

# 非 Lamb-Dicke 近似下制备囚禁冷离子的振动相干态

张 森 贾焕玉<sup>†</sup>

(西南交通大学现代物理研究所, 成都 610031)

(2007 年 4 月 27 日收到, 2007 年 6 月 10 日收到修改稿)

根据非 Lamb-Dicke 近似下激光-离子相互作用动力学规律, 讨论了如何利用一系列的激光脉冲来驱动冷离子, 从而从运动基态出发获得一系列振动数态的宏观叠加态. 具体研究了这些叠加态的 Q 函数、Wigner 函数和它们的非经典特性, 如压缩和反群聚效应等. 结果表明, 合适地调节各个所用激光的脉冲长度, 所产生的叠加态能很好地逼近熟知的振动相干态.

关键词: Lamb-Dicke 近似, 叠加态, 相干态, 非经典特性

PACC: 4250

## 1. 引 言

在宏观经典领域里, 人们可以按自己的意愿来设计各种经典系统, 以实现特定的功能. 在量子世界中, 对各种量子态的操纵不仅在验证量子力学基本原理方面有重要意义, 而且在其相关应用方面, 如量子计算机、量子通信、量子密码术等<sup>[1]</sup>, 也发挥着巨大的作用. 因此, 人们也期望按自己的意愿来实现对量子态的操纵和制备, 以达到特定的目的.

作为一种最接近经典行为的量子态, 相干态不仅是量子力学中重要的物理概念之一, 也是理论物理中的一种有效方法<sup>[2]</sup>. 例如, 它可以非常自然地解释一个微观量子系统怎样能够表现出宏观的集体行为, 从而给出相应量子力学现象的经典对应. 因此, 人们对相干态的制备深感兴趣, 例如, 文献<sup>[3]</sup>等就成功的在实验上制备出不同相位相干态的叠加, 从而观察到了宏观量子态的非经典效应. 通常地, 相干态都是利用位移算符作用于真空态而演化得到的. 在囚禁冷离子系统中<sup>[4]</sup>, 实现离子振动位移算符演化的方法主要有: 1) 在囚禁电场之外, 附加一个经典电场使离子产生一个位置的移动; 2) 用两束不同频率(频率差设为离子的囚禁频率)和传播方向相反的拉曼激光束所导致运动驻波来驱动离子; 3) 改

变囚禁势的谐振频率, 使囚禁势场中心产生一个非绝热的移动等. 这些制备方法需要满足一个共同的条件, 即囚禁离子的内外自由度之间的耦合必须足够弱, 以致于所谓的 Lamb-Dicke(LD)近似能够成立. 然而, 在实际的实验系统中<sup>[4]</sup>, 单个囚禁冷离子的内外自由度之间的耦合是可调的, 因而原则上系统可以工作于 LD 区之外<sup>[5-7]</sup>, 从而实现较强的耦合.

基于非 LD 近似下激光-离子相互作用的动力学规律, 本文建议一种通过叠加足够多振动数态的方法来近似地制备振动相干态. 这里的相干态不是利用位移算符作用于振动基态的一次演化产生的, 而是通过多个可控的量子演化过程, 使不同振动数态按不同的权重合成得到的. 当然, 由于实验条件(如激光脉冲次数及叠加态的退相干)的限制, 这里所制备出的有限个数态的宏观叠加, 并不是严格的由无穷数态叠加而成的相干态. 但是通过比较它们之间各种可观测的效应, 如 Q 函数、Wigner 函数和某些量子统计性质等, 我们发现, 只要叠加的振动数态足够多, 所制备出的叠加态可以很好地逼近标准的相干态.

## 2. 激光与囚禁冷离子相互作用的动力学

一个囚禁在射频阱中的二能级冷却离子与单模

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: hjyia@home.swjtu.edu.cn

激光场的相互作用,可一般地用如下的哈密顿量描述<sup>[8]</sup>:

$$H(t) = H_{\text{ex}} + H_0 + H_{\text{int}}, \quad (1)$$

式中,  $H_{\text{ex}} = \hbar v(a^+ a + 1/2)$ ,  $H_0 = \hbar\omega_0 \sigma_z/2$  分别描述离子外部振动自由度及其内部自由度;  $v$ ,  $\hbar\omega_0$  及  $\sigma_z$  分别为离子的外部振动频率、内部两能级之差和自旋 Pauli 矩阵的  $z$  分量. 当激光场为经典单模行波场(波矢  $k_L$ 、初相位  $\theta_L$ 、频率  $\omega_L$ )时, 相互作用项为

$$H_{\text{int}} = \hbar g[\sigma_+ e^{(k_L x - i\omega_L t - i\theta_L)} + \text{H.c.}], \quad (2)$$

