

图胞映射的一种改进方法^{*}

贺 群 徐 伟[†] 李 爽 肖 玉 柱[‡]

(西北工业大学理学院应用数学系, 西安 710072)

(2007 年 5 月 13 日收到, 2007 年 5 月 21 日收到修改稿)

通过引入新的概念, 提出了图胞映射动力系统中瞬态胞的新的分类方法, 基于新的分类方法研究了动力系统中不变流形的胞映射逼近问题, 并结合计算机的计算速度与内存特点, 建立了完成上述压缩分类的有效算法. 通过对典型算例 Henon 映射的应用分析, 证实了该方法的有效性.

关键词: 图胞映射方法, 不变流形, Henon 映射

PACC: 0547, 0545

1. 引 言

非线性系统的动力学特性分析可分为局部分析和全局分析. 局部分析主要关注周期解和解的稳定性, 以及参数变化对解的影响, 而全局分析主要关注各个吸引子及其吸引域的空间位置, 不稳定解的稳定与不稳定流形, 以及参数变化对它们的影响. 由于全局分析能够使人们获得非线性系统的更多信息和认识, 因此对系统进行全局特性分析是一项非常重要工作. 人们有时可以用直接数值积分的方法研究系统的全局性态, 但这通常效率较低, 因此设计一些专门的方法进行全局分析是很必要的.

胞映射法是人们进行全局分析的有力工具, 它最早由 Hsu 在 20 世纪 80 年代提出^[1]. 经过 20 多年的发展, 胞映射法先后有多种版本, 如简单胞映射 (SCM) 法^[1]、广义胞映射 (GCM) 法^[2]、插值胞映射法^[3]、胞参照点映射法^[4]、图胞映射法^[5, 6]、胞映射点映射法^[7], 以及一些改进的胞映射法^[8, 9]等. 各种胞映射法对科学和工程领域中存在的大量实际问题的应用, 极大地促进了人们对非线性科学的研究和认识^[10-16].

SCM 方法由 Hsu 在 1980 年提出^[1], 该方法的基本思想是将连续状态空间离散化为许多小的几何体 (胞). 胞的集合构成胞状态空间并且被整序数所标

识. 对每一个胞的中心点进行短时积分 (映射), 则可以建立该胞与积分结果所达之胞的映射关系, 从而就构造出一个基于胞空间上的映射, 即胞映射. 对简单胞映射系统进行分析, 可求得运动方程的周期解及稳态解的吸引域.

1981 年, Hsu 提出了 GCM 方法^[2]. GCM 延续了 SCM 将状态空间离散为胞空间的思想, 但在建立胞对胞之间映射的过程中采用一个胞可以发出多条轨线, 一个胞可以有多个像胞的方法. 1992 年 Hsu 推广了广义胞映射分析方法^[17], 发现了瞬态过程中有着规律性层次结构, 并将这些结构反映于 Markov 链的转移概率矩阵, 构造了瞬态胞转移概率矩阵内结构的驻址基范式 (domicile-based normal form). 与 SCM 相比, GCM 所反映的动力学特性更为丰富也更为深刻. GCM 不仅可以计算系统的吸引子和吸引域, 还可以确定各吸引子的吸引域边界, 以及吸引子的极限概率分布、奇怪吸引子的空间概率特征、熵演化的不变分布以及 Lyapunov 指数. 1995 年, Hsu 进一步将图论和偏序理论引入到胞映射理论中, 提出了广义胞映射与偏序集 (poset) 和图论数学分支的对应^[5]. 在此基础上, 得到动力系统的全局性质, 建立了动力系统和图、偏序理论联系的统一框架. 在文献 [5] 中, Hsu 还通过一个具体算例给出了算法.

1999 年, 洪灵和徐健学依循 Hsu 的思路, 以集合理论为基础, 通过在胞状态空间上定义二元关系,

^{*} 国家自然科学基金 (批准号: 10472091, 10332030, 10502042) 资助的课题.

