第 57 卷 第 2 期 2008 年 2 月
1000-3290/2008/57(02)/0731-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57,No.2,February,2008

二维 Logistic 映射的混沌控制*

王兴元† 王明军

(大连理工大学电子与信息工程学院,大连 116024)

(2007 年 4 月 20 日收到;2007 年 5 月 14 日收到修改稿)

基于离散系统的稳定性判据,利用反馈法将处于混沌态的二维 Logistic 映射控制在低周期态.同时设计控制方案将该动力系统的第一次分岔准确控制在指定参数位置.数值模拟结果验证了本方法的有效性.

关键词:二维 Logistic 映射,混沌控制,分岔
PACC:0545,0555

1. 引 言

Logistic 映射是 May 在"Nature"上发表的一篇影响甚广的综述中提出的[1].后来 Feigenbaum 发现 Logistic 映射是通过倍周期分岔到达混沌的[2].在此基础上,人们研究了二维映射的分岔和混沌现象及其在生态学等领域中的应用[3—15].二维映射起着从一维到高维的衔接作用,对二维映射中混沌现象和混沌控制的研究有助于认识和控制更复杂的高维动力系统的性态.针对离散系统的动力学控制主要包括不稳定周期轨道的镇定[16—18]和延迟分岔[18—22]两个方面.本文利用反馈方法将处于混沌态的二维 Logistic 映射控制在低周期态,并基于离散系统的稳定性判据分析其分岔特性,设计相应的控制器使之能够在指定参数位置发生第一次分岔.

2. 对二维 Logistic 映射低周期轨道的控制

根据 Euler 方法,Logistic 方程 $\dot{x} = x(1-x)$ 可由如下差分方程经迭代求解:

$$x_{n+1} = x_n + hx_n(1-x_n)\,(h>0), \tag{1}$$

若令 $u_{n+1} = hx_n/(1+h)$,$r = 1+h$,则(1)式可改写为 Logistic 映射:

$$u_{n+1} = ru_n(1-u_n). \tag{2}$$

考虑具有一次耦合项的二维 Logistic 映射

$$u_{n+1} = ru_n(1-u_n) + (r-1)v_n,$$
$$v_{n+1} = rv_n(1-v_n) + (r-1)u_n, \tag{3}$$

若再令 $v_{n+1} = hy_n/(1+h)$,可得到如下二维 Logistic 映射[15]:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h(x_n - x_n^2 + y_n),\\ y_{n+1} &= y_n + h(y_n - y_n^2 + x_n). \end{aligned} \tag{4}$$

当 $h\in[0.45, 0.686]$ 时,选取初始点 $(x_0, y_0) = (0.4, 0.5)$,得到分岔图如图 1 所示.由图 1 可知,在 $h = 0.5$ 附近,系统(4)发生了倍周期分岔;在 $h = 0.6$ 附近,系统(4)发生了 Hopf 分岔.显然,当 $0.6 < h \leqslant 0.686$ 时,系统(4)处于混沌状态.

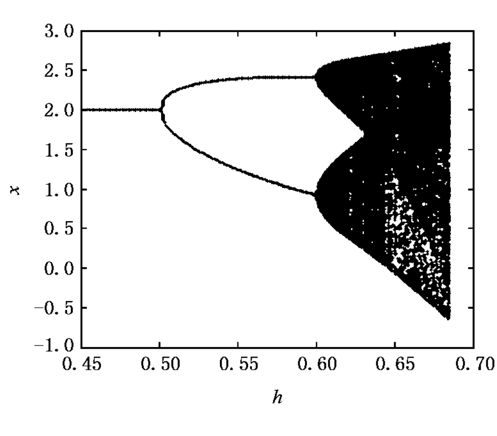

图 1 $h\in[0.45, 0.686]$ 时,系统(4)的分岔图

设受控二维 Logistic 映射为

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h(x_n - x_n^2 + y_n) + u_1,\\ y_{n+1} &= y_n + h(y_n - y_n^2 + x_n) + u_2. \end{aligned} \tag{5}$$

这里

* 国家自然科学基金(批准号:60573172)和辽宁省教育厅高等学校科学技术研究项目(批准号:20040081)资助的课题.