式中  $x = \sqrt{\hbar/2m\omega_L}(a + a^+)$ ,  $g$  为激光与离子的相互作用强度. 这里假定了离子在阱中的振动频率满足  $\omega_x \ll \omega_{y,z}$ , 因而只需考虑冷离子沿阱轴  $x$  方向的振动. 在以角频率为  $\omega_L$  旋转的坐标系中, 单个囚禁冷离子与单模经典行波激光场的相互作用哈密顿量可改写为

$$H = \hbar v\left(a^+ a + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar\delta}{2}\sigma_z + \frac{\hbar\Omega}{2}\{\sigma_+ \exp[i\eta(a + a^+) - i\theta_L] + \text{H.c.}\}, \quad (3)$$

式中  $\delta = \omega_0 - \omega_L$  为失谐量,  $\Omega$  为 Rabi 频率,  $\eta = \sqrt{\hbar k_L^2/2m\omega_L}$  为描述离子内外自由度耦合强度的 LD 参数. 在  $\eta \ll 1$  的情况下, 可取一阶近似, 即所谓的 LD 近似:  $\exp[i\eta(a + a^+)] \approx 1 + i\eta(a + a^+)$ , 从而上面的 Hamiltonian 可简化为精确可解 Jaynes-Cummings 模型<sup>[9]</sup>的情形. 然而, 在实际的单离子阱实验中所用驱动激光的波矢  $k_L$  是可以控制的, 从而 LD 参数可取比较大的数值(例如在最近的实验中<sup>[10]</sup>,  $\eta = 0.25$ ). 在这种情况下, 仅考虑参数的一阶效应就不够了, 因而非 LD 近似下的动力学问题就成了我们下面工作的出发点.

不失一般性, 假定入射激光频率满足条件<sup>[5,6]</sup>:

$$\omega_L = \omega_0 - kv, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

则旋波近似下, 相互作用表象( $U_0 = \exp\{-it[\nu(a^+ a + 1/2) + \delta\sigma_z]\}$ )中的非 LD 近似哈密顿量可表示为

$$H_1 = \frac{\hbar\Omega}{2} e^{-\eta^2/2} \left[ e^{-i\theta_L} \sigma_+ (i\eta)^k \times \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(i\eta)^j (a^+)^j a^{j+k}}{j!(j+k)!} \right) + \text{H.c.} \right], \quad (4)$$

这种情况下, 系统的量子动力学问题仍然是精确可解的. 因而不同初态的演化, 可一般性地表示成

$$\begin{aligned} |m\rangle|g\rangle &\rightarrow |m\rangle|g\rangle, \quad m < k, \\ |m\rangle|g\rangle &\rightarrow \cos(\Omega_{m-k} t) |m\rangle|g\rangle \\ &+ i^{k-1} e^{-i\theta_L} \sin(\Omega_{m-k} t) |m-k\rangle|e\rangle \end{aligned}$$

$$m \geq k,$$

$$\begin{aligned} |m\rangle|e\rangle &\rightarrow \cos(\Omega_{m,k} t) |m\rangle|e\rangle - (i)^{k-1} \\ &\times e^{i\theta_L} \sin(\Omega_{m,k} t) |m+k\rangle|g\rangle, \end{aligned} \quad (5)$$

式中,  $|m\rangle$  为声子数为  $m$  的离子外部振动数态,  $|g\rangle$  和  $|e\rangle$  分别为离子内部两个能级的基态和激发态, 而

$$\begin{aligned} \Omega_{m,k} &= \frac{\Omega\eta^k}{2} e^{-\eta^2/2} \sqrt{\frac{(m+k)!}{(m)!}} \sum_{j=0}^m \frac{(i\eta)^j}{(j+k)!} C_m^j, \\ C_m^j &= \frac{m!}{j!(m-j)!}. \end{aligned} \quad (6)$$

则为有效的 Rabi 频率.

### 3. 非 LD 近似下囚禁冷离子振动相干态的合成

相干态是玻色湮灭算符的本征态:  $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ , 其本征值  $\alpha$  为一复数. 它实际上是由无穷多个数态叠加而成的一种宏观量子态, 即

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

在 LD 近似下, 相干态可由处于第一振动边带的拉曼位移光束来驱动处于振动基态的囚禁冷离子制备出<sup>[11]</sup>:

$$|\alpha\rangle = D(-Rt\eta e^{-i\theta})|0\rangle = D(\alpha)|0\rangle,$$

式中  $D(\alpha) = \exp(\alpha a^+ - \alpha^* a)$  为位移算符,  $R, \theta$  分别表示激光-离子耦合强度和激光相位. 同样地, 从实验上已经制备好的冷离子的振动基态出发, 我们将讨论在非 LD 近似下如何利用有限个激光脉冲来驱动冷离子, 将其各种振动数态按一定的权重叠加起来而合成得到其振动相干态. 我们的操作步骤如下:

第一步: 以频率  $\omega_L = \omega_0$ , 初相位  $\theta_1$  的激光脉冲来驱动射频阱中的冷离子. 假定脉冲的长度为  $t_1$ , 则系统将历经如下的量子演化过程:

$$\begin{aligned} |0\rangle|g\rangle &\rightarrow |\Psi_0\rangle = \cos(\Omega_{0,0} t_1) |0\rangle|g\rangle \\ &+ i^{-1} e^{-i\theta_1} \sin(\Omega_{0,0} t_1) |0\rangle|e\rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

第二步: 以频率  $\omega_L = \omega_0 - v$ , 初相位  $\theta_2$  的激光束继续驱动囚禁离子, 设作用时间为  $t_2$ , 则

$$\begin{aligned} |\Psi_0\rangle &\rightarrow |\Psi_1\rangle \\ &= \cos(\Omega_{0,0} t_1) |0\rangle|g\rangle \\ &+ i^{-1} e^{-i\theta_1} \sin(\Omega_{0,0} t_1) \{ \cos(\Omega_{0,1} t_2) |0\rangle|e\rangle \\ &- e^{i\theta_2} \sin(\Omega_{0,1} t_2) |1\rangle|g\rangle \}. \end{aligned} \quad (8)$$

第三步: 以频率  $\omega_L = \omega_0 - 2v$ , 初相位  $\theta_3$  的激光束继续激发囚禁离子, 作用时间为  $t_3$ , 则演化为

$$\begin{aligned}
& |\Psi_1\rangle \rightarrow |\Psi_2\rangle \\
& = \cos(\Omega_{0,0}t_1)|0\rangle|g\rangle \\
& \quad + i^{-1}e^{-i\theta_1}\sin(\Omega_{0,0}t_1)\{\cos(\Omega_{0,1}t_2) \\
& \quad \times \cos(\Omega_{0,2}t_3)|0\rangle|e\rangle \\
& \quad + ie^{i\theta_3}\cos(\Omega_{0,1}t_2)\sin(\Omega_{0,2}t_3)|2\rangle|g\rangle \\
& \quad - e^{i\theta_2}\sin(\Omega_{0,1}t_2)|1\rangle|g\rangle\}. \quad (9)
\end{aligned}$$

类似地,在第  $N+1$  步的操作中,我们以频率  $\omega_L = \omega_0 - N\nu$ ,初相位  $\theta_{N+1}$  的激光束来驱动囚禁离子,所获得的叠加量子态可表示为

$$\begin{aligned}
& |\Psi_{N-1}\rangle \rightarrow |\Psi_N\rangle \\
& = \sum_{m=0}^N C_m |m\rangle|g\rangle \\
& \quad + i^{-1}e^{-i\theta_1}\sin(\Omega_{0,0}t_1) \\
& \quad \times \prod_{j=2}^{N+1} \cos(\Omega_{0,j-1}t_j)|0\rangle|e\rangle, \quad (10)
\end{aligned}$$

式中

$$C_m = \begin{cases} \cos(\Omega_{0,0}t_1) & m=0, \\ ie^{i(\theta_2-\theta_1)}\sin(\Omega_{0,0}t_1)\sin(\Omega_{0,1}t_2) & m=1, \\ (-1)^{m-1}i^m e^{i(\theta_{m+1}-\theta_1)}\sin(\Omega_{0,0}t_1) \\ \times \sin(\Omega_{0,m}t_{m+1}) \prod_{j=2}^m \cos(\Omega_{0,j-1}t_j) & m>1. \end{cases} \quad (11)$$

我们设定第  $N+1$  次激光脉冲作用的时间  $t_{N+1}$  满足  $\cos(\Omega_{0,N}t_{N+1})=0$ ,则离子的内部态处在基态  $|g\rangle$ ,外部态为叠加态:

$$|\Psi_N^{\text{ex}}\rangle = \sum_{m=0}^N C_m |m\rangle.$$

由于每一步激光脉冲作用的时间  $t_m$  和相位  $\theta_m$  是由实验操作的,所以总可以使得  $C_m$  ( $m \leq N-1$ ) 满足:

$$C_m = \exp(-|\alpha|^2/2)\alpha^m/\sqrt{m!};$$

于是,便得到囚禁离子的外部量子态:

$$\begin{aligned}
|\Psi_N^{\text{ex}}\rangle & = \sum_{m=0}^{N-1} \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle \\
& \quad + C_N |N\rangle, \quad (12)
\end{aligned}$$

