第 57 卷 第 3 期 2008 年 3 月
1000-3290/2008/57(03)/1316-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.57,No.3,March,2008

KdV 孤子的含时微扰理论*

潘留仙[1)2)]　俞慧友[1)]　颜家壬[1)†]

1)(湖南师范大学物理系,长沙 410081)

2)(湖南涉外经济学院电子与信息工程系,长沙 410205)

(2007 年 4 月 4 日收到;2007 年 6 月 21 日收到修改稿)

研究了周期性含时微扰对 KdV(Korteweg de Vries)孤子的影响. 将微扰项展为时间变量的傅里叶级数,发现其常数项是导致长期项的根源. 在一阶近似下,消除长期项,求出了孤子参数(高度、宽度和速度)随时间的缓慢变化. 傅氏级数中的其他项决定了微扰对孤子波形的一阶修正.

关键词:KdV 孤子,孤子微扰论

PACC:0340,4720,4725

1. 引　　言

孤子理论是非线性科学的重要组成部分,它在物理学的许多领域(如流体物理、等离子体物理、凝聚态物理、非线性光学等等)有着日益重要的应用. 但在实际问题中,孤子方程往往不是以标准形式出现的,它一般还含有一些比较微小的附加项,这些附加项可以当作微扰来处理,因此孤子微扰论是孤子理论中最有实用价值的内容之一. 现有的孤子微扰论大体上可以分为两类,即基于逆散射变换(IST)的微扰论[1—4]与直接微扰论[5—10]. 然而不论哪种微扰论,总是假定微扰项为孤子解的某种泛函,也就是说在随孤子一起运动的参照系内,微扰项是不依赖于时间的,它们属于非含时微扰论. 但在实际问题中,我们常常会遇到微扰依赖于时间特别是周期性依赖于时间的情况[11],因此发展一种系统的孤子含时微扰论是一件颇有实际意义的工作.

本文试图在文献[12,13]的基础上,以 KdV 方程为例,发展一种直接的孤子含时微扰论,一方面是因为 KdV 方程系列是物理学中有广泛应用的一类十分重要的非线性演化方程,一直受到人们的普遍关注(例如近年内又发现了它们一些新的孤子解或类孤子解[14,15]).另一方面是由于文献[12,13]的方法完全摆脱了对逆散射变换的依赖,能同时适用于可积与非可积系统,具有较大的普遍性. 在此基础上发展起来的含时微扰论仍将保留这一特点. 按孤子微扰论直接法的处理程序,前两步(线性化与构造微扰展开基)与文献[12]完全一样,为方便读者,我们将写出主要结果但不作证明. 后两步(消除久期项以确定孤子参数随时间的演化以及求微扰对孤子波形的一阶修正)与文献[12]有显著差别,是本文论述的重点.

2. 一阶近似方程

考虑带含时微扰的 KdV 方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = \varepsilon R[u,t], \tag{1}$$

式中,下标代表对时,空坐标 t,x 求导,ε 为一表征微扰强弱的小参数($0<\varepsilon\ll1$),与非含时微扰不同,这里的微扰项 $R[u,t]$ 除了为 u, u_x, u_{xx}, …的函数(即 u 的泛函)外,还将依赖于时间 t. 当不存在微扰时,标准的 KdV 方程具有如下单孤子解:

$$u_0 = 2a^2\operatorname{sech}^2 a(x - x_0 - 4a^2 t). \tag{2}$$

按文献[12]的做法,引进多重尺度时间变量 $t_n = \varepsilon^n t$, $n=0,1,2,\cdots$,则

$$\partial_t = \partial_{t_0} + \varepsilon\partial_{t_1} + \varepsilon^2\partial_{t_2} + \cdots, \tag{3}$$

再对 u 作渐近展开

$$u = u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \cdots, \tag{4}$$

将(3),(4)式代入方程(1),比较 ε 的各次幂系数,得

---

* 国家自然科学基金(批准号:10375043)及湖南省博士后科研专项计划资助的课题.