† E-mail:wangxy@dlut.edu.cn

$$u_1 = k_1 \prod_{j=1}^{p} (x_n - \hat{x}_j),$$

$$u_2 = k_2 \prod_{j=1}^{p} (y_n - \hat{y}_j). \tag{6}$$

其中，k_1，k_2 为反馈系数，p 为待镇定的轨道数，($\hat{x}_j$，$\hat{y}_j$)表示 p 周期轨道中第 j 个不稳定周期点. 依据轨道的稳定性判据[16,17]，易得如下定理：

定理 1　若系统(5)在单周期点处的 Jacobi 矩阵的特征根(λ_1，λ_2)均满足

$$|\lambda_i| < 1 \quad (i = 1,2), \tag{7}$$

则系统(5)在该单周期点处是稳定的. 对于 n 周期轨道，存在 n 个周期点，若所对应的 n 个 Jacobi 矩阵的乘积的特征根 λ_1，λ_2 满足(7)式，则系统(5)稳定于该 n 周期轨道.

下面我们将使用形如(6)式的控制器将处于混沌状态的二维 Logistic 映射镇定到单周期点和二周期轨道.

2.1. 单周期点的镇定

取 $h = 0.68$，系统(4)处于混沌状态. 易求出系统(4)的不稳定单周期点有两个：(0,0)和(2,2). 由图 1 可见当 $h < 0.5$ 时系统(4)稳定于(2,2)，因此这里只考虑将离散混沌系统(4)镇定于(0,0)这一种情况.

令 $k_1 = k_2 = k$，取 $h = 0.68$，则受控系统(5)变为如下形式：

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + 0.68(x_n - x_n^2 + y_n) + kx_n, \\ y_{n+1} &= y_n + 0.68(y_n - y_n^2 + x_n) + ky_n. \end{aligned} \tag{8}$$

系统(8)在(0,0)处的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{aligned} &J_{(x=0,y=0)} \\ &= \begin{pmatrix} 1.68 - 1.36x + k & 0.68 \\ 0.68 & 1.68 - 1.36y + k \end{pmatrix}_{(x=0,y=0)} \\ &= \begin{pmatrix} 1.68 + k & 0.68 \\ 0.68 & 1.68 + k \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{9}$$

易得该矩阵特征方程为

$$(1.68 + k - \lambda)^2 - 0.68^2 = 0,$$

解得

$$\lambda_1 = 1.68 + 0.68 + k = 2.36 + k,$$
$$\lambda_2 = 1.68 - 0.68 + k = 1 + k.$$

依据定理 1，系统(8)稳定于(0,0)需满足如下不等式：

$$\begin{aligned} |2.36 + k| &< 1, \\ |1 + k| &< 1, \end{aligned} \tag{10}$$

由(10)式得

$$-2 < k < -1.36. \tag{11}$$

由系统(8)的分岔图 2 可见，满足式(11)时，系统(8)稳定于单周期点(0,0)，同时可以看出在 k 取一定范围的值时加入的控制项也会使系统(8)产生新的稳定单周期点.

