第 57 卷 第 3 期 2008 年 3 月
1000-3290/2008/57(03)/1291-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.57,No.3,March,2008

三维赤道海气振子模型的近似解*

莫嘉琪[1)2)3)†] 林万涛[4)]

1)(安徽师范大学,芜湖 241000)

2)(湖州师范学院,湖州 313000)

3)(上海高校计算科学院 E-研究院上海交通大学研究所,上海 200240)

4)(LASG,中国科学院大气物理研究所,北京 100029)

(2007 年 5 月 6 日收到;2007 年 6 月 13 日收到修改稿)

研究了一个赤道 Kelvin 波的方程.利用变分迭代解法,得到了其近似解.变分迭代方法是一个解析方法,得到的解还能够继续进行解析运算.

关键词:变分迭代,近似解,Kelvin

PACC:0230,0200

1.引 言

近二十年来,厄尔尼诺(El Niño)和拉尼娜(La Niña)导致的全球气候异常乃至全球生态环境异常为各国科学家和政府所关注.其根本原因在于大气和海洋的交相作用.热带海气交互作用仍为当今研究的热点课题,目前也取得了很大的进展,但由于问题的复杂性,仍有许多根本的问题尚未解决.

当前对海气交互作用的研究,多把海表温度(SST)当作唯一重要的海洋因素.但是,事实上,从物理角度来看,海洋上层热储量的变化更为重要.决定海洋上层热储量异常的因素除海水温度异常外,海温异常区的海水体积、质量和海水和大气的压力等也同样重要.所以我们还需要研究整个海洋上层的热力学状况及其异常和动力学特征.因此,海洋上层热力学及动力学状况异常对海气交互作用极为重要[1,2].这也说明需要研究太平洋上层热力学和动力学属性的三维结构给出季节变率和年际变率等大值区的水平和垂直分布状况.这是影响了上述季节和年际变率大值区的热储量的主控因子.因此需要对它们进一步研究.本文主要研究一类联系到稳定层型大气的三维 Kelvin 波的模型.

用近似理论来研究大气物理和海洋气候的特征是当前学术界经常采用的方法.在近十年来近似方法已不断地被改进和优化,包括平均法、边界层法,渐近匹配法和多尺度方法等.在这方面,近来许多学者诸如 Ni 和 Wei[3],Bartier[4],Khasminskii 和 Yin[5],Marques[6] 以及 Bobkova[7] 已经作了大量的工作.利用微分不等式及其他方法莫嘉琪、林万涛、韩祥林和欧阳成等[8—21] 也研究了非线性奇摄动问题的激波解和大气物理等问题.本文利用一个特殊的变分迭代方法来构造大气物理中的海气振子的近似解.

2.Kelvin 波模型

今考虑如下一类三维海气振子 Kelvin 波方程[22]:

$$\frac{\partial^3 \pi}{\partial t\partial y\partial z}-\frac{\Gamma\partial^2\pi}{\partial t\partial x}-\frac{f'\partial^2\pi}{\partial x\partial y}-\frac{f\partial^2\pi}{\partial x\partial z}+\frac{f\Gamma\partial\pi}{\partial x}+\frac{\alpha ff'}{C^2}\frac{\partial\pi}{\partial t}=0,$$

其中自变量 t,x,y,z 分别为时间变量,东西向,南北向和垂直于海平面向的坐标,而 π 为压力函数,C 为 Laplace 声速,Γ 和 α 为相应变量的系数,f 和 f'

* 国家自然科学基金(批准号:40676016,10471039)、国家重点基础研究发展规划项目(批准号:2003CB415101-03,2004CB418304),中国科学院知识创新工程方向性项目(批准号:KZCX3-SW-221),上海市教育委员会 E-研究院建设计划项目(批准号:E03004)和浙江省自然科学基金(批准号:Y606268)资助的课题.

