第 57 卷 第 2 期 2008 年 2 月
1000-3290/2008/57(02)/0756-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57,No.2,February,2008

新节点的边对网络无标度性影响*

郭进利†

(上海理工大学管理学院,上海 200093)

(2007 年 7 月 16 日收到;2007 年 8 月 25 日收到修改稿)

分析新节点边对网络无标度性的影响.虽然亚线性增长网络瞬态平均度分布尾部表现出了幂律分布性质,但是,这个网络的稳态度分布并不是幂律分布,由此可见,计算机模拟预测不出网络稳态度分布,它只能预测网络的瞬态度分布.进而建立随机增长网络模型,利用随机过程理论得到了这个模型的度分布的解析表达式,结果表明这个网络是无标度网络.

关键词:复杂网络, 无标度网络, 小世界网络, 度分布

PACC:0590, 0175, 0540J, 8980H

1. 引 言

近年来,在复杂网络领域一个最引人注目的研究课题就是无标度网络理论[1—12].无标度网络概念是由文献[1,2]引入的,其作者 Barabási 和 Albert 推动了近年来关于复杂网络研究.无标度网络理论的研究者来自数学、统计物理学、计算机网络、生态学以及经济学等各个不同领域,也吸引了控制论学者的关注[4,5].

其实,Price 在 1965 年就已对无标度网络进行了研究[13—15],他研究了科学文献之间的引用关系网络,并发现入度服从幂律分布.Price 及其以后的研究者都是在 Simon[13,16] 提出的"富者愈富"的基础上发现幂律现象,Price 称之为"积累优势",也就是 Barabási 和 Albert 所说的"择优连接"[1,2].Barabási 等人主要的贡献是提出了无标度网络增长和择优连接机理;将连续化方法应用到了复杂网络研究中,获得了增长网络节点的度关于时间的微分方程.Barabási 等人在文献[1,2]中的不足之处有:一,错误地假定了节点的到达时间服从均匀分布[6],为了修正这个错误文献[10]研究了连续时间增长的网络模型;二,新增节点的边 m 是固定不变的,实证结果表明网络的节点和边不一定是时间的线性函数[3].文献[8]研究了边加速增长的网络,但是,文献[8]新增节点的边也是固定不变的.如果新增节点的连边数随时间变化时对网络的拓扑性质有何影响?如果新增节点的连边数是随机变量时对网络的拓扑性质又有何影响?

文献[3]中将无标度网络描述为:"网络中包含一些重要的节点或中枢点,它们从表面上看有无限条边与之连接,而且没有一个比其他的更为典型,这样的网络将会具有我们称为无标度的特性."中枢点的存在使得"稳健而又脆弱"的结构成了无标度网络的一个特征.也就是说,因为无标度网络具有中枢点,所以它们对节点失效具有两面性,即对随机失效具有稳健性,同时又有易于被攻击的脆弱性[3].随着无标度网络知名度日益提高,许多学者对其投入了精力,通过了一些数据计算大量报道了在实际复杂网络中都发现了无标度特性.文献[7]指出"许多人会对这种在物理文献中用的拙劣统计方法所声称的幂律无处不在和如此丰富的论点越来越持有怀疑态度."为此,文献[7]中对无标度定义提出了质疑,认为目前许多文献中关于无标度网络的定义含糊不清,现行的理论存在许多内在矛盾和不真实论断等情况.因此,不具有幂律度分布的网络是否就不具有中枢点?

针对上述问题,本文建立了亚线性增长网络模型,分析表明,这类网络具有中枢点,体现了"富者愈富"的现象,但稳态平均度分布并不是幂律分布.建

---

* 上海市重点学科建设项目(批准号:T0502)资助的课题.

† E-mail:phd2000cn@yahoo.com.cn

立了边随机增长网络模型，分析表明，这类网络不但具有中枢点，也体现了“富者愈富”的现象，而且存在稳态平均度分布.

2. 亚线性增长网络

亚线性增长网络是指满足如下两条规则的网络.