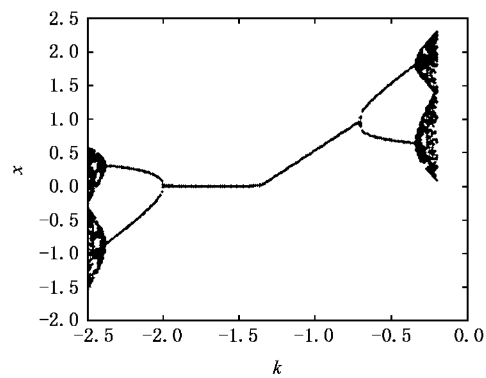

图 2　$h = 0.68$，$k \in [-2.5, -0.2]$时，系统(8)的分岔图

2.2. 二周期轨道的镇定

仍取 $h = 0.68$ 使系统(4)处于混沌状态，计算得不稳定的 2 周期不动点为(0.5882，2.3529)和(2.3529，0.5882)，下面考虑将离散混沌系统(4)镇定于该 2 周期轨道.

令 $k_1 = k_2 = k$，取 $h = 0.68$，则受控系统(5)变为如下形式：

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + 0.68(x_n - x_n^2 + y_n) \\ &\quad + k(x_n - 0.5882)(x_n - 2.3529), \\ y_{n+1} &= y_n + 0.68(y_n - y_n^2 + x_n) \\ &\quad + k(y_n - 2.3529)(y_n - 0.5882). \end{aligned} \tag{12}$$

计算出系统(12)在点(0.5882，2.3529)处的 Jacobi 矩阵为

$$J_{(x=0.5882,y=2.3529)} = \begin{pmatrix} 1.68 - 1.36x + k(2x - 2.9411) & 0.68 \\ 0.68 & 1.68 - 1.36y + k(2y - 2.9411) \end{pmatrix}_{(x=0.5882,y=2.3529)}. \tag{13}$$

整理得

$$J_{(x=0.5882,y=2.3529)}=\begin{pmatrix}0.88-1.7647k & 0.68\\ 0.68 & 1.7647k-1.5199\end{pmatrix}. \tag{14}$$

同理可得系统(12)在点(2.3529,0.5882)处的 Jacobi 矩阵为

$$J_{(x=2.3529,y=0.5882)}=\begin{pmatrix}1.7647k-1.5199 & 0.68\\ 0.68 & 0.88-1.7647k\end{pmatrix}. \tag{15}$$

因此有

$$J_{(x=0.5882,y=2.3529)}\times J_{(x=2.3529,y=0.5882)}$$
$$=\begin{pmatrix}(0.88-1.7647k)(1.7647k-1.5199)+0.4624 & 1.1968-2.399992k\\ 2.399992k-2.067064 & (0.88-1.7647k)(1.7647k-1.5199)+0.4624\end{pmatrix}.$$

该矩阵特征方程为

$$((0.88-1.7647k)(1.7647k-1.5199)+0.4624-\lambda)^2-(1.1968-2.399992k)(2.399992k-2.067064)=0, \tag{16}$$

利用 Matlab 进行数值求解，易得到 $|\lambda_1|$，$|\lambda_2|$ 与 k 的关系如图 3 所示，依据定理 1 及图 3 可得 $0.22<k<0.63$ 或 $0.74<k<1.14$ 满足要求. 系统(12)的分岔图 4 与刚才得出的理论结果完全吻合. 从图 4 中还可以看出，加入的控制项在 k 取一定范围的值时会使系统(12)产生新的稳定 2 周期点.