† 通信作者. E-mail:jiarenyan@hunnu.edu.cn

如下各级近似方程：

$$u_{t_0}^{(0)} + 6u^{(0)}u_x^{(0)} + u_{xxx}^{(0)} = 0, \tag{5}$$

$$u_{t_0}^{(1)} + 6u^{(0)}u_x^{(1)} + 6u_x^{(0)}u^{(1)} + u_{xxx}^{(1)} = R[u^{(0)},t] - u_{t_1}^{(0)},\cdots, \tag{6}$$

零级近似方程(5)即标准的 KdV 方程,它具有(2)式所示的单孤子解,并可改写为

$$u^{(0)}(x,t_0) = 2a^2\mathrm{sech}^2 z,$$
$$z = a(x-\xi),\ \xi_{t_0} = 4a^2. \tag{7}$$

但由于微扰的影响,(7)式中的孤子参数 a 将不再为常数,ξ 也不再仅为 t_0 的函数($\xi_{t_0}=4a^2$),它们都将为慢变量 t_1, t_2, …的待定函数,但在一阶近似下,它们仅依赖于 t_1,而与高阶慢变量 t_2, t_3, …无关. 于是

$$u_{t_1}^{(0)} = 4aa_{t_1}\phi_1(z) + 4a^3\xi_{t_1}\phi_2(z), \tag{8}$$

式中

$$\phi_1(z) = (1 - z\tanh z)\mathrm{sech}^2 z,$$
$$\phi_2(z) = \tanh z\,\mathrm{sech}^2 z. \tag{9}$$

将(8)式代入方程(6),并变换到随孤子一起运动的坐标系,就得到如下的一级近似方程与初条件:

$$u_{t_0}^{(1)} + a^3\hat{L}u^{(1)} = R[u^{(0)},t_0] - 4aa_{t_1}\phi_1(z) - 4a^3\xi_{t_1}\phi_2(2),$$
$$u^{(1)}(z,0) = 0, \tag{10}$$

式中,$\hat{L}$ 是如下定义的线性微分算子:

$$\hat{L} = \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}z^3} + (12\mathrm{sech}^2 z - 4)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} - 24\tanh z\,\mathrm{sech}^2 z. \tag{11}$$

显然 $\hat{L}$ 不是自共轭的,其共轭算子为

$$\hat{L}^{\dagger} = \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}z^3} + (12\mathrm{sech}^2 z - 4)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}. \tag{12}$$

3. 微扰展开基

文献[12]给出了 KdV 孤子的两组微扰展开基:

$$\{\Phi\} = \{\phi(z,k),\phi_j(z);j = 1,2,\}$$

与

$$\{\Psi\} = \{\psi(z,k),\psi_j(z);j = 1,2\},$$

其中

$$\phi(z,k) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}}{\sqrt{2\pi}k(k^2+4)}[k(k^2+4) + 4\mathrm{i}(k^2+2)\tanh z - 8k\tanh^2 z - 8\mathrm{i}\tanh^3 z], \tag{13}$$

$\phi_1(z),\phi_2(z)$ 已由(9)式给出;

$$\psi(z,k) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}}{\sqrt{2\pi}(k^2+4)}[k^2 - 4\mathrm{i}k\tanh z - 4\tanh^2 z], \tag{14}$$

$$\psi_1(z) = \mathrm{sech}^2 z,\ \psi_2(z) = \tanh z + z\,\mathrm{sech}^2 z. \tag{15}$$

$\phi(z,k),\phi_2(z)$ 与 $\psi(z,k),\psi_1(z)$ 分别为 $\hat{L}$ 与 $\hat{L}^{\dagger}$ 的本征函数,它们满足如下本征值方程:

$$\hat{L}\phi(z,k) = \lambda(k)\phi(z,k),$$
$$\lambda(k) = -\mathrm{i}k(k^2+4);\hat{L}\phi_2(z) = 0, \tag{16}$$

$$\hat{L}^{\dagger}\psi(z,k) = -\lambda(k)\psi(z,k),\ \hat{L}^{\dagger}\psi_1(z) = 0, \tag{17}$$

但 $\phi_1(z)$ 与 $\psi_2(z)$ 不是本征函数,它们满足如下方程:

$$\hat{L}\phi_1(z) = -8\phi_2(z),\ \hat{L}^{\dagger}\psi_2(z) = 8\psi_1(z), \tag{18}$$

此外,文献[12]证明了如下的完备性和正交性:

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\phi(z,k)\psi(z',k)\mathrm{d}k + \sum_{j=1}^{2}\phi_j(z)\psi_j(z') = \delta(z-z'), \tag{19}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(z,k)\psi(z,k')\mathrm{d}z = \delta(k-k'),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(z,k)\psi_j(z)\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty}\psi(z,k)\phi_j(z)\mathrm{d}z = 0,\ j = 1,2,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi_j(z)\psi_l(z)\mathrm{d}z = \delta_{jl},j,l = 1,2, \tag{20}$$

式中 P 代表积分取主值(因 $k=0$ 是(19)式中被积函数的一阶极点).