1）亚线性增长：网络开始于较少的 m_0 个无孤立节点的网络. 节点的到达过程服从率为 λ 的 Poisson 过程，在 t 时刻，当一个新节点进入网络时，此节点具有 mt^{θ}（$m \leqslant m_0$）条边，连接这个新节点到 mt^{θ} 个不同的已经存在于网络中的节点，这里 $0 \leqslant \theta < 1$；

2）择优连接：在选择新节点的连接时，假设新节点连接到节点 i 的概率 Π 取决于节点 i 的度数 k_i，即满足

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}. \tag{1}$$

令

$$N(t) = \{在时刻\ t\ 网络的节点数\} - m_0,$$

因为节点的到达过程 $N(t)$ 是具有率 λ 的 Poisson 过程，由 Poisson 过程理论[17]知，网络在 $[0, t)$ 内到达网络节点的平均数约为

$$\mu(t) = E[N(t)] = \lambda t, \tag{2}$$

令 t_i 表示第 i 个节点 i 进入网络的时刻，即第 i 个节点 i 的到达时刻. k_i 表示节点 i 在时刻 t 的度. 假定 k_i 是连续实值变量，由于 k_i 的变化率正比于概率 $\Pi(k_i)$，从而 k_i 满足如下动态方程：

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = mt^{\theta}\lambda \frac{k_i}{\sum_j k_j}. \tag{3}$$

考虑到 $\sum_j k_j \approx \int_0^t 2mt^{\theta}\lambda\,\mathrm{d}t = \frac{2m\lambda}{1+\theta}t^{1+\theta}$，代入(3)式，可得

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = \frac{(1+\theta)k_i}{2t}. \tag{4}$$

方程(4)的解为

$$k_i(t) = k_i(t_i)\left(\frac{t}{t_i}\right)^{\frac{1+\theta}{2}},$$

由于 $k_i(t_i) = mt_i^{\theta}$，所以

$$k_i(t) = m\frac{t^{\frac{1+\theta}{2}}}{t_i^{\frac{1-\theta}{2}}}. \tag{5}$$

从(5)式，有

$$P\{k_i(t) \geqslant k\} = P\left\{t_i \leqslant \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{2}{1-\theta}} t^{\frac{1+\theta}{1-\theta}}\right\}. \tag{6}$$

根据 Poisson 理论[17]，随机变量 t_i 服从 Γ 分布：

$$P\{t_i \leqslant x\} = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\sum_{l=0}^{i-1}\frac{(\lambda x)^l}{l!},$$

所以

$$P\{k_i(t) \geqslant k\}$$
$$= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{2}{1-\theta}}t^{\frac{1+\theta}{1-\theta}}}\sum_{l=0}^{i-1}\frac{\left(\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{2}{1-\theta}}t^{\frac{1+\theta}{1-\theta}}\right)^l}{l!}. \tag{7}$$

对于任意给定的 i，j，$t>0$，并且 $i<j$，$t_i<t_j \leqslant t$，从(7)式可知对于任何 $k \geqslant mt_j^{\theta}$，有

$$P\{k_i(t) \geqslant k\}$$
$$= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{2}{1-\theta}}t^{\frac{1+\theta}{1-\theta}}}\sum_{l=0}^{i-1}\frac{\left(\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{2}{1-\theta}}t^{\frac{1+\theta}{1-\theta}}\right)^l}{l!}$$
$$> 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{2}{1-\theta}}t^{\frac{1+\theta}{1-\theta}}}\sum_{l=0}^{j-1}\frac{\left(\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{2}{1-\theta}}t^{\frac{1+\theta}{1-\theta}}\right)^l}{l!}$$
$$= P\{k_j(t) \geqslant k\}, \tag{8}$$

(8)式表明亚线性增长网络体现了“富者愈富”的现象.

$$P\{k_i(t) = k\} \approx \frac{\partial P\{k_i(t) < k\}}{\partial k}$$
$$= \frac{2\lambda m^{\frac{2}{1+\theta}}}{(1-\theta)k^{\frac{3-\theta}{1-\theta}}}t^{\frac{1+\theta}{1-\theta}} \times \frac{\left(\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{2}{1-\theta}}t^{\frac{1+\theta}{1-\theta}}\right)^{i-1}}{(i-1)!} \times \mathrm{e}^{-\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{2}{1-\theta}}t^{\frac{1+\theta}{1-\theta}}}. \tag{9}$$