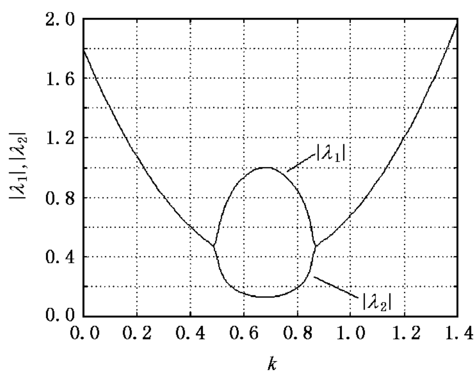

图 3　方程(16)中 $|\lambda_1|$，$|\lambda_2|$ 与 k 的关系

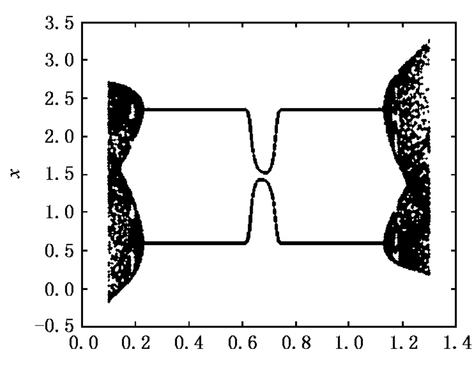

图 4　$h=0.68$，$k\in[0.1,1.3]$ 时，系统(12)的分岔图

同理，对于二维 Logistic 映射中高于 2 的不稳定低周期轨道，可用上述同样的方法进行镇定.

3. 对二维 Logistic 映射分岔的控制

工程问题中往往需要改变动力系统的各种分岔特性，使分岔提前或延后出现或设计合适的参数使之在一定的参数范围内有固定的分岔数[18—22]. 第一个分岔点意味着由稳定态向周期态的转变，因而控制第一个分岔点的位置往往尤为重要. 对于本文中提及的二维 Logistic 映射，则可以设计控制器使第一次分岔发生提前或延迟. 采用线性反馈构造控制器，令受控二维 Logistic 映射为如下形式：

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=x_n+h(x_n-x_n^2+y_n)+kx_n,\\ y_{n+1}&=y_n+h(y_n-y_n^2+x_n)+ky_n.\end{aligned} \tag{17}$$

图 5 为 k 取不同值时系统(17)的分岔图.

通过仿真实验可以知道，当 $k>0$ 时会使系统(17)的第一个分岔点提前，从而混沌区和发散区也相应提前；当 $k<0$ 时会使系统(17)的第一个分岔点延迟，从而混沌区和发散区也相应延迟. 作者通过大量仿真实验发现：离散系统由单周期点向周期态过渡的首个分岔点所对应的 Jacobi 矩阵的特征值一定满足至少其中之一的模等于 1，而其他特征值的模小于 1. 这也与离散系统的轨道稳定性判据[16,17]相符合. 因此在这种情形下可以精确控制第一次分岔点的位置.

假定需要系统(17)在参数 $h=\hat{h}$ 时发生第一次分岔，由图 5 可看出系统(17)不会在单周期点(0,0)分岔，因此需要解出 $h=\hat{h}$ 时另一非零单周期点($\hat{x}$，$\hat{y}$)，则系统(17)在($\hat{x}$，$\hat{y}$)处的 Jacobi 矩阵为

$$J_{(x=\hat{x},y=\hat{y})}=\begin{pmatrix}1+\hat{h}-2\hat{h}\hat{x}+k & \hat{h}\\ \hat{h} & 1+\hat{h}-2\hat{h}\hat{y}+k\end{pmatrix}, \tag{18}$$