式中  $C_N$  由归一化条件得出:

$$\begin{aligned}
|C_N|^2 & = \left| \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \right. \\
& \quad \times \left. \frac{\alpha^{N-1}}{\sqrt{(N-1)!}} \text{ctg}(\Omega_{0,N-1}t_N) \right|^2 \\
& = 1 - \sum_{m=0}^{N-1} \left| e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \right|^2. \quad (13)
\end{aligned}$$

由于实验上所用的激光脉冲的次数总是有限的,因此上面得到的叠加态并不是严格的振动相干态,但是,只要  $N$  足够大,便可以认为它足够好地近似于所要得到的相干态.例如,由图 1 可见,如果相干态的平均光子数  $\langle n \rangle = |\alpha|^2 = 4$ ,则按上述的制备方法,我们只需要 8 步激光脉冲就可以获得保真度达到 0.9705 的近似相干态.

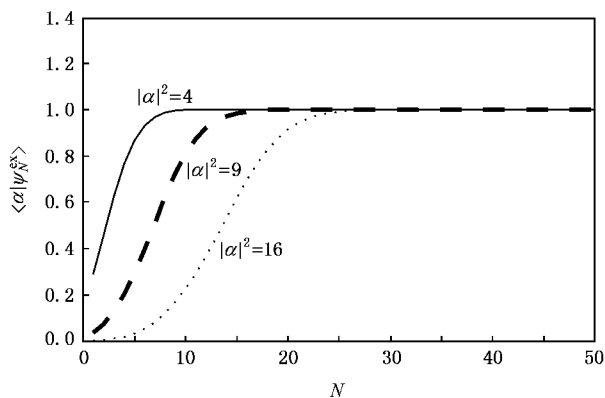


图 1  $|\alpha|^2=4, |\alpha|^2=9, |\alpha|^2=16$  时保真度随  $N$  的变化

这里保真度可以定义为标准相干态与实验所产生的量子态的内积:

$$\begin{aligned}
\alpha |\Psi_N^{\text{ex}}\rangle & = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \frac{\alpha^N}{\sqrt{N!}} C_N \\
& \quad + \exp(-|\alpha|^2) \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\alpha^{2m}}{m!}. \quad (14)
\end{aligned}$$

从图 1 我们还看到,激光脉冲作用次数越多,实验所产生的相干态的保真度就越高.另一方面,平均声子数  $\langle n \rangle = |\alpha|^2$  越小,相干态也越容易由实验得到,因为所需要的激光脉冲的次数也越少.要制备那些比较大的  $|\alpha|^2$  的相干态,则需要比较多次数的激光脉冲,例如,  $\langle n \rangle = |\alpha|^2 = 9$ ,保真度为 0.8749 时,需要 12 次激光脉冲操作.

原则上,上述的制备方案在实验上时可行的.首先,目前的激光技术条件是能够足够精确地控制脉冲时间并获得足够窄的激光带宽<sup>[3,12]</sup>.例如,文献[13]交替使用蓝红边带的激光束作用于初态为  $|0\rangle|g\rangle$  的囚禁冷离子,通过一系列的“ $\pi$ -脉冲”过程,制备出量子数高达 16 的振动数态.事实上,本文只考虑了处于红边带  $\omega_L = \omega_0 - kv$  ( $k=0,1,2,3,\dots$ ) 的单模经典行波激光与囚禁离子的相互作用,若考虑蓝红边带  $\omega_L = \omega_0 \pm kv$  的情况,我们同样可以获得任意振动数态的叠加<sup>[5]</sup>.另外,在上面的制备过程中,如果假定 Rabi 频率  $\Omega$  不变,则有效 Rabi 频率

$\Omega_{0,k}$  将随着激光脉冲的次数的增加而逐步减小, 如图 2 所示, LD 参数越小, 有效 Rabi 频率减小速度越快(图中  $\eta = 0.5, 0.35, 0.202^{[5]}$ ).

