第 57 卷 第 3 期 2008 年 3 月
1000-3290/2008/57(03)/1301-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57,No.3,March,2008

论微分约束系统的 d-δ 对易关系*

郭永新[1)†] 赵 [2)] 刘世兴[1)] 刘 畅[1)]

1)(辽宁大学物理学院和数学应用中心,沈阳 110036)

2)(沈阳药科大学基础学院,沈阳 110016)

(2007 年 5 月 18 日收到;2007 年 6 月 21 日收到修改稿)

利用 Frobenius 可积性定理,研究微分约束系统一个重要的变分法问题:微分运算与变分运算的对易关系. 文中以微分约束的 Frobenius 可积性理论为依据,在分析线性稳定微分约束系统和仿射微分约束系统的 d-δ 对易关系基础上,简要论证了微分与变分的非对易子与微分约束的非完整性之间的关系. 对非线性微分约束系统的微分与变分运算的对易关系作了讨论. 给出了三个实例来验证结论.

关键词:非完整约束,Frobenius 可积性,d-δ 对易关系

PACC:0320

1. 引 言

微分约束系统大量存在于物理学、力学以及工程技术领域. 按着微分约束的 Frobenius 可积性定理,微分约束分为可积的和不可积的,又可称为完整的和非完整的. 可积的微分约束系统可以变为一个几何约束系统,即变为仅对位形约束的系统,这类系统又可以约化为低阶的无约束系统[1]. 不可积的微分约束系统,即非完整约束系统,不可能约化为自由系统. 非完整约束的不可积性导致非完整约束实现方式的非唯一性,从而进一步导致非完整系统的动力学模型的多元化[2],即存在 Chetaev 型动力学模型[3—8]和 vakonomic (variational axiomatic kind)动力学模型[9—20].

变分法和变分原理在动力学系统的研究中,发挥着重要的作用. 对于非完整约束系统,传统的研究方法仍就采用完整系统的变分法. 但是,在变分法和变分原理这种推广应用的过程中,遇到了极大的困难,如变分算符不唯一、变分运算和微分运算可以不对易、关于变分的 Chetaev 条件等,尤其是由 D' Alembert-Lagange 原理所得到的 Chetaev 型动力学方程,如 Routh 方程和 Chaplygin 方程,和由 Hamilton 原理得到的 vakonomic 方程一般没有共同解. 由于动力学模型的不一致,所以产生了对变分法和变分原理的诸多争议,其中微分算符与变分算符的对易关系,即 d-δ 对易关系,就是非完整系统变分法的一个重要问题. 在完整约束系统中,微分算符与变分算符总是对易的,而当系统受到非完整约束时,如果变分算符满足 Chetaev 条件和约束方程的变分为零,则变分算符与微分算符一般就不能对易[21],过去对这一结论的理解主要是根据经验. 虽然在文献[22]中对此作了几何上的论证,但由于采用了约束流形、纤维丛、联络和曲率等几何语言和工具,使得习惯于变分法的研究者难以理解. 本文将紧密围绕约束的 Frobenius 可积性来研究 d-δ 对易关系,在分析线性稳定微分约束系统和一般线性微分约束即仿射微分约束系统的 d-δ 对易关系基础上,给出非对易子与微分约束的非完整性之间的对应关系,从而使 d-δ 对易关系得到形象理解和证明. 文中对非线性微分约束系统也予以讨论.

为方便起见,文中采用爱因斯坦求和约定,并对指标取值范围作如下规定:$s,r=1,2,\cdots,n$;$i,j,k=0,1,\cdots,n$;$\mu,\nu,\sigma,\kappa=1,2,\cdots,m<n$;$\rho,\lambda=0,1,\cdots,m$;$\alpha,\beta=m+1,m+2,\cdots,n$.

* 国家自然科学基金(批准号:10472040),辽宁省优秀青年科研人才培养基金(批准号:3040005),教育部留学回国人员科研启动基金(批准号:2004527),教育部春晖计划项目(批准号:Z2005-1-21006)和辽宁省教育厅基础研究计划项目(批准号:05L155)资助的课题.

† E-mail:guoyongxin@lnu.edu.cn

2. 线性微分约束系统的 d-δ 对易关系

设力学系统的位形流形是一个 n 维光滑流形 Q，$\{q^s\}$ 是其局部坐标，相应的广义速度表示为 $\{v^s\}$ 或 $\{\dot{q}^s\}$. 该系统的状态空间可以用切丛 TQ 来表示.