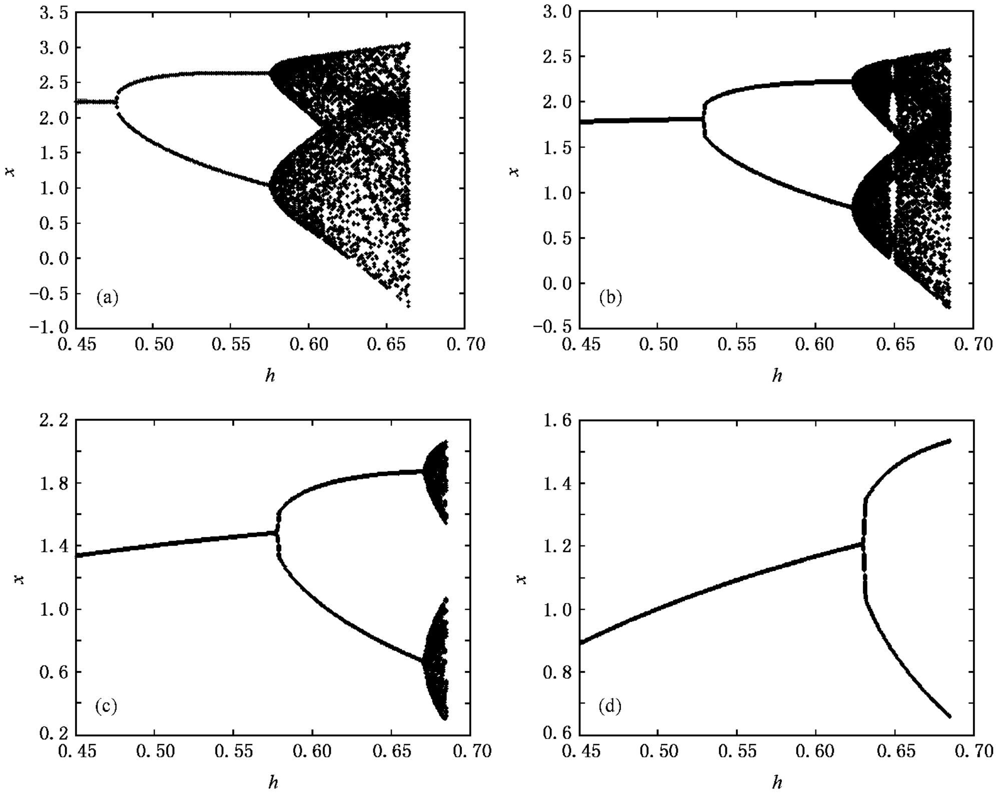

图5 $h\in[0.45,0.686]$，k 取不同值时系统(17)的分岔图 (a) $k=0.1$；(b) $k=-0.1$；(c) $k=-0.3$；(d) $k=-0.5$

该矩阵的特征方程为

$$(1+\hat{h}-2\hat{h}\hat{x}+k-\lambda)\times(1+\hat{h}-2\hat{h}\hat{y}+k-\lambda)-\hat{h}^2=0,\quad(19)$$

只要选取适当的 k 值使方程(19)一个解的绝对值等于1，另一个解的绝对值小于1，就可以将系统(17)的第一次分岔点控制在 $h=\hat{h}$ 处.

1)令第一次分岔点提前，选择 $\hat{h}=0.47$，解得相应的系统(17)的非零单周期点为$(2+2.12766k,2+2.12766k)$，则方程(19)是关于 λ 和 k 的方程.利用Matlab进行数值求解，易得到$|\lambda_1|$，$|\lambda_2|$与 k 的关系如图6所示.

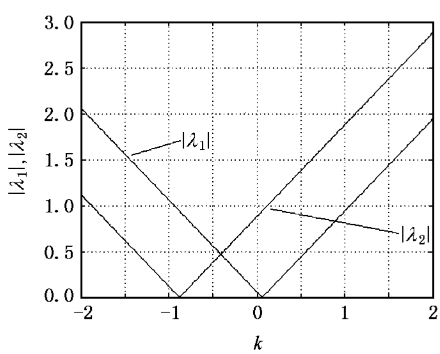

图6 $\hat{h}=0.47$，方程(19)中$|\lambda_1|$，$|\lambda_2|$与 k 的关系

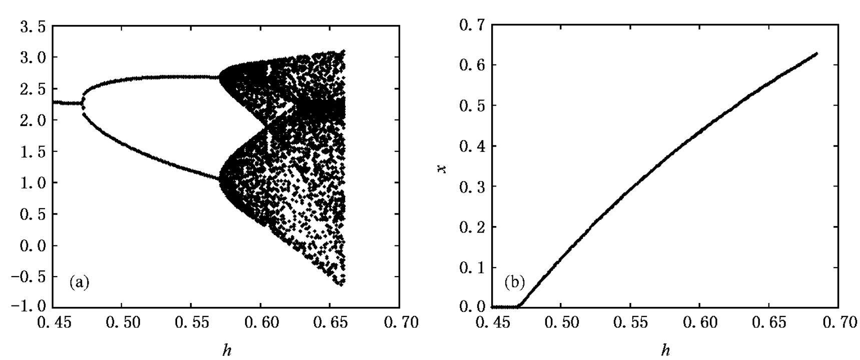

图7 $h\in[0.45,0.686]$，$k=0.12$ 和 $k=-0.94$ 时系统(17)的分岔图 (a) $k=0.12$；(b) $k=-0.94$