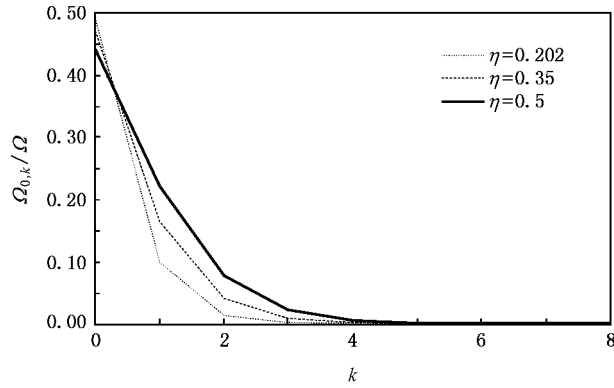


图 2  $\eta = 0.202, \eta = 0.35, \eta = 0.5$  时 Rabi 频率  $\Omega_{0,k}/\Omega$  随  $k$  的变化, 其中  $\Omega_{0,k}/\Omega = \eta^k \exp(-\eta^2/2) / \sqrt{k!}$

要产生满足条件的 Fock 态的叠加, 势必要求激光脉冲的时间有所增大. 例如, 按上述方案产生平均光子数  $\langle n \rangle = |\alpha|^2 = 4$  的相干态, 前 6 步激光脉冲的时间应为 ( $\eta = 0.25, \Omega = 2\pi \times 50 \text{ kHz}^{[5,8]}$ ):  $t_1 = 9.43 \times 10^{-6} \text{ s}, t_2 = 7.27 \times 10^{-6} \text{ s}, t_3 = 6.14 \times 10^{-5} \text{ s}, t_4 = 5.47 \times 10^{-4} \text{ s}, t_5 = 5.16 \times 10^{-3} \text{ s}, t_6 = 5.18 \times 10^{-2} \text{ s}$ ; 而实验中存在退相干, 激光脉冲的时间必须小于退相干时间. 因在实验中 Rabi 频率  $\Omega \propto \sqrt{P}$ , 我们便可以调节激光的功率  $P$  以增加有效 Rabi 频率  $\Omega_{0,k}$ , 使得激光脉冲时间  $t_N$  小于退相干时间<sup>[10]</sup>. 事实上, 离子处于激发态  $|e\rangle$  的时间能持续 1 s, 而态  $|0\rangle$  和  $|1\rangle$  的相干叠加可持续 1 ms<sup>[12]</sup>. 因此, 产生  $|n=0\rangle$  到  $|n=10\rangle$  的 Fock 态的叠加是完全可能的. 所以, 在相干态参数  $|\alpha|$  取较小值时(见图 1), 通过上述的方案, 我们是可以制备出具有相当高保真度的近似相干态的.

### 4. 近似相干态的非经典性质

相干态是最接近经典行为的量子态, 它可由无穷多个数态相干叠加而成的. 上面所制备的叠加量子态  $|\Psi_{(n)}\rangle = |\alpha_n, n+1\rangle = |\alpha_n + c_{n+1}\rangle |n+1\rangle$  只是有限个数态的相干叠加, 因而并不是严格意义上的相干态, 我们可以称之为近似相干态. 当然它应该具有与标准相干态所不同的一些物理性质, 如声子数的反群聚效应和某些量子涨落的压缩等非经典效应等<sup>[14-16]</sup>.

### 4.1. 近似相干态中声子的分布

声子在振动相干态中的分布为标准的泊松分布. 然而在上面所制备的近似相干态中, 声子的分布为

$$P_m = \begin{cases} e^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^{2m}}{m!} & m < n+1, \\ |c_{n+1}|^2 & m = n+1, \\ 0 & m > n+1, \end{cases} \quad (15)$$

显然, 在这个态中偏离泊松分布的概率为

$$p_{n+1} = |c_{n+1}|^2 = 1 - \sum_{m=0}^n |e^{-|\alpha|^2/2} \alpha^m / \sqrt{m!}|^2.$$

当  $n$  足够大时,  $p_{n+1}$  就变得相当小.