[†] E-mail: weixu@nwpu.edu.cn

[‡] 通讯联系人. E-mail: yuzhuxiao@mail.nwpu.edu.cn

建立广义胞映射动力系统与图的对应关系并给出了严格的数学证明,提出了全局分析的广义胞映射图论方法^[6].2001年洪灵在她的博士论文和其后的一些文章中完善了广义胞映射图论方法和相应算法,并且将其应用于激变和模糊等方面的研究,均取得了显著的研究成果^[11,18,19].广义胞映射图论方法比起其他胞映射方法最为显著的优点之一是通过图方法求出胞映射动力系统自循环胞集中的瞬态自循环胞集,进而可以通过对瞬态自循环胞集的研究探求动力系统的不稳定不变集.然而,在对瞬态胞进行分类时,无论是Hsu的广义胞映射方法还是洪灵的广义胞映射图论方法,都没有考虑瞬态自循环胞集对分类的影响.

本文延续Hsu和洪灵的思路,提出了基于自循环胞集(永久自循环胞集和瞬态自循环胞集)的瞬态胞分类方法,给出了相应的算法.借助于该分类方法研究了如何有效地实现动力系统稳定流形和不稳定流形的胞映射逼近,通过对典型算例的应用分析,说明了该方法的有效性.

2. 图胞映射的概念及改进

应用图胞映射方法对动力系统进行全局分析时,首先要将状态空间 R^n 分割成为有限个小的区域(计算单元)——胞(cell),每一个胞与一个整数对应.可以用各种方法生成胞,最为简单直接的方法是将 R^n 中每一个状态分量 x_i ($i=1,2,\dots,n$)分割成为若干个小区域.基于胞的概念,动力系统中状态空间转化为胞空间,状态的转移变为胞之间的转移,即胞映射动力系统,该系统反映了动力系统的行为.通过如下方式可以使胞映射动力系统对应于一个有向图:将每个胞对应于一个有向图的一个顶点,如果两个胞之间存在一步可达关系,则在相应的顶点之间建立一条有向边.从而胞映射动力系统就完全对应于有向图,为应用图论方法对动力系统进行深入分析提供了坚实的基础.

Hsu和洪灵分别建立了各自的有向图分析算法^[5,6].在他们的算法中,首先通过分析有向图得到该图的强连通子图.强连通子图是有向图顶点集合的子集,该集中任何两个顶点可以互达.如果强连通子图中每个顶点的像顶点均属于该集合则称该强连通子图是一个闭强连通子图,该集中的顶点在本文中称之为第一类型的顶点;如果强连通子图

中存在一个顶点的一个像顶点不属于该集合则称该强连通子图为开强连通子图,该集中的顶点我们称之为第二类型的顶点.闭的强连通子图表征动力系统的稳定解(稳定的不动点、周期解、拟周期解、混沌解);开的强连通子图表征系统的不稳定解(周期鞍、混沌鞍).如果有向图的某一顶点不属于任何一个强连通子图,该顶点称为瞬态顶点,所有瞬态顶点构成第三类型顶点.

为了揭示动力系统全局行为,Hsu和洪灵借助驻足概念对第三类型顶点进行了分类.驻足考虑的是第一类型顶点对第三类型顶点分类的影响,即如果一个第三类型顶点最终可达某一第一类型顶点,则称该第一类型顶点所在的闭强连通子图为这个顶点的一个驻足.一个第三类型顶点可以有多个驻足,按照第三类型顶点所具有驻足的数目,第三类型顶点被分为单驻足顶点和多驻足顶点,仅具有一个驻足的顶点称为单驻足顶点,具有多于一个驻足的顶点称为多驻足顶点.具有相同驻足的第三类型顶点构成同一集合,单驻足顶点集合表征动力系统中吸引子的吸引域,多驻足顶点集合表征吸引域的边界.

同其他类型胞映射方法相比,图胞映射方法最为突出的优点在于可以得到表征动力系统不稳定解的第二类型顶点.为了进一步揭示动力系统的一些精细特征,自然应考虑第二类型顶点对第三类型顶点分类的影响.为此,下面延伸了上述分类方法的驻足概念并提出路游概念.在此基础上,建立了第三类型顶点分类的新方法.

定义 1 如果一个第三类型顶点最终可达某个第一(或第二)类型顶点,则称该第一(或第二)类型顶点所在的强连通子图为这个第三类型顶点的一个驻足.

定义 2 如果一个第二类型顶点最终可达某个第三类型顶点,则称该第二类型顶点所在的强连通子图为这个第三类型顶点的一个路游.