对于任意给定的 $t>0$ 和正整数 k，如果 $mt_j^{\theta} > k \geqslant mt_{j-1}^{\theta}$，则当 $n \geqslant j$ 时，$P\{k_n(t) = k\} = 0$，所以网络的瞬态平均度分布为

$$P(k,t) \approx \frac{1}{E[N(t)]}\sum_{i=1}^{N(t)} p(k_i(t) = k)$$
$$= \frac{1}{E[N(t)]}\sum_{i=1}^{j-1} p(k_i(t) = k)$$
$$= \frac{2m^{\frac{2}{1-\theta}}}{(1-\theta)k^{\frac{3-\theta}{1-\theta}}}t^{\frac{2\theta}{1-\theta}}\mathrm{e}^{-\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{2}{1-\theta}}t^{\frac{1+\theta}{1-\theta}}} \times \sum_{i=0}^{j-2}\frac{\left(\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{2}{1-\theta}}t^{\frac{1+\theta}{1-\theta}}\right)^i}{i!}. \tag{10}$$

对于充分大给定的 $t>0$ 和给定的正整数 k，从

(10)式可知亚线性增长网络的瞬态平均度分布的尾部表现出了指数为 $\gamma=\frac{3-\theta}{1-\theta}$的幂律分布性质,然而对于 $0<\theta<1$ 和任意给定的非负整数 k,有

$$
\begin{aligned}
P(k) &= \lim_{t\to+\infty} P(k,t) \\
&= \lim_{t\to+\infty} \frac{2m^{\frac{2}{1-\theta}}}{(1-\theta)k^{\frac{3-\theta}{1-\theta}}} t^{\frac{2\theta}{1-\theta}} \mathrm{e}^{-\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{2}{1-\theta}} t^{\frac{1+\theta}{1-\theta}}} \\
&\quad \times \sum_{i=0}^{j-2} \frac{\left(\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{2}{1-\theta}} t^{\frac{1+\theta}{1-\theta}}\right)^i}{i\,!} \\
&= 0, \qquad (11)
\end{aligned}
$$

由(11)式可知这个网络的稳态平均度分布[18] 不是幂律分布.从文献[18]的定义 3 知道这个网络不是无标度网络.

3. 随机增长网络

在这一节建立和分析随机增长网络.为了刻画随机增长,记 $X_1,X_2,\cdots$为独立同分布的随机变量列,其分布函数为

$$
P\{X_i \leqslant x\} = A(x) = \int_0^x f(x)\mathrm{d}x,\ i = 0,1,2,\cdots,
$$

$$
\frac{1}{\lambda} \equiv \int_{0_-}^{\infty} x\mathrm{d}A(x) = E[X_i].
$$

假设 λ 为大于零的常数,$A(t)$具有连续单调的正密度函数 $f(t)$. 进而引进

$$
S_0 = 0,\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,\ n \geqslant 1,
$$

$$
N(t) = \max\{n \mid S_n \leqslant t\}.
$$

定义 称随机过程 $\{N(t) \mid t \geqslant 0\}$ 为更新过程[17],简称更新过程 $N(t)$.如果 $f(t)=\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$,则称$\{N(t)\mid t\geqslant 0\}$为具有率 λ 的 Poisson 过程[17].

对于更新过程 $\{N(t) \mid t \geqslant 0\}$,用 $\mu(t) = E[N(t)]$表示$[0,t)$内的平均更新次数.对于率为 λ 的 Poisson 过程,从文献[17]知道,$\mu(t)=E[N(t)]=\lambda t$.

随机增长网络是指满足如下两条规则的网络.

1)随机增长:网络开始于较少的 m_0 个无孤立节点的网络.节点的到达过程服从更新过程 $N(t)$,在 t 时刻,当一个新节点进入网络时,新节点与 l 个网络中已存在的节点相连通,并且 l 是服从二项分布 $B(N(t)+m_0,p(t))$的随机变量,这里 $0<p(t)\leqslant 1$, $e(t)=p(t)\mu(t)$是单调递增的有界函数;

2)择优连接:在选择新节点的连接时,假设新节点连接到节点 i 的概率 Π 取决于节点 i 的度数 k_i,即满足(1)式.

由于

$$
N(t) = \{在时刻\ t\ 网络的节点数\} - m_0,
$$

所以节点的到达过程 $N(t)$是更新过程, 由更新过程理论[17]我们知道:

$$
\mu(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t), \qquad (12)
$$

这里 $A_n(t)$表示 $A(t)$的 n 重卷积,$n=1,2,\cdots$ 并且

$$
\mu(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geqslant n\}.
$$

我们用 t_i 表示第 i 个节点进入网络的时刻,即第 i 个节点 i 的到达时刻. k_i 表示节点 i 在时刻 t 的度.假定 k_i 是连续实值变量,由于 k_i 的变化率正比于概率 $\Pi(k_i)$,从而知道 k_i 满足动态方程

$$
\frac{\partial k_i}{\partial t} = E[l]\mu'(t)\frac{k_i}{\sum_j k_j},
$$

其中,$E[l]=p(t)\mu(t)=e(t)$是时刻 t 平均新增边数.