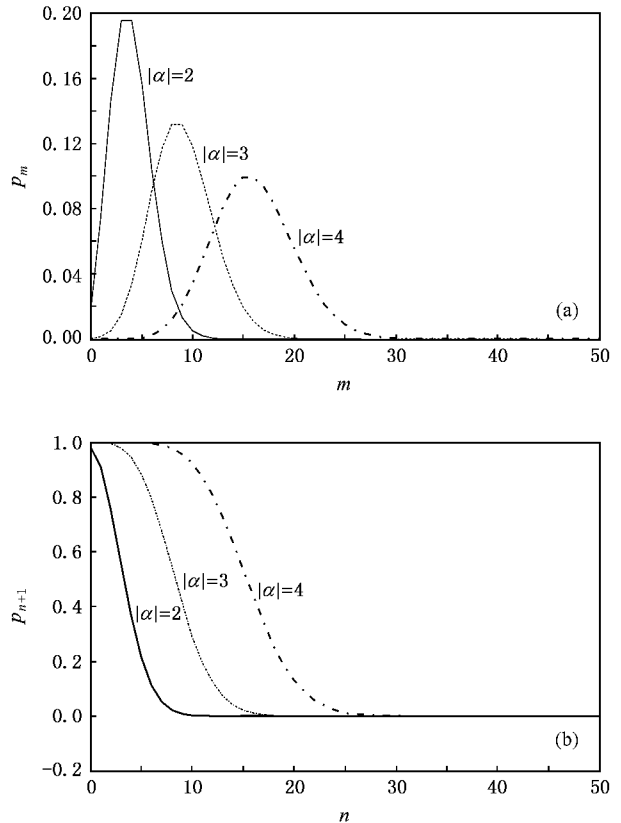


图 3  $|\alpha| = 2, |\alpha| = 3, |\alpha| = 4$  时声子分的布函数 (a)  $m < n+1$  时泊松分布 (b) 测得  $m = n+1$  个声子的概率

由图 3 所示, 对于那些量子态数  $n$  比较大的近似相干态来说, 其声子分布基本上与标准相干态一样, 都呈泊松分布的形式. 偏离这个分布的概率  $p_{n+1}$  随  $n$  的增加而迅速减小.

类似地, 容易计算以上所制备近似相干态  $|\alpha_n, n+1\rangle$  的  $Q$  函数<sup>[17]</sup>:

$$Q_n = \frac{n + 1 |\alpha_n| (a^+)^2 a^2 |\alpha_n| n + 1 - |n + 1 |\alpha_n| a^+ a |\alpha_n| n + 1|^2}{n + 1 |\alpha_n| a^+ a |\alpha_n| n + 1} \tag{16}$$

计算结果如图 4,由图可见近似相干态的  $Q$  函数小于并收敛于 0,具有亚泊松分布的特性,这是量子光场的一种非经典效应.但当叠加的数态数目  $n$  增加时,这种非经典效应逐渐减小,从而趋近于相干态情况下的泊松分布.图 4 中也反映了参数  $|\alpha|$  对分布函数的影响(图中  $|\alpha| = 2, 3, 4$ ), $|\alpha|$  越大,近似相干态的亚泊松分布特性越明显.

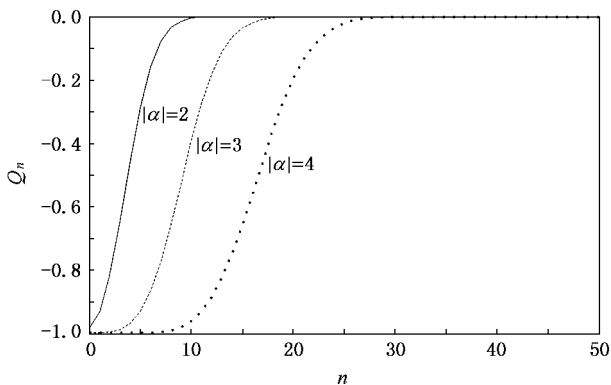


图 4  $|\alpha| = 2, |\alpha| = 3, |\alpha| = 4$  时近似相干态的  $Q$  函数随叠加数态数目  $n$  的变化

我们知道,准概率分布的 Wigner 函数包含了量子态在相空间中演化过程中的全部信息.若 Wigner 函数出现负值则说明该量子态是非经典的.根据在 Fock 态表象下 Wigner 函数的表达式<sup>[18,19]</sup>:

$$W_{(r,\theta)} = \frac{2}{\pi} e^{-2|re^{i\theta}|^2} \text{Re} \left[ \sum_{\substack{n,m=0 \\ n \geq m}}^{\infty} (-1)^n (2 - \delta_{nm}) \times \sqrt{\frac{m}{n!}} \{ 2re^{i\theta} \}^{n-m} L_m^{n-m}(4|re^{i\theta}|^2) \rho_{m,n} \right] \tag{17}$$

我们计算了这个函数.式中  $L_m^{n-m}(x)$  为连带拉盖尔多项式.如图 5 所示,近似相干态的  $n$  越大,则其 Wigner 函数(图 5 中曲线  $n = 4, 7$  表示)就越趋近于标准相干态的 Wigner 函数  $W_{|\alpha}(r, 0) = e^{-2|re^{i\theta} - \alpha|^2} / 2\pi$  (图中实线表示).为了方便,这里只考虑相角  $\theta = 0$  的情况.由图 5 可知近似相干态的 Wigner 函数呈现负值,说明它具有非经典效应,当然这种效应随着  $n$  的增大而减弱.