为说明上述概念,考察如图1所描绘的胞映射动力系统.由图1可知 $\{1,2,3\}$ 构成闭强连通子图,为第一类型顶点集合,序号记为I; $\{4,5\}$ 构成开强连通子图,为第二类型顶点集合,序号为II; $\{6,7,8\}$ 为第三类型顶点.顶点6以集合I为驻足,同时也以集合II为驻足.顶点7以集合I为驻足.顶点8以集合I为驻足,同时以集合II为路游.

对于尺寸足够小的胞,根据上述概念,结合胞映射动力系统与图论的相关知识,可以得到如下结论:

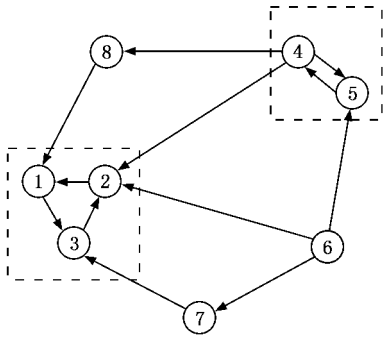


图 1 图胞映射动力系统一个示意图

1) 如果一个第三类型顶点胞以某个第一类型集合为驻足, 则必存在一条从该第三类型顶点胞到第一类型集合中某一顶点胞的路径. 也即存在一条从该胞中某一初值点出发到第一类型集合所对应的吸引子中某一点的轨线. 因此, 该第三类型顶点胞包含了该吸引子吸引域上的点.

2) 如果一个第三类型顶点胞以某个第二类型集合为驻足, 则必存在一条从该第三类型顶点胞到第二类型集合中某一顶点胞的路径. 也即存在一条从该胞中某一初值点出发到第二类型集合所对应的不稳定解中某一点的轨线. 因此, 该第三类型顶点胞包含了该不稳定解稳定流形上的点.

3) 如果一个第三类型顶点胞以某个第二类型集合为路游, 则必存在一条从第二类型集合中某一顶点胞到该第三类型顶点胞的路径. 也即存在一条从该第二类型集合某个顶点胞中某一初值点出发到第三类型顶点胞中某一点的轨线. 因此, 该第三类型顶点胞包含了该第二类型集合所对应的不稳定解的不稳定流形上的点.

一个第三类型顶点可以具有一个或多个驻足; 同时, 也可以具有一个或多个路游. 驻足表示的是第三类型顶点是否可达第一或第二类型顶点; 路游表示的是第二类型顶点是否流经该第三类型顶点. 当一个第三类型顶点具有多个驻足和路游时, 该顶点相应的胞在胞映射意义上具有多重性态.

第三类型顶点驻足和路游概念很自然地提供了一个第三类型顶点的分类方法. 通过对每一个第三类型顶点驻足和路游的确定, 可以将具有相同驻足和路游的第三类型顶点划为同一类型的集合. 在此基础上, 可按照有向图的标准压缩方法对图胞映射动力系统进行了压缩. 即设图胞映射动力系统 $D = (V, E)$, V 和 E 分别是顶点和边集合, $D_1, D_2, \dots,$

D_k 为进行分类后的顶点集合, 按下面条件构造一个新的有向图 $D^* = (V^*, E^*)$:

$$1) V^* = \{D_1, D_2, \dots, D_k\}$$

2) E^* 的构造如下:

(i) 若 D_i 是第三类顶点集合时, 当且仅当 $i \neq j$ 存在结点 $u \in D_i, v \in D_j$ 且 $(u, v) \in E$ 则从 D_i 向 D_j 引弧 (D_i, D_j) .

(ii) 若 D_i 是第一类或第二类顶点集合时, 若存在结点 $u \in D_i, v \in D_j$ 且 $(u, v) \in E$, 则从 D_i 向 D_j 引弧 (D_i, D_j) .

则有向图 $D^* = (V^*, E^*)$ 是 $D = (V, E)$ 的压缩表示. 从 $D^* = (V^*, E^*)$ 可以准确直观地显示出图胞映射动力系统的全局性质.