4. 孤子参数随时间的演化

将 $u^{(1)}(z,t_0)$ 按基 $\{\Phi\}$ 展开

$$u^{(1)}(z,t_0) = P\int_{-\infty}^{\infty}T(t_0,k)\phi(z,k)\mathrm{d}k + \sum_{j=1}^{2}T_j(t_0)\phi_j(z). \tag{21}$$

将(21)式代入一级近似方程(10),得到各展开系数所满足的常微分方程及初条件

$$\dot{T}(t_0,k) + \lambda(k)a^3T(t_0,k) = \int_{-\infty}^{\infty}R[u^{(0)}(z),t_0]\psi(z,k)\mathrm{d}z,\ T(0,k) = 0, \tag{22}$$

$$\dot{T}_1(t_0) = -4aa_{t_1} + \int_{-\infty}^{\infty}R[u^{(0)}(z),t_0]\psi_1(z,)\mathrm{d}z,$$

$$T_1(0) = 0, \tag{23}$$

$$\dot{T}_2(t_0) - 8a^3 T_1(t_0) = -4a^3 \xi t_1 + \int_{-\infty}^{\infty} R[u^{(0)}(z), t_0]\psi_2(z)\mathrm{d}z,$$

$$T_2(0) = 0, \tag{24}$$

式中展开系数上方的小圆点代表该系数对 t_0 求导. 对于非含时微扰,方程(23)与(24)的右端不含 t_0,显然 $T_1(t_0)$与 $T_2(t_0)$将随时间 t_0 的增长而无限增大,这就是长期项,消去它们就得到孤子参数 a 和 ξ 对时间慢变量 t_1 的依赖:

$$a_{t_1} = \frac{1}{4a}\int_{-\infty}^{\infty} R[u^{(0)}(z)]\psi_1(z)\mathrm{d}z,$$

$$\xi_{t_1} = \frac{1}{4a^3}\int_{-\infty}^{\infty} R[u^{(0)}(z)]\psi_2(z)\mathrm{d}z. \tag{25}$$

对于含时微扰,(23)与(24)式的右端是依赖于 t_0 的,这时关键问题是如何找到长期项. 在实际问题中,含时微扰项 $R[u^{(0)}(z), t_0]$大多是 t_0 的周期函数,这时 $R[u^{(0)}(z), t_0]$可展为 t_0 的傅里叶级数

$$R[u^{(0)}(z), t_0] = R_0[u^{(0)}(z)] + \sum_{n=1}^{\infty}[R_n[u^{(0)}(z)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t_0} + \mathrm{c.c.}], \tag{26}$$

式中 $R_0[u^{(0)}(z)]$与 $R_n[u^{(0)}(z)]$均为 $u^{(0)}, u_x^{(0)}, u_{xx}^{(0)}$…的函数(即 $u^{(0)}$ 的泛函),c.c.代表它前一项的共轭复数. 将(26)式代入(23)式,得

$$\dot{T}_1(t_0) = -4aa_{t_1} + \int_{-\infty}^{\infty} R_0[u^{(0)}(z)]\psi_1(z)\mathrm{d}z + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} R_n[u^{(0)}(z)]\psi_1(z)\mathrm{d}z + \mathrm{c.c.}\Big]. \tag{27}$$

对 t_0 积分一次,得

$$T_1(t_0) = \Big[-4aa_{t_1} + \int_{-\infty}^{\infty} R_0[u^{(0)}(z)]\psi_1(z)\mathrm{d}z\Big]t_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{\mathrm{i}n\omega}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t_0} - 1)\int_{-\infty}^{\infty} R_n[u^{(0)}(z)]\psi_1(z)\mathrm{d}z + \mathrm{c.c.}\Big]. \tag{28}$$

显然,(28)式右端第一项随时间线性地无限增长,此即长期项. 消除它即得

$$a_{t_1} = \frac{1}{4a}\int_{-\infty}^{\infty} R_0[u^{(0)}(z)]\psi_1(z)\mathrm{d}z, \tag{29}$$