声子的反群聚效应也是区分其经典和非经典特性的主要判据之一,对以上所制备的近似相干态,可以精确地计算声子的二阶相干函数<sup>[20,21]</sup>:

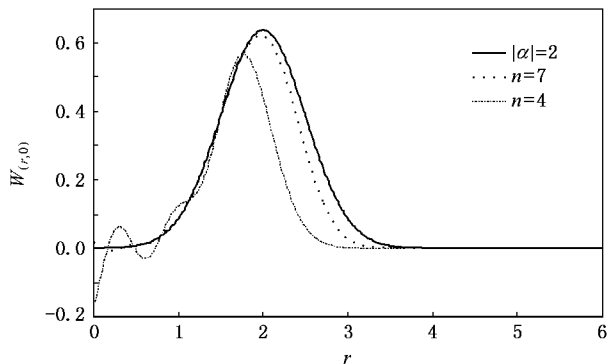


图 5 Wigner 函数  $W_{(r,0)}$ ,标准相干态平均声子数  $|\alpha|^2 = 4$ ,近似相干态的叠加数态数目  $n = 4, 7$

$$g = \frac{n + 1 |\alpha_n| (a^+)^2 a^2 |\alpha_n| n + 1}{|n + 1 |\alpha_n| a^+ a |\alpha_n| n + 1|^2} \tag{18}$$

由图 6 可知,在一定条件下近似相干态中的声子是反群聚的,即  $g < 1$ .当所叠加的数态的数目  $n$  足够大时,反群聚效应逐渐减小而趋近于相干态下的分布  $g = 1$ .

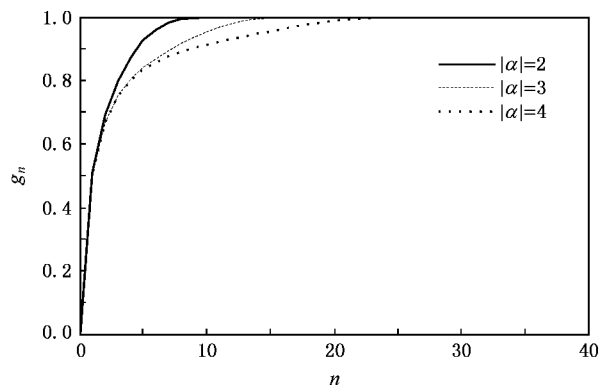


图 6  $|\alpha| = 2, |\alpha| = 3, |\alpha| = 4$  时近似相干态聚束效应随量子态数  $n$  的变化

### 4.2. 近似相干态的压缩效应

离子外部振动的两个正交分量  $x_1, x_2$ :  $x_1 = (a + a^+) / 2, x_2 = (a - a^+) / 2i$  的量子涨落分别定义为  $\langle \Delta x_1 \rangle^2 = \langle x_1^2 \rangle - \langle x_1 \rangle^2$ ;  $\langle \Delta x_2 \rangle^2 = \langle x_2^2 \rangle - \langle x_2 \rangle^2$ .对  $i$  方向上的涨落分量:  $S_i = \langle \Delta x_i^2 \rangle - (1/4)$ ;  $i = 1, 2$  而言,若  $S_i < 0$ ,则称离子在  $i$  方向上量子涨落受到了压缩,反之则是无压缩.显然,对标准的相干态,我们有  $S_i = 0$ ,即其在两个正交的振动

方向上均无压缩现象,然而,对以上所制备的近似相干态而言,容易计算以上的涨落分量<sup>[22,23]</sup>,如

$$\begin{aligned}
 S_1 &= n+1 \langle \alpha_n | \frac{1}{4} (a^2 + aa^+ + a^+ a + (a^+)^2) \\
 &\times | \alpha_n, n+1 \rangle - n+1 \langle \alpha_n | \frac{1}{2} (a + a^+) \\
 &\times | \alpha_n, n+1 \rangle - \frac{1}{4}. \quad (19)
 \end{aligned}$$

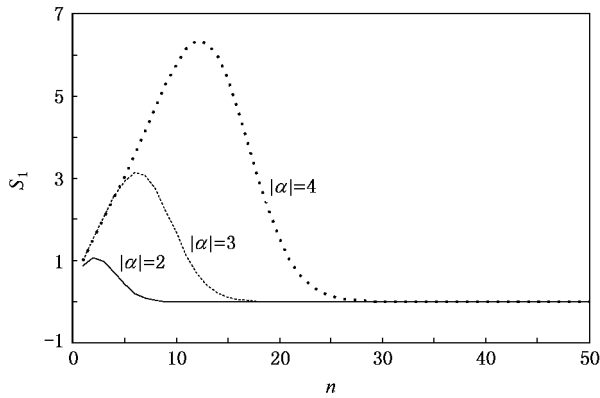


图7  $|\alpha|=2, |\alpha|=3, |\alpha|=4$  时近似相干态的压缩度随叠加态数目  $n$  的变化

由图7知:随着量子态数  $n$  的增加,近似相干态的压缩效应逐渐减小,当  $n$  足够大时压缩度趋于0.另外,由图7中的三条曲线可以看出参数  $|\alpha|$  越大,压缩效应也越明显.