考虑到

$$
\begin{aligned}
\sum_j k_j &= 2\int_0^t E[l]\mathrm{d}\mu(t) \\
&= 2\int_0^t p(t)\mu(t)\mathrm{d}\mu(t).
\end{aligned}
$$

利用积分第二中值定理,有

$$
\begin{aligned}
\sum_j k_j &= 2\int_0^t p(t)\mu(t)\mu'(t)\mathrm{d}t \\
&= 2p(t)\mu(t)(\mu(t)-\mu(\xi)),
\end{aligned}
$$

这里 $0<\xi<t$. 有

$$
\frac{\partial k_i}{\partial t} = \frac{k_i\mu'(t)}{2\mu(t)\left(1-\frac{\mu(\xi)}{\mu(t)}\right)}. \qquad (13)
$$

由于 $e(t) = p(t)\mu(t)$是单调递增有界的,所以,$\lim\limits_{t\to+\infty} e(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} p(t)\mu(t) = m>0$. 再由基本更新定理[17] 知道,$\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\mu(t)}{t}=\lambda$,所以,$\lim\limits_{t\to+\infty}\mu(t)=\infty$,对于充分大的 t,(13)式中的项$\frac{\mu(\xi)}{\mu(t)}$可以忽略,因此

$$
\frac{\partial k_i}{\partial t} = \frac{k_i\mu'(t)}{2\mu(t)}, \qquad (14)
$$

解方程(14),得

$$
k_i(t) = k_i(t_i)\left(\frac{\mu(t)}{\mu(t_i)}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (15)
$$

从(15)式，有

$$P\{k_i(t)\geqslant k\}=P\left\{\mu(t_i)\leqslant\frac{k_i(t_i)^2}{k^2}\mu(t)\right\},$$

由更新理论知道 $\mu(t)=E[N(t)]$ 严格单调递增的，因此

$$\begin{aligned}&P\{k_i(t)\geqslant k\}\\&=P\left\{t_i\leqslant\mu^{-1}\left(\frac{k_i(t_i)^2}{k^2}\mu(t)\right)\right\},\\&=\sum_{l=0}^{N(t)+m_0}P\{k_i(t_i)=l\}\\&\quad\times P\left\{t_i\leqslant\mu^{-1}\left(\frac{k_i(t_i)^2}{k^2}\mu(t)\right)\mid k_i(t_i)=l\right\}\\&=\sum_{l=0}^{N(t)+m_0}\binom{N(t)+m_0}{l}(1-p(t))^lp(t)^{N(t)+m_0-l}\\&\quad\times P\left\{t_i\leqslant\mu^{-1}\left(\frac{l^2}{k^2}\mu(t)\right)\right\}\\&=\sum_{l=0}^{\mu(t)+m_0}\binom{\mu(t)+m_0}{l}(1-p(t))^lp(t)^{\mu(t)+m_0-l}\\&\quad\times P\left\{t_i\leqslant\mu^{-1}\left(\frac{l^2}{k^2}\mu(t)\right)\right\},\end{aligned}\tag{16}$$

由于 $t_i=t_i-t_{i-1}+t_{i-1}-t_{i-2}+\cdots+t_1-t_0$，从更新理论[17]，我们有

$$\begin{aligned}&P\left\{t_i\leqslant\mu^{-1}\left(\frac{l^2}{k^2}\mu(t)\right)\right\}\\&=A_i\left(\mu^{-1}\left(\frac{l^2}{k^2}\mu(t)\right)\right),l=0,1,2,\cdots,\mu(t).\end{aligned}$$

将上式代入(16)式，得

$$\begin{aligned}&P(k_i(t)\geqslant k)\\&=\sum_{l=0}^{\mu(t)+m_0}\binom{\mu(t)+m_0}{l}(1-p(t))^lp(t)^{\mu(t)+m_0-l}\\&\quad\times A_i\left(\mu^{-1}\left(\frac{l^2}{k^2}\mu(t)\right)\right).\end{aligned}\tag{17}$$

因为

$$\begin{aligned}&P(k_i(t)=k)\\&=P(k_i(t)\geqslant k)-P(k_i(t)\geqslant k+1),\\&\quad i=1,2,\cdots,\end{aligned}\tag{18}$$