3. 算 法

为了完成第三类型顶点驻足和路游的计算, 需要完成两个过程: 搜索和标注. 搜索算法可采用图论中广度优先搜索方法来完成. 在此算法中需要快速准确查找一个图顶点的像顶点和反像顶点. 为此, 在图的计算机表示时应该采用邻接表对图进行计算机表示. 在这种存储结构中, 对图的每一个结点建立一个链表. 第 i 个链表中的结点是与 v_i 邻接的结点(如果有向图则是从 v_i 引出弧的终止结点). 每个结点由两个域组成: 结点域用以指示与结点 v_i 邻接的点的序号, 链域用以指向下一条边. 每一个链表设一个表头结点, 这些表头结点本身以向量的形式存储, 以便随机访问任一结点的链表. 为了反向搜索图, 还应建立逆邻接表. 标注过程是对每一个第三类型顶点的驻足和路游进行记录. 如果在图的强连通分析时, 计算出 c_1 个第一类型顶点集和 c_2 个第二类型集, 则需要 $c_1 + 2c_2$ 个位置对每一个第三类型顶点进行标记. 其中 1 到 c_1 位置表示对第一类顶点的驻足情况; $c_1 + 1$ 到 $c_1 + c_2$ 位置表示对第二类顶点的驻足情况; $c_1 + c_2 + 1$ 到 $c_1 + 2c_2$ 位置表示对第二类顶点的路游情况. 所以每一个第三类型顶点需要长度 $2c_1 + 2c_2$ 的向量进行标注, 当 $c_1 + 2c_2$ 较大时, 向量长度将是一个非常大的数字. 如果第三类型顶点的数量较大, 应该采用各种压缩算法提供序号, 以节省内存. 因为标注的情况可以用 0 和 1 完成, 所以一个较为简单可行的方案是用二进制位向量来表示一个位, 把一个机器字看成不是一个“数”而是每一位是

互相独立的向量.

下面给出算法过程:

算法一 驻足算法:

输入:一个第一类型顶点集合或第二类型顶点集合;

输出:以该顶点集合为驻足的第三类型顶点

步 1:初始化集合 $A_1 \leftarrow \emptyset$;

步 2:将第一类型顶点集合或第二类型顶点集合放入 A_1 中;

步 3:清空集合体 A_2 , 搜索 A_1 的反向顶点 v , 如果 v 是第三类型顶点则进行标记, 并且放入 A_2 中;

步 4:如果 $A_2 = \emptyset$ 则停;

步 5:令 $A_1 \leftarrow A_2$ 转步 3.

算法二 第二类型顶点的路游算法:

输入:一个第二类型顶点集合;

输出:以该顶点集合为路游的第三类型顶点

步 1:初始化集合 $A_1 \leftarrow \emptyset$;

步 2:将第二类型顶点集合放入 A_1 中;

步 3:清空集合体 A_2 , 搜索 A_1 的正向顶点 v , 如果 v 是第三类型顶点则进行标记, 并且放入 A_2 中;

步 4:如果 $A_2 = \emptyset$ 则停;

步 5:令 $A_1 \leftarrow A_2$ 转步 3.

4. 计算实例

考虑一个 Henon 映射^[20 21]:

$$(x, y) \rightarrow (1.4 - x^2 + 0.3y, x), \quad (1)$$

这里 x 的坐标范围为 $[-3, 3]$ 且被分为 800 个相同长度的小区间; y 的坐标范围为 $[-3, 3]$ 且被分为 800 个相同长度的小区间. 因此, 包含陷胞共 640001 个. 胞的编号规则为先 x 方向, 再 y 方向. 即相应于 $y \in [-3, -2.9925]$ 且 $x \in [-3, 3]$ 的胞被编号为 1 到 800; 相应于 $y \in [-2.9925, -2.9850]$ 且 $x \in [-3, 3]$ 的胞被编号为 801 到 1600, 依次类推. 应用系统 (1) 生成胞映射. 每一个胞均匀生成 30×30 个采样点. 对于 640001 个胞共产生 1644087 个像胞. 其中第 202532 序号的像胞最多, 为 6 个像胞, 分别为 $\{104801, 104802, 104803, 104804, 104805, 640001\}$.

对相应的胞动力系统进行强连通分析后, 得到两个第一类型顶点集合, 分类序号记为 1, 2, 包含的顶点胞的数目分别为 1 个和 6500 个, 包含的胞序号为 $\{640001\}$ 和 $\{187646, 304527, 167581, \dots\}$; 它们表征陷胞和一个稳定的混沌吸引子. 同时还得到一个

第二类型顶点集合, 分类序号记为 3, 胞的数目为 2 个, 包含的胞序号为 $\{151390, 150589\}$, 表征一个不稳定的解.

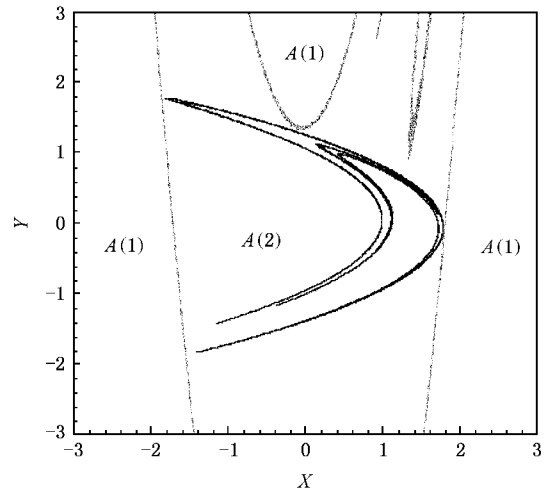


图 2 Henon 映射混沌吸引子及其吸引域, 陷胞的吸引域

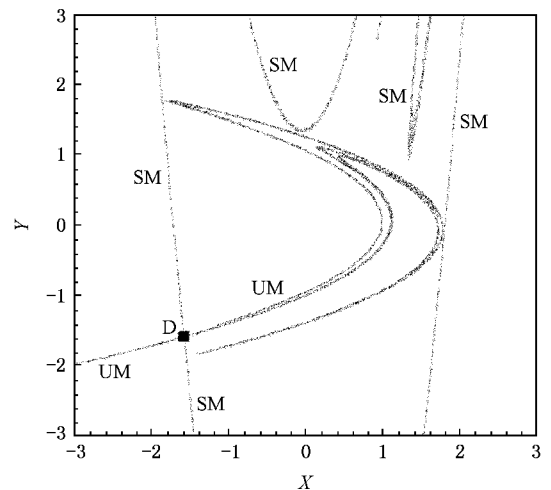


图 3 Henon 映射不稳定解及其稳定与不稳定流形

应用驻足和路游分析算法继续对胞映射动力系统进行分析, 将具有相同驻足和路游的第三类型顶点划为同一类型的集合. 共得到第三类型顶点的 7 个分类集合. 详细分类情况见表 1 (“真”; “假”为逻辑值).

继而可得胞映射动力系统的压缩图 $D^* = (V^*, E^*)$ 其中 $V^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;

$$E^* = \left\{ \begin{array}{l} (1, 1)(2, 2)(3, 3)(3, 9)(3, 10)(4, 1); \\ (5, 2)(6, 1)(6, 3)(7, 1)(7, 2)(7, 3); \\ (8, 2)(8, 3)(9, 1)(10, 2); \end{array} \right\}$$

表 1 第三类型顶点分类情况

分类 序号	胞数目	以分类序号	以分类序号	以分类序号	以分类序号
		1 为驻足	2 为驻足	3 为驻足	3 为路游
4	292336	真	假	假	假
5	334804	假	真	假	假
6	77	真	假	真	假
7	5582	真	真	真	假
8	46	假	真	真	假
9	243	真	假	假	真
10	409	假	真	假	真

从 $D^* = (V^*, E^*)$ 可见从胞映射动力系统意义上看包含吸引子的吸引域的分类集合为 $\{5, 7, 8, 10\}$, 陷胞的吸引域的分类集合为 $\{4, 6, 7, 9\}$. 不稳定解的稳定流形的分类集合为 $\{6, 7, 8\}$. 包含不稳定解的不稳定流形的分类集合为 $\{1, 2, 9, 10\}$. 其图形为: 图 2 为混沌吸引子及其吸引域 $A(2)$, 陷胞的吸引域 $A(1)$, 图 3 为不稳定解 D 及其稳定流形 SM 和不稳定流形 UM . 图 2 和图 3 表明改进的图胞映射方法能够准确地刻画非线性系统的全局特性, 是非线性系

统的全局分析的有力武器.

5. 结 论

同其他类型胞映射方法相比, 图胞映射方法最为突出的优点在于可以得到表征动力系统不稳定解的第二类型顶点. 为了进一步揭示动力系统的一些精细特征, 如不稳定解的稳定与不稳定流形及参数变化时它们对系统全局性态的影响, 人们自然应对与第二类型顶点有关的第三类型顶点进行细致分类. 为此, 本文延伸了传统图胞映射方法中的驻足概念并提出路游概念, 基于上述概念, 建立了第三类型顶点的新的分类, 依据这一分类, 利用有向图的标准压缩方法对图胞映射动力系统进行了压缩, 压缩后的图能够更加清晰、精细地反映动力系统全局性质. 考虑到实际中要利用计算机完成上述压缩分类, 因此计算速度和内存的影响必须考虑, 文中针对于此, 给出了有效算法. 通过对典型例子——Henon 映射的全局特性分析, 证实了改进的图胞映射方法的有效性.

- [1] Hsu C S 1980 *J. Appl. Mech.* **47** 931
- [2] Hsu C S 1981 *J. Appl. Mech.* **48** 634
- [3] Tongue B H, Gu K 1988 *J. Sound Vib.* **125** 169
- [4] Jiang J, Xu J X 1994 *Phys. Lett. A* **188** 137
- [5] Hsu C S 1995 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **5** 1085
- [6] Hong L, Xu J X 1999 *Phys. Lett. A* **262** 361
- [7] Wen C X, Yao Y X, Wen B C 1997 *J. Northeastern University* **18** 119 (in Chinese) [文成秀、姚玉玺、闻邦椿 1997 东北大学学报 **18** 119]
- [8] Ding Q, Cooper J E, Leung A Y T 2005 *J. Fluids and Structures* **20** 35
- [9] Zou H L, Xu J X 2006 *The Second International Conference on Dynamics, Vibration and Control*. p239
- [10] Hong L, Xu J X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1228 (in Chinese) [洪 灵、徐健学 2000 物理学报 **49** 1228]
- [11] Hong L, Xu J X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2694 (in Chinese) [洪 灵、徐健学 2002 物理学报 **51** 2694]
- [12] Hong L, Xu J X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 612 (in Chinese) [洪 灵、徐健学 2001 物理学报 **50** 612]
- [13] Xu W, He Q, Rong H W, Fang T 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1365 (in Chinese) [徐 伟、贺 群、戎海武、方 同 2003 物理学报 **52** 1365]
- [14] Hu H Y 2000 *Applied Nonlinear Dynamics* (Beijing: Aviation Industry Press) p204 (in Chinese) [胡海岩 2000 应用非线性动力学(北京:航空工业出版社)第 204 页]
- [15] Wen B C, Li Y N, Han Q K 2001 *Analytic Methods and their Engineering Applications of Nonlinear Vibration* (Shenyang: NEU Press) p192 (in Chinese) [闻邦椿、李以农、韩清凯 2001 非线性振动理论中的解析方法及工程应用(沈阳:东北工学院出版社)第 192 页]
- [16] Zhou J Q, Zhu Y Y 2001 *Nonlinear Vibration* (Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press) (in Chinese) [周纪卿、朱因远 2001 非线性振动(西安:西安交通大学出版社)]
- [17] Hsu C S 1992 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **2** 727
- [18] Hong L 2001 *Study on Unstable Invariant Set and Crisis of Nonlinear Dynamical Systems* (Xi'an: A Dissertation for the Degree of Doctor in Xi'an Jiaotong University) (in Chinese) [洪 灵 2001 非线性动力系统不稳定不变集和激变研究(西安:西安交通大学博士学位论文)]
- [19] Hong L, Sun J Q 2006 *Physica D* **213** 181
- [20] Wang B H, Chen G Y, Gu G Q 1994 *Chin. Phys.* **3** 653
- [21] Luo X S, Fang J Q, Wang L H, Kong L J, Jiang F 1999 *Chin. Phys.* **8** 895

A modified digraph cell mapping method^{*}

He Qun Xu Wei[†] Li Shuang Xiao Yu-Zhu[‡]

(*Department of Applied Mathematics , Northwestern Polytechnical University , Xi 'an 710072 , China*)

(Received 13 May 2007 ; revised manuscript received 21 May 2007)

Abstract

By introducing new concepts , this paper presents a new classification of transient cells for the digraph cell mapping dynamical system. Based on this new classification , the approximation problem of the invariant manifolds of dynamical system is discussed in detail. In order to improve the efficiency and speed of computing , an effective algorithm is given to complete the above classification. As an illustrative example , Henon map is taken to demonstrate the validity of the modified digraph cell mapping method.

Keywords : digraph cell mapping method , invariant manifolds , Henon map

PACC : 0547 , 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10472091 , 10332030 , 10502042).

[†] E-mail : weixu@nwpu.edu.cn

[‡] Corresponding author. E-mail : yuzhuxiao@mail.nwpu.edu.cn