006 物理学报 **55** 5018]
- [8] Yan S B , Liu T , Geng T , Zhang T C , Peng K C , Wang J M 2004 *Chin. Phys.* **13** 1669
- [9] Georgeot B , Shepelyansky D L 2000 *Phys. Rev. E* **62** 3504
- [10] Georgeot B , Shepelyansky D L 2000 *Phys. Rev. E* **62** 6366
- [11] Zurek W H 2003 *Rev. Mod. Phys.* **75** 715
- [12] Shapira D , Mozes S , Biham O 2003 *Phys. Rev. A* **67** 42301
- [13] Frahm K M , Fleckinger R , Shepelyansky D L 2004 *Eur. Phys. J. D* **29** 139
- [14] Ye B , Gu R J , Xu W B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3709 (in Chinese) [叶 宾、谷瑞军、须文波 2007 物理学报 **56** 3709]
- [15] Lindblad G 1976 *Commun. Math. Phys.* **48** 119
- [16] Molmer K , Castin Y 1996 *Quantum Semiclass. Opt.* **8** 49
- [17] Xu S H , Li Y M , Lou L R , Sun Z W 2005 *Chin. Phys.* **14** 382
- [18] Xiao P , Zhang Z M , Sun X , Ding Z J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5803 (in Chinese) [肖 沛、张增明、孙 霏、丁泽军 2006 物理学报 **55** 5803]
- [19] Carlo G G , Benenti G , Casati G , Monasterio C M 2004 *Phys. Rev. A* **69** 62317
- [20] Carlo G G , Benenti G , Casati G 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 257903
- [21] Zhirov O V , Shepelyansky D L 2006 *Eur. Phys. J. D* **38** 405
- [22] Lee J W , Shepelyansky D L 2005 *Phys. Rev. E* **71** 56202
- [23] Artuso R , Casati G , Shepelyansky D L 1992 *Phys. Rev. Lett.* **68** 3826
- [24] Lima R , Shepelyansky D L 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 1377

- [25] Levi B , Geogot B 2004 *Phys. Rev. E* **70** 56218 [28] Terraneo M , Geogot B , Shepelyansky D L 2005 *Phys. Rev. E*
[26] Wehrl A 1978 *Rev. Mod. Phys.* **50** 221 **71** 6621
[27] Wang T B , Fang M F , Hu Y H 2007 *Chin. Phys.* **16** 111

Robust quantum computation of the quantum kicked Harper model and dissipative decoherence

Ye Bin^{1)†} Xu Wen-Bo¹⁾ Gu Bin-Jie²⁾

¹⁾ *School of Information Technology , Southern Yangtze University , Wuxi 214122 , China)*

²⁾ *School of Communication and Control Engineering , Southern Yangtze University , Wuxi 214122 , China)*

(Received 29 April 2007 ; revised manuscript received 24 May 2007)

Abstract

The effects of the dissipative decoherence on the quantum computation of the quantum kicked Harper (QKH) model are investigated using the quantum trajectory approach and the quantum Monte Carlo method. The simulation shows that the dynamical localization for the QKH model and the stochastic web in phase space are destroyed by moderate levels of dissipation. Taking the phase damping channel as the noise model , the universal law for fidelity decay and the timescales of reliable computation are analyzed. Compared with the static imperfections , the timescales for reliable computation of the dissipative system drop more quickly with the increase of the number of qubits when the decay rate is under a certain threshold. While above the threshold , the timescales drop more quickly in the presence of static imperfections.

Keywords : quantum computation , quantum kicked Harper , master equation , quantum Monte Carlo method

PACC : 0367 , 7115Q , 0545