† E-mail:mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

为相应的 Coriolis 参数，在本文中近似地假设 $f=\beta y$，$f'=f_0$，这里 $\beta=\Omega/a$，Ω 为地球的角速度，a 为地球的半径，f_0 为对应的常数[22]．故上述方程便可表示为

$$\frac{\partial^3\pi}{\partial t\partial y\partial z}-\frac{\Gamma\partial^2\pi}{\partial t\partial x}-\frac{f_0\partial^2\pi}{\partial x\partial y}-\frac{\beta y\partial^2\pi}{\partial x\partial z}+\frac{\beta\Gamma y\partial\pi}{\partial x}+\frac{\alpha\beta f_0 y}{C^2}\frac{\partial\pi}{\partial t}=0. \quad (1)$$

不妨假设方程(1)的解满足如下初始条件：

$$\pi|_{t=0}=\phi(x,y,z), \quad (2)$$

其中 ϕ 为已知的光滑函数．

首先考虑原 Kelvin 波方程(1)的退缩情形

$$\frac{\Gamma\partial^2\pi}{\partial t\partial x}+\frac{f_0\partial^2\pi}{\partial x\partial y}+\frac{\beta y\partial^2\pi}{\partial x\partial z}-\frac{\beta\Gamma y\partial\pi}{\partial x}=0. \quad (3)$$

利用首次积分方法可以得到满足偏微分方程 Cauchy 问题(3)，(2)的解为

$$\bar{\pi}(x,y,z,t)=\left[\exp\left(-\beta t\left(\frac{f_0 t}{2\Gamma}-y\right)\right)\right]\times\left[\phi\left(x,-\frac{f_0 t}{\Gamma}+y,\frac{\beta t}{\Gamma}\left(\frac{f_0 t}{2\Gamma}-y\right)+z\right)\right]. \quad (4)$$

3．变分迭代

现引入泛函 F，

$$F[\pi]=\pi+\int_0^t\lambda(\tau)\left[\frac{\partial^3\bar{\pi}}{\partial\tau\partial y\partial z}-\frac{\Gamma\partial^2\bar{\pi}}{\partial\tau\partial x}-\frac{f_0\partial^2\bar{\pi}}{\partial x\partial y}-\frac{\beta y\partial^2\bar{\pi}}{\partial x\partial z}+\frac{\beta y\Gamma\partial\bar{\pi}}{\partial x}+\frac{\alpha\beta f_0 y}{C^2}\frac{\partial\pi}{\partial\tau}\right]d\tau, \quad (5)$$

其中 $\bar{\pi}$ 为 π 的限制变量[23]，而 λ 为 Lagrange 乘子．

计算泛函(5)的变分 δF，

$$\delta F=\delta\pi+\frac{\alpha\beta f_0 y}{C^2}\left[(\lambda\delta\pi)|_{\tau=t}-\int_0^t\lambda'\delta\pi d\tau\right]. \quad (6)$$

由(6)式，令 $\delta F=0$．于是驻值条件为

$$\frac{d\lambda}{d\tau}=0,\ \tau>t,\ \lambda(\tau)|_{\tau=t}=-\frac{C^2}{\alpha\beta f_0 y}. \quad (7)$$

由(7)式得

$$\lambda=-\frac{C^2}{\alpha\beta f_0 y}. \quad (8)$$

再由(1)，(2)，(5)，(8)式，构造如下的变分迭代：

$$\pi_{n+1}=\pi_n+\frac{C^2}{\alpha\beta f_0 y}\int_0^t\left[\frac{\Gamma\partial^2\pi_n}{\partial\tau\partial x}+\frac{f_0\partial^2\pi_n}{\partial x\partial y}+\frac{\beta y\partial^2\pi_n}{\partial x\partial z}-\frac{\beta y\Gamma\partial\pi_n}{\partial x}-\frac{\alpha\beta f_0 y}{C^2}\frac{\partial\pi_n}{\partial\tau}-\frac{\partial^3\pi_n}{\partial\tau\partial y\partial z}\right]d\tau. \quad (9)$$

由(9)式决定的函数列 $\{\pi_n\}$，令 $\pi=\lim_{n\to\infty}\pi_n$，它就是问题(1)，(2)的解．

现在首先选择初始近似解 π_0 为 Cauchy 问题(3)，(2)的解(4)．即 $\pi_0(x,y,z,t)=\bar{\pi}(x,y,z,t)$．

将初始近似 π_0 代入迭代关系式(9)，得到问题(1)，(3)解的一次近似：

$$\pi_1=\pi_0-\frac{C^2}{\alpha\beta f_0 y}\int_0^t\left[\left(\frac{\alpha\beta f_0 y}{C^2}\right)\frac{\partial\pi_0}{\partial\tau}+\frac{\partial^3\pi_0}{\partial\tau\partial y\partial z}\right]d\tau=\pi_0-\left[\pi_0+\frac{C^2}{\alpha\beta f_0 y}\frac{\partial^2\pi_0}{\partial y\partial z}\right]\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}.$$