设 c_q 和 $\bar{c}_q$ 为连接 M 上两个固定点 q_1^s 和 q_2^s 的光滑曲线，考虑一个双参数函数 $q^s(t,\alpha)\in C^2$，它满足 $q^s(t,0)=q^s(t)$，$q^s(t,1)=\bar{q}^s(t)$；$q^s(t_1,\alpha)=q_1^s$，$q^s(t_2,\alpha)=q_2^s$. 我们用如下标记来分别表示沿任意路径的微分和路径的变分：

$$\mathrm{d}q^s=\partial_t q^s(t,\alpha)\mathrm{d}t\doteq v^s\mathrm{d}t,\tag{1a}$$

$$\delta q^s=\partial_\alpha q^s(t,\alpha)d\alpha\doteq w^s\mathrm{d}\alpha.\tag{1b}$$

要求变分向量场 $w^s(q^s,t)\in R\times T_qQ$ 满足固定端点条件

$$\delta q^s|_{t_{1,2}}=0,\ w^s|_{t_{1,2}}=0.\tag{2}$$

假设系统受到 $(n-m)$ 个独立的一阶线性稳定的非完整约束

$$\dot{q}^\alpha=B_\mu^\alpha(q^\nu)\dot{q}^\mu,\tag{3}$$

则该系统的自由度为 $n-m$. 容易验证变分 δ 满足如下变分恒等式：

$$\begin{aligned}&\delta\dot{q}^\alpha-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q^\alpha-B_\mu^\alpha\Big[\delta\dot{q}^\mu-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q^\mu)\Big]\\&-\delta(\dot{q}^\alpha-B_\mu^\alpha\dot{q}^\mu)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q^\alpha-B_\mu^\alpha\delta q^\mu)\\&\equiv 2B^\alpha_{[\nu,\mu]}\dot{q}^\nu\,\delta q^\mu,\end{aligned}\tag{4}$$

其中，$B^\alpha_{[\nu,\mu]}=\frac{1}{2}(B^\alpha_{\nu,\mu}-B^\alpha_{\mu,\nu})$，$B^\alpha_{\nu,\mu}=\frac{\partial B^\alpha_\nu}{\partial q^\mu}$. 由此可见，变分算符 δ 一般不能同时满足下述三个条件：

$$\delta\dot{q}^\alpha-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q^\alpha-B_\mu^\alpha\Big[\delta\dot{q}^\mu-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q^\mu)\Big]=0,\tag{5a}$$

$$\delta(\dot{q}^\alpha-B_\mu^\alpha\dot{q}^\mu)=0,\tag{5b}$$

$$\delta q^\alpha-B_\mu^\alpha\delta q^\mu=0.\tag{5c}$$

条件(5a)是微分与变分运算的对易关系，条件(5b)要求约束方程的变分为零，条件(5c)为变分所满足的 Chetaev 条件，其几何意义可见文献[2]. 当约束在 Frobenius 定理意义下可积时，上述三个条件可以同时得到满足. 根据变分恒等式(4)，可以定义三类不同的变分，它们分别满足上述三个条件中的两个. 其中，Suslov 变分满足如下条件：

$$\delta(\dot{q}^\alpha-B_\mu^\alpha\dot{q}^\mu)=0,\qquad \delta q^\alpha-B_\mu^\alpha\delta q^\mu=0,\tag{6a}$$

$$\begin{aligned}&\delta\dot{q}^\alpha-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q^\alpha-B_\mu^\alpha\Big[\delta\dot{q}^\mu-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q^\mu)\Big]\\&=2B^\alpha_{[\nu,\mu]}\dot{q}^\nu\,\delta q^\mu.\end{aligned}\tag{6b}$$

在经典非完整力学中，通常进一步假定 $\delta\dot{q}^\mu-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q^\mu)=0$，从而由(6b)式可得

$$\delta\dot{q}^\alpha-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q^\alpha=2B^\alpha_{[\nu,\mu]}\dot{q}^\nu\,\delta q^\mu.\tag{7}$$

这就是线性稳定非完整约束系统的一种 d-δ 对易关系. 显然，在此情况下 Suslov 变分 δ 与微分 d 对易的充分必要条件是

$$B^\alpha_{[\nu,\mu]}=0.\tag{8}$$

实际上，也可以假定 $\delta\dot{q}^\alpha-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q^\alpha=0$，从而由(6b)式可得

$$\delta\dot{q}^\mu-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q^\mu)=2S^\mu_{\nu\sigma}\dot{q}^\nu\,\delta q^\sigma,\tag{9}$$

其中

$$S^\mu_{\nu\sigma}=g^{\mu\kappa}g_{sr}\,\varepsilon^s_\kappa\,\varepsilon^r_{[\sigma,\nu]}.\tag{10}$$