## 5. 结 论

基于非 LD 近似下的单模经典激光场与囚禁冷却离子相互作用的动力学规律,本文讨论了如何通过选择适当(激发时间,激发参数)的激光序列来驱动囚禁冷却离子,从而近似地制备出其振动相干态.通过具体讨论这种近似相干态的振动声子分布特性,如 Q 函数, Wigner 分布;及其量子统计性质,如振动分量的量子涨落压缩和振动声子的反群聚效应等,我们给出了所制备出的这种数态的叠加态是如何在物理上趋近于标准相干态的.实验上实现的囚禁离子都具有相当长的相干时间以及激发态寿命,所以,本文所建议在非 LD 近似下制备离子振动相干态的近似方法,原则上是可行的.

- [1] Ekert A, Jozsa R 1996 *Rev. Mod. Phys.* **68** 733
- [2] Glauber R J 1963 *Phys. Rev.* **130** 2529
- [3] Monroe C, Meekhof D M, King B E, Wineland D J 1996 *Science* **272** 1131
- [4] Leibfried D, Blatt R, Monroe C, Wineland D 2003 *Rev. Mod. Phys.* **75** 281
- [5] Wei L F, Liu Y X, Nori F 2004 *Phys. Rev. A* **70** 063801
- [6] Wei L F, Liu S Y, Lei L X 2002 *Phys. Rev. A* **65** 062316
- [7] Lan H J, Yang Q Y, Wei L F 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1730 (in Chinese) [蓝海江, 杨庆怡, 韦联福 2002 物理学报 **51** 1730]
- [8] Vogel W, Matos F 1995 *Phys. Rev. A* **52** 4214
- [9] Jaynes E T, Cummings F W 1963 *Proc. IEEE* **51** 89
- [10] Barton P A, Donald C J S, Lucas D M, Stevens D A, Steane A M, Stacey D N 2000 *Phys. Rev. A* **62** 032503
- [11] Heping Z, Yu Z W, Yusaburo S 1999 *Phys. Rev. A* **59** 2174
- [12] Roos C, Zeiger T, Rohde H, Nägerl H C, Eschner J, Leibfried D, Schmidt-Kaler F, Blatt R 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 4713
- [13] Meekhof D M, Monroe C, King B E, Itano W M, Wineland D J 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1796
- [14] Yamamoto Y, Haus H A 1986 *Rev. Mod. Phys.* **58** 1001
- [15] Zheng S B 2004 *Chin. Phys.* **13** 1862
- [16] Wu H Z, Su W J 2007 *Chin. Phys.* **16** 106
- [17] Yen H P 1996 *Phys. Rev. A* **13** 2226
- [18] Brune M, Haroche S, Raimond J M 1992 *Phys. Rev. A* **45** 5193
- [19] Yang Q Y, Sun J W, Wei L F, Ding L E 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2704 (in Chinese) [杨庆怡, 孙敬文, 韦联福, 丁良恩 2005 物理学报 **54** 2704]
- [20] Liu X M, Wang S J, Zhang W Z 1995 *Phys. Rev. A* **51** 4229
- [21] Wei L F, Xi D P 2000 *Chin. Phys.* **9** 586
- [22] Ma Z M, Ma A Q, Zeng R, Wang H, Liu S T 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2049 (in Chinese) [马志民, 马爱群, 曾然, 王衢, 刘树田 2005 物理学报 **54** 2049]
- [23] Fang M F, Liu X 2001 *Chin. Phys.* **10** 720

# Generations of coherent states of single trapped cold ion beyond the Lamb-Dicke limit

Zhang Miao Jia Huan-Yu<sup>†</sup>

( *Institute of Modern Physics ,Southwest Jiaotong University ,Chengdu 610031 ,China* )

( Received 27 April 2007 ; revised manuscript received 10 June 2007 )

## Abstract

Based on the quantum dynamics of laser-ion interaction beyond the Lamb-Dicke limit ,we discuss how to superpose a series of vibrational number states from motional ground state by sequentially applying laser beams . The Q function ,Wigner distribution function ,and the nonclassical properties such as squeezing effect and anti-bunching effect of the generated superposition states are investigated in detail by numerical method . It is shown that ,by controlling the durations of the applied laser pulses ,these quantum states could well approach to the well-known coherent states .

**Keywords** : Lamb-Dicke approximation , superposition states , coherent states , nonclassical features

**PACC** : 4250

---

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail [hyjia@home.swjtu.edu.cn](mailto:hyjia@home.swjtu.edu.cn)