于是有

$$\pi_1=\phi(x,y,z)-\left[\frac{C^2}{\alpha\beta f_0 y}\exp\left(-\beta t\left(\frac{f_0 t}{2\Gamma}-y\right)\right)\right]\times\left[\beta t\frac{\partial}{\partial z_1}\phi(x,y_1,z_1)+\frac{\partial^2}{\partial y_1\partial z_1}\phi(x,y_1,z_1)-\frac{\beta t}{\Gamma}\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\phi(x,y_1,z_1)-\frac{\partial^2\phi(x,y,z)}{\partial y\partial z}\right]_{y_1=-\frac{f_0 t}{\Gamma}+y,\ z_1=\frac{\beta t}{\Gamma}\left(\frac{f_0 t}{2\Gamma}-y\right)+z}. \quad (10)$$

用相同的方法，可得 Kelvin 波模型(1)，(2)的更高次的近似解．

4．例

现给定海气振子 Kelvin 波模型(1)如下特殊参数[22]：$C=325\ \mathrm{ms^{-1}}$，$f_0=1.4\times10^{-4}\ \mathrm{s^{-1}}$，$\alpha=1$，$\beta=1.09\times10^{-10}\ \mathrm{m^{-1}s^{-1}}$，$\Gamma=4.5\times10^{-5}\ \mathrm{m^{-1}}$，并取初始值为 $\phi(x,y,z)=10^{-1}\exp(-(x^2+y^2+z))$．这时由(9)式，可得模型(1)，(2)解 π 的零次，一次近似 $\pi_0(x,y,z,t)$ 和 $\pi_1(x,y,z,t)$：

$$\pi_0(x,z,t)=10^{-1}\exp[-x^2+(1.33)t(1,56t-y)+(-3.11t+y)^2+z],$$

$$\pi_1(x,z,t)=10^{-1}\exp(-(x^2+y^2+z))-6.84\times10^{17}[\exp(-1.09\times10^{-10}t(1.56t-y))]\times\Big[-2y\exp(-(x^2+y^2+z))+[(-2.42\times10^{-6}-1.09\times10^{-10}t+2y_1)\times\exp(-(x^2+y_1^2+z_1))]_{y_1=(3.11)t+y,\ z_1=2.42\times10^{-6}t(1.56t-y)+z}\Big]. \quad (11)$$

因此可以得到 π 在例如离海平面 $z=5$ m 处的初始值的曲面分布图(参见图 1)和一次近似 π_1，例

如在第五天，于相同高度的曲面分布情况（参见图 2）.

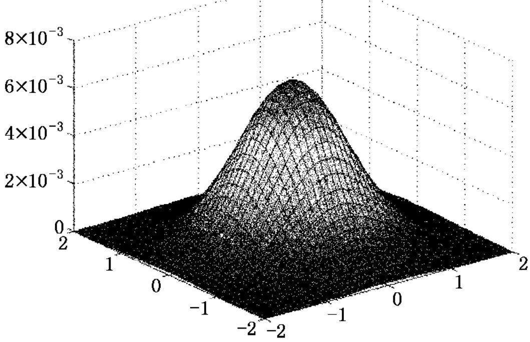

图 1　π 的初始分布曲面图（$z = 5$ m）

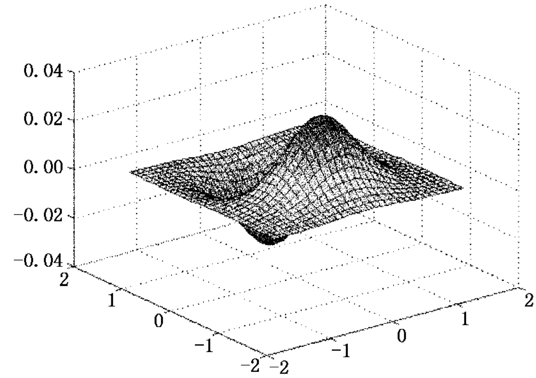

图 2　π_1 在第五日的分布曲面图（$z = 5$ m）

在相应参数下的 Kelvin 波模型（1），（2）求得的解的一次近似 π_1 的解（11）式和图 2 出发，我们还可以对相关的物理量的定性、定量情形再继续进行研究. 但在本文中不再予以进一步讨论.