满足条件的 k 的数值解为 0.12 和 −0.94，分别做出系统(17)的分岔图如图 7 所示. 由图 7(b)可见，$k=-0.94$ 只是使系统(17)在 $h=0.47$ 处发生了单周期点的改变，却并没有产生分岔，因此不是满足条件的解；由图 7(a)可见，当 $k=0.12$ 时，成功的将系统(17)的第一个分岔点控制在了 $h=0.47$ 处.

2)令第一次分岔点延后，选择 $\hat{h}=0.6$，解得相应的系统(17)的非零单周期点为$(2+1.66667k, 2+1.66667k)$，则方程(19)化为关于 λ 和 k 的方程. 利用 Matlab 进行数值求解，易得到 $|\lambda_1|$，$|\lambda_2|$与 k 的关系如图 8 所示.

满足条件 k 的数值解为 −0.4 和 −1.2，分别做出系统(17)的分岔图如图 9 所示. 由图 9(b)可见，$k=-1.2$ 只是使系统(17)在 $h=0.6$ 处发生了单周期点的改变，并没有产生分岔，因此不是满足条件的解；由图 9(a)可见，当 $k=-0.4$ 时，成功的将系统(17)的第一个分岔点控制在了 $h=0.6$ 处.

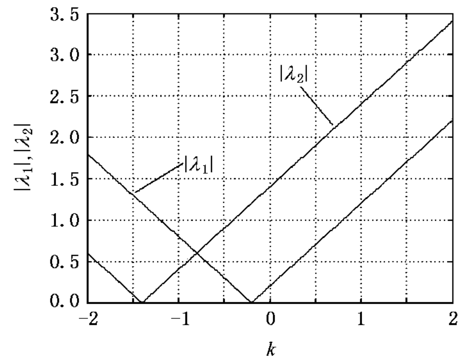

图 8　$\hat{h}=0.6$，方程(19)中$|\lambda_1|$，$|\lambda_2|$与 k 的关系

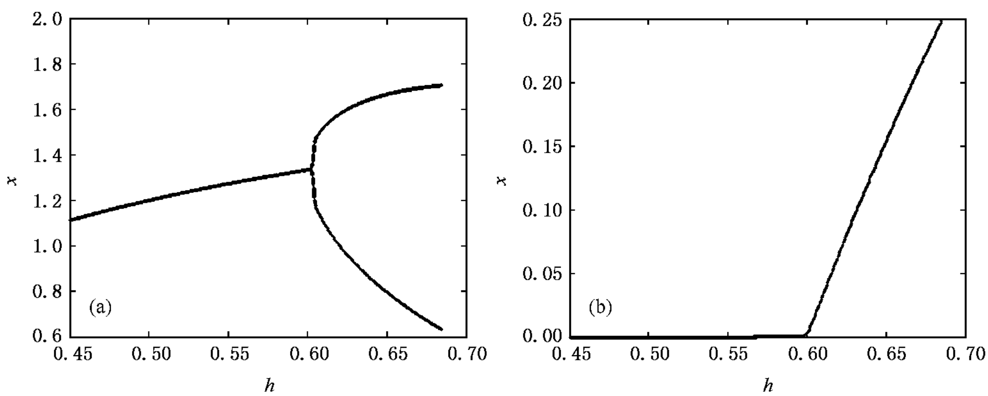

图 9　$h\in[0.45, 0.686]$，$k=-0.4$ 和 $k=-1.2$ 时系统(17)的分岔图　(a)$k=-0.4$；(b)$k=-1.2$

4. 结　　论

本文基于离散系统的稳定性判据成功的将处于混沌态的二维 Logistic 映射控制在低周期态，并分析了第一次分岔点的特性. 针对线性控制器设计了具体的控制方案，不仅能将分岔提前或延迟，而且能准确控制该系统在指定的参数位置发生第一次分岔.

[1] May R M 1976 *Nature* **261** 459

[2] Feigenbaum M J 1978 *J. Stat. Phys.* **19** 25

[3] Wang X Y 2003 *Chaos in the Complex Nonlinearity System* (Bejjing: Electronics Industry Press) chapt. 2 (in Chinese) [王兴元 2003 复杂非线性系统中的混沌(北京：电子工业出版社)第二章]

[4] Kaneko K 1983 *Prog. Theor. Phys.* **69** 1427

[5] Sakaguchi H, Tomita K 1987 *Prog. Theor. Phys.* **78** 305

[6] Chowdhury R A, Chowdhury 1991 *Int. J. Theor. Phys.* **30** 97

[7] Welstead S T, Cromer T L 1989 *Comput. Graph.* **14** 125

[8] Satoh K, Aihara T 1990 *J. Phys. Soc. of Jpn.* **59** 1123

[9] Satoh K, Aihara T 1990 *J. Phys. Soc. of Jpn.* **59** 1184

[10] Hastings A 1993 *Ecology* **74** 1362

[11] Lloyd A L 1995 *J. Theor. Biol.* **173** 217

[12] Udwadia F E, Raju N 1997 *Appl. Math. Comput.* **82** 137

[13] Parthasarathy S, Güémez J 1998 *Ecol. Model.* **106** 17

[14] Zengru D, Sanglier M 1996 *Chaos, Solitons Fract.* **7** 2259

[15] Wang X Y, Luo C 2005 *Acta Mech. Sin.* **37** 346 (in Chinese) [王兴元、骆　超 2005 力学学报 **37** 346]

[16] Chen G, Lai D 1998 *Int. J. Bifur. Chaos* **8** 1585

[17] Fuh C C, Tsai H H 2002 *Chaos, Solitons Fract.* **13** 285

[18] Luo X S, Chen G R, Wang B H, Fang J Q, Zou Y L, Quan H J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 790 (in Chinese) [罗晓曙、陈关荣、汪秉宏、方锦清、邹艳丽、全宏俊 2003 物理学报 **52** 790]

[19] Chen G, Moiola J L, Wang H O 2000 *Int. J. Bifur. Chaos* **10** 511

[20] Tang J S, Ouyang K J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4437 (in Chinese) [唐驾时、欧阳克俭 2006 物理学报 **55** 4437]

[21] Alvarez J, Curiel L E 1997 *Int. J. Bifur. Chaos* **7** 1811

[22] Ren H P, Liu D 2005 *Chin. Phys.* **14** 1352

Chaotic control of the coupled Logistic map*

Wang Xing-Yuan† Wang Ming-Jun

(*School of Electronic & Information Engineering, Dalian University of Technology, Dalian* 116024, *China*)

(Received 20 April 2007; revised manuscript received 14 May 2007)

Abstract

Based on the stability criterion of discrete systems, state feedback is used to stabilize unstable low-periodic orbits of the coupled Logistic map, and a new scheme is proposed to change the parameter value of the first bifurcation point of this dynamic system optionally. Numerical simulations show the effectiveness of our methods.

Keywords: coupled Logistic map, chaotic control, bifurcation

PACC: 0545, 0555

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60573172) and the Superior University Science Technology Research Project of Liaoning Province, China (Grant No. 20040081).

† E-mail: wangxy@dlut.edu.cn