当 s,r 取 $\mu=1,2,\cdots,m$ 时，$\varepsilon^\mu_\kappa=\delta_\kappa{}^\mu$；当 s,r 取 $\alpha=m+1,m+2,\cdots,n$ 时，$\varepsilon^\alpha_\sigma=B_\sigma{}^\alpha$；$g_{sr}$ 为 Riemann 位形流形 Q 的度规张量的分量，$g^{\mu\kappa}$ 为 Riemann-Cartan 约束流形的度规张量

$$g_{\mu\nu}=(\varepsilon_\mu,\varepsilon_\nu)=g_{sr}\varepsilon_\mu{}^s\varepsilon_\nu{}^r\tag{11}$$

的逆. 这种选取方式对于在 Riemann-Cartan 流形上构造 Chetaev 动力学和 vakonomic 动力学非常方便[11].

3. 仿射微分约束系统的 d-δ 对易关系

考虑一个非定常力学系统，其位形流形仍为 n 维流形 Q，其局部坐标为 $\{q^s\}(s=1,2,\cdots,n)$，对应的广义速度为 $v^s=\dot{q}^s$. 扩展的位形流形为 M 或者 $R\times Q$，其局部坐标为 $\{t,q^s\}$. 相应的状态空间为 1-射丛 J_1M 或接触流形 $R\times TQ$. 在流形 M 上同样存在等时变分运算 δq^s（见(1)式），并且满足固定端点条件(2).

假定系统受到 $(n-m)$ 个独立仿射微分约束，

$$\begin{aligned}\dot{q}^\alpha&=B^\alpha_\sigma(t,q^\mu,q^\beta)\dot{q}^\sigma+B^\alpha_0(t,q^\mu,q^\beta)\\&=B_\rho{}^\alpha(q^\lambda,q^\beta)\dot{q}^\rho,\end{aligned}\tag{12}$$

则变分运算将满足如下变分恒等式：

$$\delta\dot{q}^\alpha-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q^\alpha)-B_\mu^\alpha\Big[\delta\dot{q}^\mu-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q^\mu)\Big]$$

$$+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q^\alpha - B^\alpha_\mu \delta q^\mu) - \delta(\dot{q}^\alpha - B^\alpha_\rho \dot{q}^\rho)$$

$$\equiv (2B^\alpha_{[\rho,\mu]} - B^\beta_\rho B^\alpha_{\mu,\beta})\dot{q}^\rho \delta q^\mu + B^\alpha_{\rho,\beta}\dot{q}^\rho \delta q^\beta. \quad (13)$$

由此可见，在一般情况下，这里的变分同样不能同时满足如下三个条件：

$$\delta\dot{q}^\alpha - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q^\alpha) - B^\alpha_\mu\left[\delta\dot{q}^\mu - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q^\mu)\right] = 0, \quad (14a)$$

$$\delta(\dot{q}^\alpha - B^\alpha_\rho \dot{q}^\rho) = 0, \quad (14b)$$

$$\delta q^\alpha - B^\alpha_\mu \delta q^\mu = 0. \quad (14c)$$

这样，就存在三类非完整变分，其中 Suslov 变分为满足如下条件的变分：

$$\delta(\dot{q}^\alpha - B^\alpha_\rho \dot{q}^\rho) = 0, \quad \delta q^\alpha - B^\alpha_\mu \delta q^\mu = 0. \quad (15)$$

代入变分恒等式(13)中，可得

$$\delta\dot{q}^\alpha - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q^\alpha) - B^\alpha_\mu\left[\delta\dot{q}^\mu - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q^\mu)\right]$$

$$= -2(B^\alpha_{[\mu,\rho]} + B^\beta_{[\rho}B^\alpha_{\mu],\beta})\dot{q}^\rho \delta q^\mu. \quad (16)$$

不失一般性，可以假定 $\mathrm{d}_{w_S} v^\mu - \mathrm{d}_v w^\mu_S = 0$，则上式可简化为

$$\delta\dot{q}^\alpha - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q^\alpha) = -2(B^\alpha_{[\mu,\rho]} + B^\beta_{[\rho}B^\alpha_{\mu],\beta})\dot{q}^\rho \delta q^\mu. \quad (17)$$

显然，由(17)式可得，微分算符 d 与变分算符 δ 对易的充分必要条件是

$$B^\alpha_{[\mu,\rho]} + B^\beta_{[\rho}B^\alpha_{\mu],\beta} = 0. \quad (18)$$

值得指出的是，要澄清 d-δ 对易关系与仿射微分约束的可积性之间的关系是非常复杂的，其关键在于条件(18)与仿射微分约束的 Frobenius 可积性之间的关系. 在文献[22]中，利用射丛上的联络理论，证明了上式左边的量是纤维化的约束流形上联络的曲率分量，从而当曲率为零时，水平分布对合，即约束可积. 这种几何上的证明虽然简单，但比较抽象. 我们将在下节直接用 Frobenius 定理来证明上述条件(18)和条件(8)就是约束的可积性条件.

4. 微分约束方程的可积性分析

在文献[4]中，习惯于如下标记：

$$C^\beta_{\mu\sigma} = \left(\frac{\partial B^{m+\beta}_\sigma}{\partial q^\mu} - \frac{\partial B^{m+\beta}_\mu}{\partial q^\sigma}\right) + \left(B^{m+\alpha}_\mu \frac{\partial B^{m+\beta}_\sigma}{\partial q^{m+\alpha}} - B^{m+\alpha}_\sigma \frac{\partial B^{m+\beta}_\mu}{\partial q^{m+\alpha}}\right),$$

$$D^\beta_{0\sigma} = \left(\frac{\partial B^{m+\beta}_\sigma}{\partial t} - \frac{\partial B^{m+\beta}}{\partial q^\sigma}\right) + \left(B^{m+\alpha}\frac{\partial B^{m+\beta}_\sigma}{\partial q^{m+\alpha}} - B^{m+\alpha}_\sigma \frac{\partial B^{m+\beta}}{\partial q^{m+\alpha}}\right). \quad (19)$$

将这种标记和本文的标记法结合起来，则条件(18)可以表示为

$$C^\alpha_{\mu\nu} = 2(B^\alpha_{[\nu,\mu]} + B^\beta_{[\mu}B^\alpha_{\nu],\beta}) = 0,$$

$$D^\alpha_{0\mu} = 2(B^\alpha_{[\mu,0]} + B^\beta_{[0}B^\alpha_{\mu],\beta}) = 0. \quad (20)$$

为简化表达形式，可进一步将 $C^\alpha_{\mu\nu}$ 和 $D^\alpha_{0\mu}$ 统一表示为 $T^\alpha_{\mu\rho}$，即 $T^\alpha_{\mu\nu} = C^\alpha_{\nu\mu}$，$T^\alpha_{\mu 0} = D^\alpha_{0\mu}$. 这样，与约束(12)对应的微分形式

$$\omega^\alpha = \mathrm{d}q^\alpha - B^\alpha_\sigma(t, q^\mu, q^\beta)\mathrm{d}q^\sigma - B^\alpha_0(t, q^\mu, q^\beta)\mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{d}q^\alpha - B^\alpha_\rho(q^\lambda, q^\beta)\mathrm{d}q^\rho \quad (21)$$

的外微分即可表示为

$$\mathrm{d}\omega^\alpha = T^\alpha_{\mu\rho}\mathrm{d}q^\mu \wedge dq^\rho + B^\alpha_{\rho,\beta}\mathrm{d}q^\rho \wedge \omega^\beta. \quad (22)$$

这样以来，仿射微分约束(12)的 Frobenius 可积性条件就可以表示为[22]

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega^\alpha \wedge \Omega &= T^\alpha_{\mu\rho}\mathrm{d}q^\mu \wedge \mathrm{d}q^\rho \wedge \omega^{m+1} \wedge \omega^{m+2} \wedge \cdots \wedge \omega^n \\
&= T^\alpha_{\mu\rho}\mathrm{d}q^\mu \wedge \mathrm{d}q^\rho \wedge (\mathrm{d}q^{m+1} - B_\lambda{}^{m+1}\mathrm{d}q^\lambda) \\
&\quad \wedge \cdots \wedge (\mathrm{d}q^n - B_\delta{}^n \mathrm{d}q^\delta) \\
&= T^\alpha_{\mu\rho}\mathrm{d}q^\mu \wedge \mathrm{d}q^\rho \wedge \mathrm{d}q^{m+1} \wedge \mathrm{d}q^{m+2} \\
&\quad \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^n \\
&\quad - T^\alpha_{[\mu\rho}B^{m+1}_{\nu]}\mathrm{d}q^\mu \wedge \mathrm{d}q^\rho \wedge \mathrm{d}q^\nu \\
&\quad \wedge \mathrm{d}q^{m+2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^n \\
&\quad - T^\alpha_{[\mu\rho}B^{m+2}_{\nu]}\mathrm{d}q^\mu \wedge \mathrm{d}q^\rho \\
&\quad \wedge \mathrm{d}q^{m+1} \wedge \mathrm{d}q^\nu \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^n \\
&\quad \cdots - T^\alpha_{[\mu\rho}B^n_{\nu]}\mathrm{d}q^\mu \wedge \mathrm{d}q^\rho \\
&\quad \wedge \mathrm{d}q^{m+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{n-1} \wedge \mathrm{d}q^\nu \\
&\quad \cdots + (-1)^{n-m}T^\alpha_{[\mu\rho}B^{m+1}_\nu \cdots B^n_{\sigma]}\mathrm{d}q^\mu \\
&\quad \wedge \mathrm{d}q^\rho \wedge \mathrm{d}q^\nu \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^\sigma \\
&= 0.
\end{aligned} \quad (23)$$

显然，这个条件等价于

$$T^\alpha_{\mu\rho} = B^\alpha_{[\mu,\rho]} + B^\beta_{[\rho}B^\alpha_{\mu],\beta} = 0. \quad (24)$$

由此可见，Suslov 变分与微分算子之间对易的充分必要条件就是约束的 Frobenius 可积性条件. 这对于线性稳定微分约束情况同样适用，即条件(8)作为线性稳定微分约束系统的 d-δ 对易关系的充分必要条件，也是该类约束可积的充分必要条件.

注意，在选择 $\delta\dot{q}^\alpha - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q^\alpha = 0$ 的情况下，对易关系(9)表明，微分与变分运算对易的充分必要条件是 $S^\mu_{\nu\sigma} = 0$，但这并不表示线性稳定微分约束是可积的，其几何意义只是 Riemman-Cartan 约束流形的挠率为零[11]. 在实际问题中，存在挠率为零，即微分与

变分运算对易,而约束不可积这样的实例.

5. 非线性微分约束系统的 d-δ 对易关系

设力学系统的位形空间,增广位形空间,状态空间以及增广状态空间分别表示为 Q, M, TQ, $R\times TQ$. 同样可以赋予这些流形局部坐标表示,和其上的变分运算 δ,其意义同上所述.

假设系统受到 $(n-m)$ 个独立的一阶非完整约束

$$\dot{q}^{\beta}=\varphi^{\beta}(t,q^{s},\dot{q}^{\mu}), \tag{25}$$

则容易验证变分 δ 满足如下变分恒等式:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q^{\beta})-\delta\dot{q}^{\beta}-\frac{\partial\varphi^{\beta}}{\partial\dot{q}^{\mu}}\Big[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q^{\mu})-\delta\dot{q}^{\mu}\Big]\\&+\delta(\dot{q}^{\beta}-\varphi^{\beta})-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\delta q^{\beta}-\frac{\partial\varphi^{\beta}}{\partial\dot{q}^{\mu}}\delta q^{\mu}\Big)\\&\equiv-[\varphi^{\beta}]_{\mu}\delta q^{\mu}-\frac{\partial\varphi^{\beta}}{\partial q^{\alpha}}\delta q^{\alpha},\end{aligned} \tag{26}$$

其中 $[\varphi^{\beta}]_{\mu}=\frac{\partial\varphi^{\beta}}{\partial q^{\mu}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial\varphi^{\beta}}{\partial\dot{q}^{\mu}}\Big)$. 同样,这个变分恒等式导致如下三个条件不能同时成立:

$$\delta(\dot{q}^{\beta}-\varphi^{\beta})=0, \tag{27a}$$

$$\delta q^{\beta}-\frac{\partial\varphi^{\beta}}{\partial\dot{q}^{\mu}}\delta q^{\mu}=0, \tag{27b}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q^{\beta})-\delta\dot{q}^{\beta}-\frac{\partial\varphi^{\beta}}{\partial\dot{q}^{\mu}}\Big[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q^{\mu})-\delta\dot{q}^{\mu}\Big]=0. \tag{27c}$$

条件(27b)为 Chetaev 条件. 根据变分恒等式(26),我们可以定义非线性约束系统的 Suslov 变分为满足下述条件的变分:

$$\delta(\dot{q}^{\beta}-\varphi^{\beta})=0,\quad \delta q^{\beta}-\frac{\partial\varphi^{\beta}}{\partial\dot{q}^{\mu}}\delta q^{\mu}=0. \tag{28}$$

从而,由变分恒等式可以得到 d-δ 对易关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q^{\beta})-\delta\dot{q}^{\beta}-\frac{\partial\varphi^{\beta}}{\partial\dot{q}^{\mu}}\Big[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q^{\mu})-\delta\dot{q}^{\mu}\Big]=T^{\beta}_{\mu}\delta q^{\mu}, \tag{29}$$

其中,

$$T^{\beta}_{\mu}=-[\varphi^{\beta}]_{\mu}-\frac{\partial\varphi^{\beta}}{\partial q^{\alpha}}\frac{\partial\varphi^{\alpha}}{\partial\dot{q}^{\mu}}. \tag{30}$$

通常,可以进一步假设 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q^{\mu})-\delta\dot{q}^{\mu}=0$,得到非线性约束系统的 d-δ 对易关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q^{\beta})-\delta\dot{q}^{\beta}=T^{\beta}_{\mu}\delta q^{\mu}. \tag{31}$$

这个关系包括了线性稳定约束和仿射微分约束系统的 d-δ 对易关系(7)和(17),其几何意义可见文献[2].

6. 算 例

例 1 考虑圆盘在水平面上的竖直滚动问题. 描述该系统的广义坐标为质心坐标 (x,y),确定圆盘位置的方位角 ψ,以及描述内部的转动角 ϕ. 圆盘纯滚动时所受到的非完整约束为

$$\dot{x}=(R\cos\psi)\dot{\phi},\quad \dot{y}=(R\sin\psi)\dot{\phi},$$

其中 R 是圆盘的半径,这是一类线性稳定非完整约束.

描述该滚盘位形的 4 维流形 Q 的局部坐标为 $\{\phi,\psi;x,y\}$,取 $q^1=\phi$, $q^2=\psi$; $q^3=x$, $q^4=y$,则

$$B^3_1=R\cos\psi,\quad B^3_2=0;\quad B^4_1=R\sin\psi,\quad B^4_2=0.$$

显然

$$B^3_{[1,2]}=-B^3_{[2,1]}=-\frac{1}{2}R\sin\psi,$$

$$B^4_{[1,2]}=-B^4_{[2,1]}=\frac{1}{2}R\cos\psi,$$

这表明该约束是不可积的. 如果假设在流形 Q 上的变分 δ 满足 $\delta\dot{\phi}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\phi)=0$, $\delta\dot{\psi}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\psi)=0$,则由(7)式可得

$$\begin{aligned}\delta\dot{x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x)&=-R(\sin\psi)\dot{\phi}\,\delta\psi+R(\sin\psi)\dot{\psi}\,\delta\phi\\&=-R(\sin\psi)(\dot{\phi}\,\delta\psi-\dot{\psi}\,\delta\phi),\\\delta\dot{y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta y)&=R(\cos\psi)\dot{\phi}\,\delta\psi-R(\cos\psi)\dot{\psi}\,\delta\phi\\&=R(\cos\psi)(\dot{\phi}\,\delta\psi-\dot{\psi}\,\delta\phi).\end{aligned}$$

设在流形 Q 上变分 δ 满足 $\delta\dot{x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x)=0$, $\delta\dot{y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta y)=0$,我们验证对易关系

$$\delta\dot{\phi}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\phi)=0,\quad \delta\dot{\psi}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\psi)=0.$$

该转盘系统的拉氏量为 $L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}(I_1\dot{\phi}^2+I_2\dot{\psi}^2)$,由此可得度规

$$(g_{sr})=\begin{pmatrix}I_1&0&0&0\\0&I_2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

代入(11)式中,可得度规

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} R^2 + I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}, (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{R^2 + I_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{I_2} \end{pmatrix}.$$

将上述结果代入(10)式中,可计算出

$$S_{12}^1 = -S_{21}^1 = 0, \qquad S_{12}^2 = -S_{21}^2 = 0,$$
$$S_{11}^1 = S_{22}^1 = 0, \qquad S_{11}^2 = S_{22}^2 = 0,$$

将它们代入(9)式即可得证,从而证明了线性稳定非完整约束系统的 Suslov 变分可以满足微分与变分的对易性质. 此例说明,对于线性稳定微分约束系统,其 d-δ 对易关系式(7)与约束的 Frobenius 可积性一致 而 d-δ 对易关系式(9)与约束的可积性可以不一致.

例 2　考虑一个 5 维系统,其位形流形 Q 的局部坐标为 $(\theta, \phi, \psi, x, y)$. 假设其受到如下两个仿射微分约束:

$$\dot{x} = (\sin\theta)\dot{\theta} - (R\psi\sin\phi)\dot{\phi} + (R\cos\phi)\dot{\psi} + x - R\psi\cos\phi + \cos\theta,$$
$$\dot{y} = (\cos\theta)\dot{\theta} + (R\psi\cos\phi)\dot{\phi} + (R\sin\phi)\dot{\psi} + y - R\psi\sin\phi - \sin\theta,$$

其中 R 是常数. 根据这个约束,可以把坐标分为两组 $q^\mu = (\theta, \phi, \psi)$, $q^\alpha = (x, y)$,据此得到

$$B_1^4 = \sin\theta, \quad B_2^4 = -R\psi\sin\phi, \quad B_3^4 = R\cos\phi,$$
$$B_0^4 = x - R\psi\cos\phi + \cos\theta,$$
$$B_1^5 = \cos\theta, \quad B_2^5 = R\psi\cos\phi, \quad B_3^5 = R\sin\phi,$$
$$B_0^5 = y - R\psi\sin\phi - \sin\theta.$$

显见,$B_{\mu,\beta}^\alpha = 0$, $B_{\nu,0}^\alpha = 0$ $(\alpha, \beta = 4, 5; \mu, \nu = 1, 2, 3)$. 容易验证

$$B_{[1,2]}^4 + B_{[2}^4 B_{1],4}^4 + B_{[2}^5 B_{1],5}^4 = 0,$$
$$B_{[1,3]}^4 + B_{[3}^4 B_{1],4}^4 + B_{[3}^5 B_{1],5}^4 = 0,$$
$$B_{[2,3]}^4 + B_{[3}^4 B_{2],4}^4 + B_{[3}^5 B_{2],5}^4 = 0,$$
$$B_{[1,2]}^5 + B_{[2}^4 B_{1],4}^5 + B_{[2}^5 B_{1],5}^5 = 0,$$
$$B_{[1,3]}^5 + B_{[3}^4 B_{1],4}^5 + B_{[3}^5 B_{1],5}^5 = 0,$$
$$B_{[2,3]}^5 + B_{[3}^4 B_{2],4}^5 + B_{[3}^5 B_{2],5}^5 = 0,$$
$$B_{[0,1]}^4 + B_{[1}^4 B_{0],4}^4 + B_{[1}^5 B_{0],5}^4 = 0,$$
$$B_{[0,2]}^4 + B_{[2}^4 B_{0],4}^4 + B_{[2}^5 B_{0],5}^4 = 0,$$
$$B_{[0,3]}^4 + B_{[3}^4 B_{0],4}^4 + B_{[3}^5 B_{0],5}^4 = 0,$$
$$B_{[0,1]}^5 + B_{[1}^4 B_{0],4}^5 + B_{[1}^5 B_{0],5}^5 = 0,$$
$$B_{[0,2]}^5 + B_{[2}^4 B_{0],4}^5 + B_{[2}^5 B_{0],5}^5 = 0,$$
$$B_{[0,3]}^5 + B_{[3}^4 B_{0],4}^5 + B_{[3}^5 B_{0],5}^5 = 0.$$

这说明该仿射微分约束满足 Frobenius 可积性条件(18). 因此,根据(17)式可以得到如下 d-δ 对易关系:

$$\delta\dot{\theta} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\theta) = 0, \quad \delta\dot{\phi} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\phi) = 0,$$
$$\delta\dot{\psi} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\psi) = 0,$$
$$\delta\dot{x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x) = 0, \quad \delta\dot{y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta y) = 0.$$

例 3　Appell-Hamel 系统. 该系统的位形坐标为 $q^1 = x$; $q^2 = y$; $q^3 = z$,系统受到的非线性非完整约束为

$$\dot{z} = \frac{b}{a}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2},$$

代入(30)式得

$$T_1^3 = \frac{b}{a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\right) = \frac{b\dot{y}(\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y})}{a(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}},$$
$$T_2^3 = \frac{b}{a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\right) = \frac{b\dot{x}(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})}{a(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

代入 d-δ 对易关系(31),得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta z) - \delta\dot{z} = T_\mu^3\delta q^\mu = \frac{b\dot{y}(\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y})}{a(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}\delta x + \frac{b\dot{x}(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})}{a(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}\delta y.$$

由此验证了非线性非完整约束的 d-δ 对易关系. 此例子的特殊性在于沿着运动轨迹 $\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y} = 0$, $T_1^3 = T_2^3 = 0$.

[1] Johns O 2005 *Analytical Mechanics for Relativity and Quantum Mechanics* (Oxford: Oxford University Press)

[2] Guo Y X, Luo S K, Mei F X 2004 *Adv. Mech.* **34** 477 (in Chinese) [郭永新、罗绍凯、梅凤翔 2004 力学进展 **34** 477]

[3] Guo Y X, Luo S K, Shang M, Mei F X 2001 *Rep. Math. Phys.* **47** 313

[4] Guo Y X, Jiang L Y, Yu Y 2001 *Chin. Phys.* **10** 181

[5] Mei F X, Liu D, Luo Y 1991 *Advanced Analytical Mechanics* (Beijing: Press of Beijing Institute of Technology) p1 (in Chinese) [梅凤翔、刘 端、罗 勇 1991 高等分析动力学(北京:北京理工大学出版社)第1页]

[6] Neimark J, Fufaev N 1972 *Dynamics of Nonholonomic Systems* (Transactions of Mathematical Monographs Vol 33) (Providence, RI: American Mathematical Society)

[7] Bloch A M, Krishnaprasad P S, Marsden J E, Murray R 1996 *Arch. Rational Mech. Anal.* **136** 21

[8] Papastavridis J G 2002 *Analytical Mechanics: A Comprehensive Treatise on the Dynamics of Constrained Systems; for Engineers, Physicists, and Mathematicians* (Oxford: Oxford University Press)

[9] Bloch A M, Baillieul J, Crouch P, Marsden J 2003 *Nonholonomic Mechanics and Control* (London: Springer)

[10] Arnold V I, Kozlov V V, Neishtadt A I 1998 *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics* (*Encyclopaedia of mathematical science* vol III) (Berlin: Springer-Verlag)

[11] Guo Y X, Wang Y, Chee G Y, Mei F X 2005 *J. Math. Phys.* **46** 062902

[12] Guo Y X, Zhao Z, Liu S X, Wang Y, Zhu N, Han X J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3838 (in Chinese) [郭永新、赵 、刘世兴、王 勇、朱 娜、韩晓静 2006 物理学报 **55** 3838]

[13] Liang L F 2000 *Adv. Mech.* **30** 358 (in Chinese) [梁立孚 2000 力学进展 **30** 358]

[14] Lewis A D, Murray R M 1995 *Int. J. Non-Linear Mech.* **30** 793

[15] Cardin F, Favretti M 1996 *J. Geom. Phys.* **18** 295

[16] León M de, Marrero J C, Diego M D de 2002 *J. Geom. Phys.* **35** 126

[17] Favretti M 1998 *J. Dynam. Differential Equations* **10** 511

[18] Chen L Q 1994 *J. Anshan Institut. I. and S. Tech.* **17** (2) 29 (in Chinese) [陈立群 1994 鞍山钢铁学院学报 **17** (2) 29]

[19] Chen L Q 1990 *Chin. Sci. Bull.* **35** 1836 (in Chinese) [陈立群 1990 科学通报 **35** 1836]

[20] Guo Y X, Liu S X, Liu C, Luo S K, Wang Y 2007 *J. Math. Phys.* **48** 082901

[21] Chen B 1991 *Acta Mech. Sinica* **23** 379 (in Chinese) [陈 滨 1991 力学学报 **23** 379]

[22] Guo Y X, Mei F X 1998 *Acta Mech. Sinica* **14** 85

On d-δ commutation relation of constrained differential systems*

Guo Yong-Xin[1)†] Zhao Zhe[2)] Liu Shi-Xing[1)] Liu Chang[1)]

1) (*College of Physics & Center for the Application of Mathematics, Liaoning University, Shenyang 110036, China*)

2) (*Foundation institute, Shenyang Pharmaceutical University, Shenyang 110016, China*)

(Received 18 May 2007; revised manuscript received 21 June 2007)

Abstract

An important problem of calculus of variations used in constrained differential systems, i.e., the commutation relation of differential operator and variational oprerator, is investigated by means of Frobenius theorem of integrability. Based on analyzing the d-δ commutation relation for the linear stationay differential constrained systems and affine differential constrained systems, the relationship between noncommutator of differentiation and variation and nonholonomicity of the differential constraints is briefly proved by means of Frobenius integrability theory. The commutation relation for non-linear differential constrained systems is also discussed in the paper. Finally, three examples are given to verify the results.

Keywords: nonholonomic constraints, Frobenius integrability, d-δ commutation relation

PACC: 0320

---

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10472040), the Outstanding Young Talents Training Fund of Liaoning Province, China (Grant No. 3040005), the Scientific Research Foundation for the Returned Overseas Chinese Scholars, State Education Ministry (Grant No. 2004527), the Chunhui Plan of State Education Ministry of China (Grant No. Z2005-1-21006) and the Foundation Research Plan of Liaoning Educational Bureau (Grant No. 05L155).

† E-mail: guoyongxin@lnu.edu.cn