5. 结　论

海气振子 Kelvin 波是大气物理中的一个复杂现象. 我们需要讨论它的基本模型方程. 并且去求解它. 用变分迭代方法就是一个简单而有效的方法. 利用构造一个泛函并用变分原理，从合理的初始近似及迭代的方法去逼近相应模型（1），（2）的精确解. 本文中从方程（3）的解出发作为精确解的零次近似 π_0，这是十分自然的. 这样可以较快地得到近似解所要求的精度[22]. 同时，用变分迭代方法得到的是近似解析解，它不同于用一般计算方法得到的数值解. 因此，得到的解析解还可进行解析运算. 从而，还可以得到更多解的性态.

[1] Emanuel K A 1979 *J. Atm. Sci.* **36** 2425
[2] Sun W Y 1995 *Q. J. Meteorol. Soc.* **121** 419
[3] Ni W M, Wei J C 2006 *J. Diff. Eqns.* **221** 158
[4] Bartier J P 2006 *Asymptotic Anal.* **46** 325
[5] Khasminskii R Z, Yin G 2005 *J. Diff. Eqns.* **212** 85
[6] Marques I 2005 *Nonlinear Anal.* **61** 21
[7] Bobkova A S 2005 *Diff. Eqns.* **41** 23
[8] Mo J Q, Zhu J, Wang H 2003 *Prog. Natu. Sci.* **13** 768
[9] Mo J Q, Lin W T, Zhu J 2004 *Prog. Natu. Sci.* **14** 1126
[10] Mo J Q, Lin W T, W H 2007 *Prog. Natu. Sci..* **17** 230
[11] Mo J Q, Wang H, Lin W T 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3229 (in Chinese)［莫嘉琪、王　辉、林万涛 2006 物理学报 **55** 3229］
[12] Mo J Q, Zhang W J, He M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3233 (in Chinese)［莫嘉琪、张伟江、何　铭 2006 物理学报 **55** 3233］
[13] Mo J Q, Zhang W J, He M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1843 (in Chinese)［莫嘉琪、张伟江、何　铭 2006 物理学报 **56** 1843］
[14] Mo J Q, Zhang W J, He M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1847 (in Chinese)［莫嘉琪、张伟江、何　铭 2007 物理学报 **56** 1847］
[15] Mo J Q, Wang H, Lin W T, Lin Y H 2006 *Chin. Phys.* **15** 671
[16] Mo J Q, Wang H, Lin W T 2006 *Chin. Phys.* **15** 1927
[17] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2007 *Chin. Phys.* **16** 578
[18] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2007 *Chin. Phys.* **16** 951
[19] Ouyang C 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1900 (in Chinese)［欧阳成 2004 物理学报 **53** 1900］
[20] Han H L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4061 (in Chinese)［韩祥临 2004 物理学报 **53** 4061］
[21] Han H L 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2510 (in Chinese)［韩祥临 2005 物理学报 **54** 2510］
[22] Raymond, W H 2001 *Dynamics Atmospheres and Oceans* **34** 23
[23] He J H 2002 *Approximate Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Zhengzhou: Henan Science and Technology Press) (in Chinese)［何吉欢 2002 工程和科学计算中的近似非线性分析方法（郑州：河南科学技术出版社）］

Approimate solution for three dimentional equatorial sea-air oscillator model *

Mo Jia-Qi[1)2)3)†] Lin Wan-Tao[4)]

1)(*Department of Mathematics*, *Anhui Normal University*, *Wuhu* 241000, *China*)

2)(*Department of Mathematics*, *Huzhou Teachers College*, *Huzhou* 313000, *China*)

3)(*Division of Computational Science*, *E-Institutes of Shanghai Universities at SJTU*, *Shanghai* 200240, *China*)

4)(*LASG*, *Institute of Atmospheric Physics*, *Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100029, *China*)

(Received 6 May 2007; revised manuscript received 13 June 2007)

Abstract

An equation for the equatoral Kelvin wave is considered. By using the variational iteration method, the approximate solution is studied. The variational iteration method is an analytic method, the obtained solution can be analytic operation sequentially.

Keywords: variational iteration, approximate solution, Kelvin wave

PACC: 0230, 0200

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 40676016 and 10471039), the National Key Basics Research Special Foundation of China (Grant Nos. 2003CB415101-03 and 2004CB418304), the Key Basic Research Foundation of Chinese Academy of Sciences (Grant No. KZCX3-SW-221), in Part by E-Insitutes of Shanghai Municipal Education Commission (Grant No. E03004) and the National Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. Y606268).

† E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn