第 57 卷 第 2 期 2008 年 2 月
1000-3290/2008/57(02)/0737-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57,No.2,February,2008

复系统 Julia 集的同步*

刘树堂 张永平†

(山东大学控制科学与工程学院,济南 250061)

(2007 年 5 月 13 日收到;2007 年 5 月 20 日收到修改稿)

非线性系统中的分形集——Julia 集, 在工程技术中有着十分重要的应用,定义了不同系统间的 Julia 集同步的概念, 并引入一种非线性耦合的方法, 对同一系统不同参数的 Julia 集进行了有效的同步.并以多项式形式和三角函数形式的 Julia 集同步为例验证了该方法的有效性.

关键词:Julia 集, 同步, 分形

PACC:0545, 0555

1. 引 言

自分形诞生以来,它以自身独特的性质为生物学, 物理学等众多领域中的许多复杂现象给以了更好的理解和解释[1—5].法国数学家 Gaston Julia 研究复映射迭代时得到的 Julia 集是分形理论中一个重要的概念[6], 被广泛的应用到物理、生物、工程等领域[7,8],它是非线性领域中一个重要的研究课题, 如基于粒子的动力学特征探讨广义 M-J 集的物理意义, 发现广义 M-J 集的分形结构特征可形象地反映出粒子速度的变化规律, 并指出对于系统

$$z_{n+1} = z_n^q + c$$

的任意 c 值(其中 c 为复数,$q > 1$), 广义 Julia 集给出了速度空间中粒子的所有可能的不稳定周期轨道的闭包[9],如 $c \to 0$ 时, 粒子的速度绝对值为 $v = 1$, 并在下面图 1 给出的势垒顶端作不稳定旋转运动.

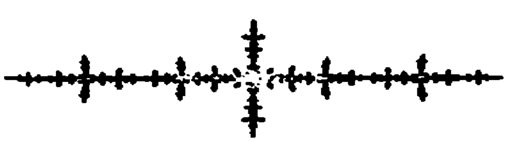

图 1 当 $c \to 0, v = 1, q = 2$ 时, 粒子的不稳定旋转运动

值得注意的是, 非线性系统中的 Julia 集所描述的是一个重要的非线性系统.根据客观的要求,我们往往需要制约非线性吸引域的区域大小以及根据技术问题的实际要求,有时需要不同的两个系统表现出相同或近似的行为和性能. 但十分遗憾的是到目前为止对于分形中 Julia 集的研究仅仅是涉及它的性质和图形的制作问题[10,11], 而对于两个系统间的 Julia 集的讨论是一个目前还没有涉及的新的研究领域.

本文给出了不同系统间的 Julia 集的同步的概念, 并引入一种非线性耦合的方法,对同一系统不同参数的 Julia 集进行了有效的同步. 并以多项式形式和三角函数形式的 Julia 集同步为例验证了该方法的有效性.

2. 基本理论

混沌同步一直是备受关注的课题, 人们在这方面做了大量的工作, 采用各种方法实现混沌同步[12—17],而广义同步控制是混沌控制的一个重要方法.一般地,考虑两个动力学系统:

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = F(X;Y),$$

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = G(X;Y),$$

其中 t 为时间, F, G 可以是不同的函数, $X \in R^m$, $Y \in R^m$,令 $X(t;t_0, X_0)$和 $Y(t;t_0, Y_0)$分别为两系统的解.如果存在 R^m 的子集 $D(t_0)$, X_0, $Y_0 \in D(t_0)$使得当 $t \to \infty$ 时,有

* 国家自然科学基金(批准号:60472112)和全国百篇优秀博士论文专项基金(批准号:200444)资助的课题.

† 通讯联系人.E-mail:ypzhangsd@126.com

$$\| X(t;t_0,X_0) - Y(t;t_0,Y_0) \| \to 0.$$

则称 $\mathrm{d}X/\mathrm{d}t = F(X;Y)$ 和 $\mathrm{d}Y/\mathrm{d}t = G(X;Y)$ 同步，如果 $D(t_0) = R^m$，则称为全局(完全)同步 如果 $D(t_0)$ 是 R^m 的一个子集，即 $D(t_0) \subset R^m$，则称为局部(部分)同步，称 $D(t_0)$ 为同步区域. 全局同步和局部同步属于通常意义下的同步，即

$$X(t;t_0,X_0) = Y(t;t_0,Y_0).$$

当 $X(t;t_0,X_0) = \varphi(Y(t;t_0,Y_0))$(其中 φ 为某种函数关系)，称这种类型的同步为广义混沌同步. 通常意义下的同步(φ 为恒等变换)为广义混沌同步一种特例.

Julia 集由一个复变函数 f 的迭代生成，其 Julia 集 $J(f)$ 可以定义为 f 的斥性周期点集的闭包. 利用 Montel 定理，可以证明下面的对于复变多项式 f 的 Julia 集的等价定义：

$$J(f) = J_0(f) = \{z \in C : \text{函数族} \{f^k\}_{k \geqslant 0} \text{在 } z \text{ 非正规}\}.$$

对复变多项式 f，其 Julia 集具有下面的一些性质：

(i) $J(f)$ 是非空有界的；

(ii) $J(f)$ 是全不变的，即 $J(f) = f(J(f)) = f^{-1}(J(f))$；

(iii) 对每一个正整数 p，$J(f) = J(f^p)$；

(iv) 若 w 是 f 的吸引不动点，则 $\partial A(w) = J(f)$，其中 $A(w)$ 是吸引不动点 w 的吸引域，即 $A(w) = \{z \in C : f^k(z) \to w, (k \to \infty)\}$.

本文讨论的是复数域上系统间的 Julia 集的同步或广义同步情况，根据 Julia 集的定义，给定一组系统参数，其相应的 Julia 集是确定的不变的，这样就使得 Julia 集的同步或广义同步的定义与混沌同步或广义同步有所不同.

给定两个复数域上的系统：

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{1}$$

$$y_{n+1} = g(y_n), \tag{2}$$

当系统参数给定后，其对应的 Julia 集也确定，不妨分别设为 J^*，J. 为了使系统(1)与(2)的 Julia 集关联起来，我们对系统(1)和(2)进行耦合. 在系统(2)中引入耦合项：

$$y_{n+1} = g(y_n) + p(x_n, y_n; k), \tag{3}$$

其中，p 为关于 x_n，y_n 的耦合项，k 为耦合强度. 显然，在耦合系统(3)中当系统参数给定后，对不同的 k 值对应着不同的 Julia 集，记为 J_k. 如果对某常数 k_0(k_0 可为 ∞)，有

$$\lim_{k \to k_0} (J_k \cup J^* - J_k \cap J^*) = \varnothing \tag{4}$$

成立，则称系统(1)与(2)的 Julia 集实现同步.

从 Julia 集同步的定义可以看出，我们是取耦合强度 k 的极限来定义 Julia 集同步的概念的. 事实上，由 Julia 集的定义我们知道 Julia 集 $J(f)$ 与 f 的轨道是紧密相关的，本文就是利用轨道的同步来实现 Julia 集同步的. 在轨道同步中，k 的变化体现了轨道同步的状况，这恰好在耦合系统(3)中体现为其 Julia 集 J_k 的变化同步情况，其中我们取系统(1)和(2)的相同的迭代初始值.

3. Julia 集同步的实现

在(3)式中取耦合项：

$$p(x_n, y_n; k) = k[f(x_n) - g(y_n)],$$

则有

$$y_{n+1} = g(y_n) + k[f(x_n) - g(y_n)]. \tag{5}$$

显然当 $k = 1$ 时，系统(5)则变为系统(1). 由(1)，(5)式有

$$x_{n+1} - y_{n+1} = (1 - k)(f(x_n) - g(y_n)). \tag{6}$$

3.1. 多项式系统的 Julia 集的同步实现

当系统为复变多项式时，由前面所述的性质(i)，可知其 Julia 集可通过迭代计算一个有界区域内的点得到，设该有界区域为 D，则只需考虑 D 中点的迭代. 另外，由性质(ii)可知只需计算迭代轨道均在 D 中的点，这是因为若存在 n_0 使得 $f^{n_0}(z) \notin D$，则由性质(ii)知 $z \notin J$. 因 D 为有界区域，所以存在 $M > 0$，使得 $\forall z \in D$，$|z| < M$.

以典型的复变多项式 $z_{n+1} = z_n^q + c$ 为例，讨论该系统当取不同参数时的 Julia 集的同步情况. 比如在系统(1)，(2)中取复变多项式 $f(x_n) = x_n^q + c_1$，$g(y_n) = y_n^q + c_2$，这里 $c_1 \neq c_2$. 为讨论方便，取 $q = 3$. 由(6)式，有

$$\begin{aligned}
& x_{n+1} - y_{n+1} \\
&= (1 - k)(x_n^3 - y_n^3 + c_1 - c_2) \\
&= (1 - k)[(x_n^2 + x_n y_n + y_n^2)(x_n - y_n) + c_1 - c_2].
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
& | x_{n+1} - y_{n+1} | \\
&\leqslant |1 - k| (3M^2 | x_n - y_n | + | c_1 - c_2 |) \\
&= |1 - k| 3M^2 | x_n - y_n | + |1 - k| | c_1 - c_2 | \\
&\leqslant |1 - k| 3M^2 (|1 - k| 3M^2 | x_{n-1} - y_{n-1} | \\
&\quad + |1 - k| | c_1 - c_2 |) + |1 - k| | c_1 - c_2 | \\
&= (|1 - k| 3M^2)^2 | x_{n-1} - y_{n-1} | \\
&\quad + (1 + |1 - k| 3M^2) |1 - k| | c_1 - c_2 |
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \cdots \\
&\leqslant (|1-k|3M^2)^n |x_1 - y_1| \\
&\quad + (1 + \cdots + (|1-k|3M^2)^{n-1}) |1-k||c_1 - c_2| \\
&= (1 + \cdots + (|1-k|3M^2)^n) |1-k||c_1 - c_2| \\
&= \frac{1-(|1-k|3M^2)^{n+1}}{1-|1-k|3M^2} |1-k||c_1 - c_2|. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

当 $|1-k|3M^2<1$ 时，(7)式右端趋于 $|1-k||c_1-c_2|/(1-|1-k|3M^2)(n\to\infty)$. 显然，此时若 $|1-k|\to 0$，即 $k\to 1$，则有

$$|x_{n+1} - y_{n+1}| \to 0.$$

从而系统(1)与(5)实现轨道同步. 由前面所分析，可知此时满足(4)式，即实现了系统(1)与(5)的 Julia 集的同步.

在 $k\to 1$ 的过程中，由(7)式可以看出耦合系统的耦合程度，即轨道实现同步的程度，从而也是耦合系统的 Julia 集的同步程度. 这从下面的仿真图图 2 和图 3 可看出.

例 1　在系统(1)，(2)中取

$$f(x_n) = x_n^q + c_1, g(y_n) = y_n^q + c_2$$

图 2 为初始 Julia 集，图 3 为系统随 k 的变化其 Julia 集广义同步情况.（图中坐标系的横轴与纵轴分别表示复数的实部与虚部，下同.）

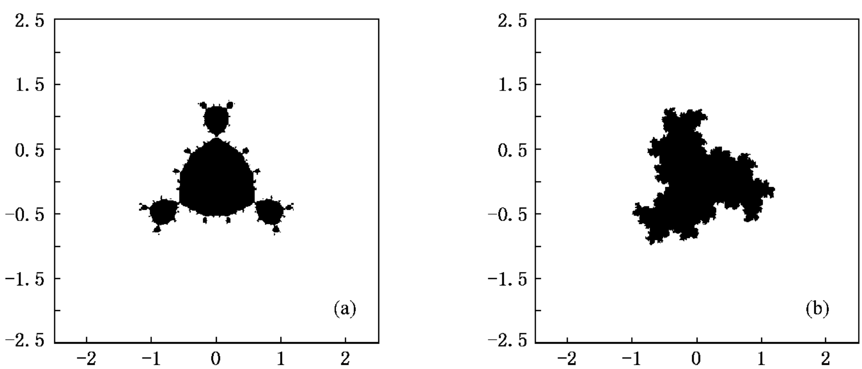

图 2　$q=3$ 时系统的初始 Julia 集　(a) $c_2=\mathrm{i}$；(b) $c_1=-0.5+0.4\mathrm{i}$

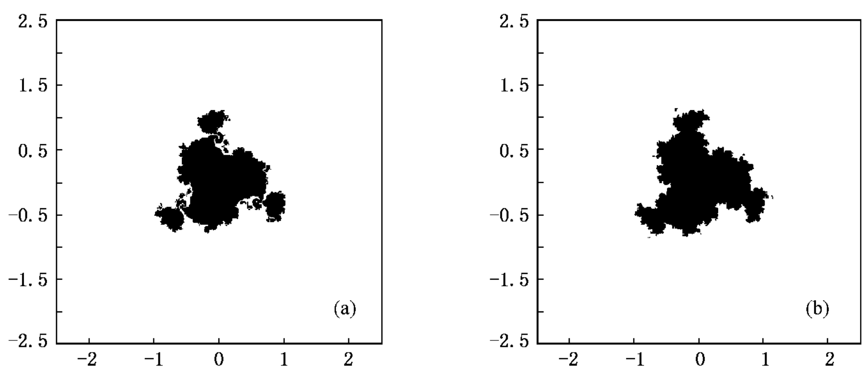

图 3　随 k 值的变化系统 Julia 集的同步情况　(a) $k=0.2$；(b) $k=0.3$

上面分析的是多项式形式映射的 Julia 集的同步，事实上，该方法对其他形式映射的 Julia 集的同步也是有效的.

3.2. 三角函数的 Julia 集的同步实现

以正弦函数为例分析该类 Julia 集的同步情况. 取 $f(x_n)=c_1\sin x_n$，$g(y_n)=c_2\sin y_n$. 由(6)式有

$$
\begin{aligned}
&x_{n+1} - y_{n+1} \\
&= (1-k)[c_1(\sin x_n - \sin y_n) + (c_1 - c_2)\sin y_n].
\end{aligned}
$$

又

$$
\begin{aligned}
|\sin x_n - \sin y_n| &= \left|2\cos\frac{x_n + y_n}{2}\sin\frac{x_n - y_n}{2}\right| \\
&\leqslant 2\left|\sin\frac{x_n - y_n}{2}\right| \\
&\leqslant 2\left|\frac{x_n - y_n}{2}\right| = |x_n - y_n|.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&|x_{n+1} - y_{n+1}| \\
&\leqslant |(1-k)c_1||x_n - y_n| + |1-k||c_1 - c_2| \\
&\leqslant |(1-k)c_1|(|(1-k)c_1||x_{n-1} - y_{n-1}| \\
&\quad + |1-k||c_1 - c_2|) + |1-k||c_1 - c_2| \\
&= |(1-k)c_1|^2 |x_{n-1} - y_{n-1}| \\
&\quad + (1 + |(1-k)c_1|)|1-k||c_1 - c_2|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \quad \cdots \\
&\leqslant |(1-k)c_1|^n |x_1 - y_1| \\
&\quad + (1 + \cdots + |(1-k)c_1|^{n-1}) |1-k||c_1 - c_2| \\
&\leqslant |(1-k)c_1|^n |1-k||c_1 - c_2| \\
&\quad + (1 + \cdots + |(1-k)c_1|^{n-1}) |1-k||c_1 - c_2| \\
&= |1-k||c_1 - c_2| (1 + \cdots + |(1-k)c_1|^n) \\
&= |1-k||c_1 - c_2| \frac{1 - |(1-k)c_1|^{n+1}}{1 - |(1-k)c_1|}. \qquad (8)
\end{aligned}
$$

当$|(1-k)c_1|<1$时，(8)式右端趋于$|1-k||c_1-c_2|/(1-|(1-k)c_1|)$ $(n\to\infty)$. 显然，此时若$|1-k|\to 0$，即 $k\to 1$，则有

$$|x_{n+1} - y_{n+1}| \to 0.$$

从而系统(1)与(5)实现轨道同步. 由前面所分析，可知此时满足(4)式，即实现了系统(1)与(5)的 Julia 集的同步.

在 $k\to 1$ 的过程中，由(8)式可以看出耦合系统的耦合程度，即轨道实现同步的程度，从而也是耦合系统的 Julia 集的同步程度. 这从下面的仿真图图 4 和图 5 可看出.

例 2 在 $f(x_n) = c_1 \sin x_n$，$g(y_n) = c_2 \sin y_n$ 中分别取参数 $c_1 = 1$，$c_2 = \mathrm{i}$. 图 4 为初始 Julia 集，图 5 为系统随 k 的变化其 Julia 集同步情况.

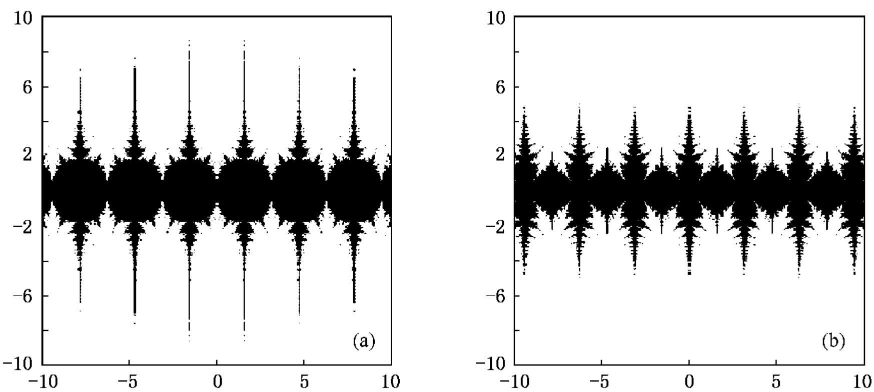

图 4 系统的初始 Julia 集 (a) $c_1 = 1$；(b) $c_2 = \mathrm{i}$

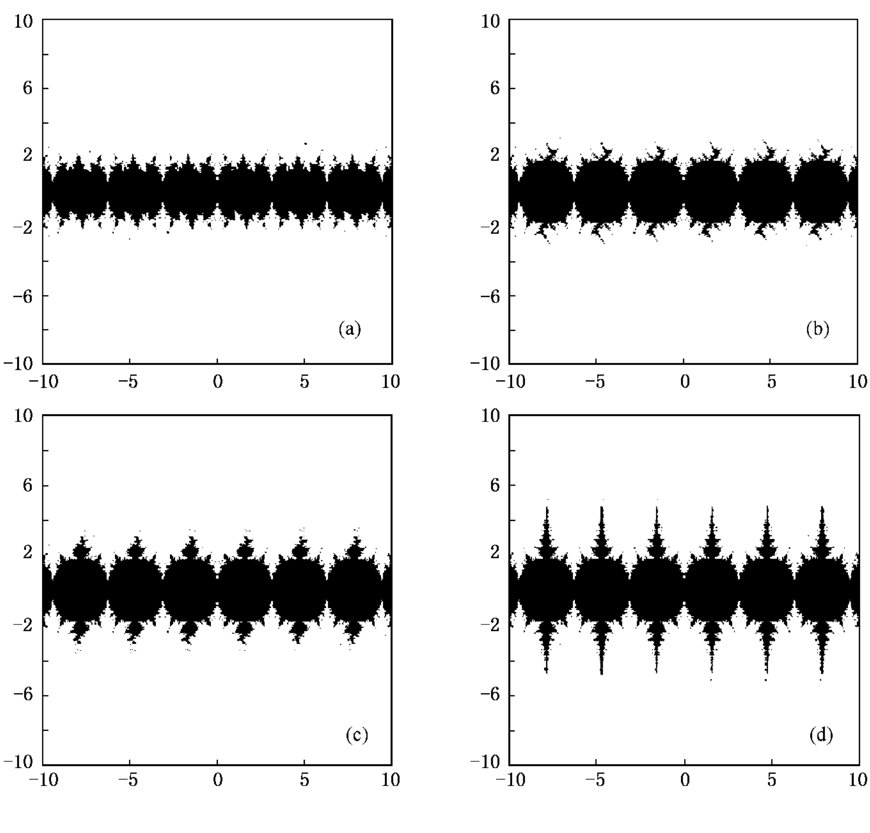

图 5 随 k 值的变化系统 Julia 集的同步情况 (a) $k = 0.1$；(b) $k = 0.4$；(c) $k = 0.6$；(d) $k = 0.9$

由(5)式可有

$$y_{n+1} = (1-k)g(y_n) + kf(x_n),$$

可以看出随 k 的增大，在迭代中起主导作用的是后部分数值 $kf(x_n)$. 当 $k=1$ 时,系统(5)已成为系统(1),此时两系统的 Julia 集完全相同. 由例 1，例 2 的仿真图我们可以清楚的看到引入耦合项的系统(5)的 Julia 集的变化情况，随 k 值的不断增大($k\to 1$)，系统(5)的 Julia 集越来越近似系统(1)的 Julia 集，即有 $\lim\limits_{k\to 1} J_k = J^*$，从而实现了两个系统的 Julia 集的同步.同时也说明我们所取的该非线性耦合的方法在进行 Julia 集同步时的有效性.

4. 结　论

Julia 集是由一个复变函数的迭代生成的，是斥性周期点的闭包，它是分形理论中一个重要的概念，在非线性系统中有着广泛的应用. 本文给出了两个不同系统的 Julia 集同步的概念,并采用非线性耦合的方法,分别以多项式形式和三角函数形式的不同参数的系统的 Julia 集进行了同步.仿真表明我们的方法是可行的、有效的,这将有助于对 Julia 集以及它的应用做进一步的讨论.

[1] Halsey T C，Jensen M H，Kadanoff L P，Procaccia I，Shraiman B J 1986 *Phys*. *Rev*. A **33** 1141

[2] Li Y，Kong X M，Huang J Y 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1346 (in Chinese)［李　英、孔祥木、黄家寅 2002 物理学报 **51** 1346］

[3] Yu H S，Sun X，Luo S F，Wang Y R，Wu Z Q 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 999 (in Chinese)［于会生、孙　霞、罗守福、王永瑞、吴自勤 2002 物理学报 **51** 999］

[4] He T，Zhou Z O 2007 *Acta Phys*. *Sin*. **56** 693 (in Chinese)［贺　涛、周正欧 2007 物理学报 **56** 693］

[5] Sun X，Wu Z Q 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2126 (in Chinese)［孙　霞、吴自勤 2001 物理学报 **50** 2126］

[6] Falconer K 1990 *Fractals Geometry Mathematical Foundations and Applications* (New York：Wiley)

[7] Rammal R 1984 *J*. *de Phys*. (Paris) **45** 191

[8] Biskup M，Borgs C，Chayes J，Kleinwaks，Kotecký R 2000 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **84** 4794

[9] Wang X Y，Meng Q Y 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 388 (in Chinese)［王兴元、孟庆业 2004 物理学报 **53** 388］

[10] Li S 2000 *In*：5*th International Conference on Signal Processing Proceeding* (Beijing：Publishing House Electronic Industry) p285

[11] Lakhtakia A 1987 *J*. *Phys*. A **20** 3533

[12] Shan L，Li J，Wang Z Q 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 3950 (in Chinese)［单　梁、李　军、王执铨 2006 物理学报 **55** 3950］

[13] Liu Z Z，Tian Y T，Song Y 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 3945 (in Chinese)［刘振泽、田彦涛、宋　彦 2006 物理学报 **55** 3945］

[14] Min F H，Wang Z Q 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 4026 (in Chinese)［闵富红、王执铨 2005 物理学报 **54** 4026］

[15] Kocarev L，Parlitz U 1996 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **77** 2206

[16] Kocarev L，Parlitz U 1996 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **76** 1816

[17] Hu G，Qu Z L 1994 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **72** 68

Synchronization of Julia sets of complex systems*

Liu Shu-Tang Zhang Yong-Ping†

(*School of Control Science and Engineering*, *Shandong University*, *Jinan* 250061, *China*)

(Received 13 May 2007; revised manuscript received 20 May 2007)

Abstract

Julia set, being a fractal set in the literature of nonlinear physics, has significance for the engineering applications. In this work, we are the first to define the synchronization of Julia sets between different systems and introduce a nonlinear coupling method to realize the synchronization of Julia sets of the same systems but with different parameters. We also illustrate the effectiveness of our method by the synchronization of Julia sets of polynomial and trigonometric functions respectively.

Keywords: Julia set, synchronization, fractals

PACC: 0545, 0555

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60472112) and a Foundation for the Author of National Excellent Doctoral Dissertation of China (FANEDD) (Grant No. 200444).

† Corresponding author. E-mail: ypzhangsd@126.com