从(17)和(18)式，有

$$\begin{aligned}P(k)&\approx\lim_{t\to\infty}\frac{1}{E[N(t)]}\sum_{i=1}^{\infty}p\{k_i(t)=k\}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\mu(t)}\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\mu(t)+m_0}\binom{\mu(t)+m_0}{l}(1-p(t))^l\right.\\&\quad\times p(t)^{\mu(t)+m_0-l}A_i\left(\mu^{-1}\left(\frac{l^2}{k^2}\mu(t)\right)\right)\\&\quad-\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\mu(t)+m_0}\binom{\mu(t)+m_0}{l}(1-p(t))^l\\&\quad\left.\times p(t)^{\mu(t)+m_0-l}A_i\left(\mu^{-1}\left(\frac{l^2}{(k+1)^2}\mu(t)\right)\right)\right\}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\mu(t)}\sum_{l=0}^{\mu(t)+m_0}\binom{\mu(t)+m_0}{l}(1-p(t))^l\\&\quad\times p(t)^{\mu(t)+m_0-l}\left\{\mu\left(\mu^{-1}\left(\frac{l^2}{k^2}\mu(t)\right)\right)\right.\\&\quad\left.-\mu\left(\mu^{-1}\left(\frac{l^2}{(k+1)^2}\mu(t)\right)\right)\right\}\\&=\lim_{t\to\infty}\sum_{l=0}^{\mu(t)+m_0}\binom{\mu(t)+m_0}{l}(1-p(t))^l\\&\quad\times p(t)^{\mu(t)+m_0-l}\left(\frac{l^2}{k^2}-\frac{l^2}{(k+1)^2}\right)\\&=\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\lim_{t\to\infty}\sum_{l=0}^{\mu(t)+m_0}l^2\binom{\mu(t)+m_0}{l}\\&\quad\times(1-p(t))^lp(t)^{\mu(t)+m_0-l}.\end{aligned}\tag{19}$$

二项分布 $B(\mu(t)+m_0,\ p(t))$ 的母函数表达为

$$\phi(x)=[p(t)e^x+(1-p(t))]^{\mu(t)+m_0},$$

所以

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{\mu(t)+m_0}l^2\binom{\mu(t)+m_0}{l}(1-p(t))^lp(t)^{\mu(t)+m_0-l}\\&=\phi''(0)=p(t)^2(\mu(t)+m_0)(\mu(t)+m_0-1)\\&\quad+p(t)(\mu(t)+m_0),\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}P(k)&=\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\\&\quad\times\lim_{t\to\infty}[(p(t)\mu(t)+p(t)m_0)(p(t)\mu(t)\\&\quad+p(t)m_0-p(t))+(p(t)\mu(t)+p(t)m_0)].\end{aligned}\tag{20}$$

由于 $\lim\limits_{t\to\infty}p(t)\mu(t)=m$，从基本更新定理[17]知道，$\lim\limits_{t\to\infty}\mu(t)=\infty$，那么 $\lim\limits_{t\to\infty}p(t)=0$. 代入(20)式我们获得随机增长网络的稳态平均度分布：

$$\begin{aligned}P(k)&=\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\\&\quad\times\lim_{t\to\infty}[p(t)^2\mu(t)^2+p(t)\mu(t)]\\&=\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)(m^2+m)\\&\approx\frac{2m(m+1)}{k(k+1)^2}.\end{aligned}\tag{21}$$

因为 $N(t)\geqslant i\Leftrightarrow t_i\leqslant t$，当 $j>i>0$ 时，利用累加概率，有

$$
\begin{aligned}
&P\left\{t_i \leqslant \mu^{-1}\left(\frac{l^2}{k^2}\mu(t)\right)\right\} \\
&= P\left\{N\left(\mu^{-1}\left(\frac{l^2}{k^2}\mu(t)\right)\right) \geqslant i\right\} \\
&= \sum_{l=i}^{j-1} P\left\{N\left(\mu^{-1}\left(\frac{l^2}{k^2}\mu(t)\right)\right) = l\right\} \\
&\quad + \sum_{l=j}^{\infty} P\left\{N\left(\mu^{-1}\left(\frac{l^2}{k^2}\mu(t)\right)\right) = l\right\} \\
&> \sum_{l=j}^{\infty} P\left\{N\left(\mu^{-1}\left(\frac{l^2}{k^2}\mu(t)\right)\right) = l\right\} \\
&= P\left\{t_j \leqslant \mu^{-1}\left(\frac{l^2}{k^2}\mu(t)\right)\right\}, \\
&\qquad l = 0,1,2,\cdots,\mu(t). \qquad (22)
\end{aligned}
$$

由(16)和(22)式可知,当 $j > i > 0$ 时,有

$$
P(k_i(t) \geqslant k) > P(k_j(t) \geqslant k). \qquad (23)
$$

(21)式表明随机增长网络的稳态平均度分布是指数为 $\gamma = 3$ 的幂律分布,(23)式表明了老的节点比年龄小的节点更容易获得连接,体现了"富者愈富"的思想,因此,由文献[18]的定义 3 知道随机增长网络是无标度网络.

4. 结 论

本文通过对亚线性增长网络的分析可知对于 $0 < \theta < 1$ 网络的瞬态平均度分布的尾部表现出了指数为 $\gamma = \frac{3-\theta}{1-\theta}$ 的幂律分布,但是,这个网络的稳态平均度分布并非幂律分布.由此可见,这个网络不是无标度网络,新节点的边影响了网络的标度性.这样的结果只有通过严格的理论分析而得到,不可能通过计算机模拟获得.因为计算机模拟只能计算出瞬态平均度分布,得不到稳态平均度分布,然而,对于增长网络所提到的幂律分布是指稳态平均度分布[3,8].通过上述论证可见,文献[7]对当前一些无标度网络文献的批评是有一定道理的.

在实际网络中,新节点的初始边数不但是时间的函数,也是一个随机变量.我们通过对随机增长网络的分析表明这个网络是幂律指数为 $\gamma = 3$ 的无标度网络.

[1] Barabási A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509

[2] Barabási A L, Albert R, Jeong H 1999 *Physica* A **272** 173

[3] Albert R, Barabási A L 2002 *Rev. Mod. Phys.* **74** 47

[4] Lü J H, Yu X H, Chen G R 2004 *Physica* A **334** 281

[5] Lü J H, Chen G R 2005 *IEEE Transactions on Automatic Control* **50** 841

[6] Guo J L 2006 *Systems Engineering-Theory & Practice* **26** 33 (in Chinese) [郭进利 2006 系统工程理论与实践 **26** 33]

[7] Li L, Alderson D, Tanaka R, Doyle J C, Willinger W 2005 arXiv: cond-mat/0501169 v19

[8] Dorogovtsev S N, Mendes J F F 2001 *Phys. Rew.* E **63** 250101

[9] Dorogovtsev S N, Mendes J F F, Samukhin A N 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 4633

[10] Guo J L, Bai Y Q 2006 *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive System, Ser.* B **13** 520

[11] Guo J L 2007 *Chin. Phys.* **16** 1239

[12] Pan Z F, Wang X F 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4058 (in Chinese) [潘灶烽、汪小帆 2006 物理学报 **55** 4058]

[13] Newman M E J 2003 *SIAM Review* **45** 167

[14] Price D de S 1965 *Science* **149** 510

[15] Price D de S 1976 *J. Amer. Soc. Inform. Sci.* **27** 292

[16] Sinom H A 1955 *Biometrika* **42** 425

[17] Ross S M 1983 *Stochastic Processes* (New York: John Wiley & Sons, inc.)

[18] Guo J L, Wang C P 2007 *J. University of Shanghai for Science and Technology* **27** 22 (in Chinese) [郭进利、王翠萍 2007 上海理工大学学报 **27** 22]

Impact of edges for new nodes on scale-free networks*

Guo Jin-Li†

(*Business School, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China*)

(Received 16 July 2007; revised manuscript received 25 August 2007)

Abstract

This paper analyses the impact of edges for new nodes on scale-free networks. Although non-stationary average degree distribution of a sub-linearly growing network follows the power law, the stationary average degree distribution of the network does not. This paper proposes a random growth model whose node arrival process is a renewal process and the number of new edges is a random variable with binomial distribution. The result shows that the stationary average degree distribution of the model follows the power law under an appropriate condition, and the condition is found.

Keywords: complex network, scale-free network, small-world network, degree distribution

PACC: 0590, 0175, 0540J, 8980H

* Project supported by the Shanghai Leading Academic Discipline Project, China (Grant No. T0502).

† E-mail: phd2000cn@yahoo.com.cn