于是

$$T_1(t_0) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{\mathrm{i}n\omega}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t_0} - 1)\int_{-\infty}^{\infty} R_n[u^{(0)}(z)]\psi_1(z)\mathrm{d}z + \mathrm{c.c.}\Big]. \tag{30}$$

同样,将(26)与(30)式代入(24)式,得

$$\dot{T}_2(t_0) = -4a^3\xi_{t_1} + \int_{-\infty}^{\infty} R_0[u^{(0)}(z)]\psi_2(z)\mathrm{d}z + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} R_n[u^{(0)}(z)]\psi_2(z)\mathrm{d}z + \mathrm{c.c.}\Big] + 8a^3\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{\mathrm{i}n\omega}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t_0} - 1) \times \int_{-\infty}^{\infty} R_n[u^{(0)}(z)]\psi_1(z)\mathrm{d}z + \mathrm{c.c.}\Big]. \tag{31}$$

对积分一次,并注意到零初条件,得

$$T_2(t_0) = \Big[-4a^3\xi_{t_1} + \int_{-\infty}^{\infty} R_0[u^{(0)}(z)]\psi_2(z)\mathrm{d}z\Big]t_0 - 8a^3 t_0\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{\mathrm{i}n\omega}\int_{-\infty}^{\infty} R_n[u^{(0)}(z)]\psi_1(z)\mathrm{d}z + \mathrm{c.c.}\Big] - 8a^3\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{n^2\omega^2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t_0} - 1) \times \int_{-\infty}^{\infty} R_n[u^{(0)}(z)]\psi_1(z)\mathrm{d}z + \mathrm{c.c.}\Big] + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{\mathrm{i}n\omega}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t_0} - 1) \times \int_{-\infty}^{\infty} R_n[u^{(0)}(z)]\psi_2(z)\mathrm{d}z + \mathrm{c.c.}\Big]. \tag{32}$$

显然(32)式右端第 1,2 项为长期项,消除它,得

$$\xi_{t_1} = \frac{1}{4a^3}\int_{-\infty}^{\infty} R_0[u^{(0)}(z)]\psi_2(z)\mathrm{d}z - 2\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{\mathrm{i}n\omega}\int_{-\infty}^{\infty} R_n[u^{(0)}(z)]\psi_1(z)\mathrm{d}z + \mathrm{c.c.}\Big], \tag{33}$$

(29)和(33)式给出了两孤子参数 a 与 ξ 对时间慢变量 t_1 的依赖关系. 消去长期项以后,(32)式化为

$$T_2(t_0) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{\mathrm{i}n\omega}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t_0} - 1) \times \int_{-\infty}^{\infty} R_n[u^{(0)}(z)]\psi_2(z)\mathrm{d}z + \mathrm{c.c.}\Big] - 8a^3\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{n^2\omega^2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t_0} - 1) \times \int_{-\infty}^{\infty} R_n[u^{(0)}(z)]\psi_1(z)\mathrm{d}z + \mathrm{c.c.}\Big], \tag{34}$$

5. 微扰对孤子波形的一阶修正

将(26)式代入(22)式，得

$$\dot{T}(t_0,k)+\lambda(k)a^3T(t_0,k)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}R_n[u^{(0)}(z)]\psi(z,k)\mathrm{d}z$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty}R_n[u^{(0)}(z)]\psi(z,k)\mathrm{d}z$$
$$+\mathrm{c.c.}\Big].\tag{35}$$

解方程(35)，得

$$T(t_0,k)=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda(k)a^3t_0}-1}{-\lambda(k)a^3}\int_{-\infty}^{\infty}R_0[u^{(0)}(z)]\psi(z,k)\mathrm{d}z$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t_0}-\mathrm{e}^{-\lambda(k)a^3t_0}}{\mathrm{i}n\omega+\lambda(k)a^3}$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}R_n[u^{(0)}(z)]\psi(z,k)\mathrm{d}z+\mathrm{c.c.}\Big].\tag{36}$$

最后将(30)，(34)与(36)式代入(21)式，即可得到微扰对孤子波形的一阶修正.

作为一个例子，我们来考察线性阻尼与周期性外场对 KdV 孤子的影响. 为简单起见，我们假定外场为恒定场与单一频率场的叠加

$$R[u,t]=-\gamma u+f_0+2f_1\cos\omega t$$
$$=-\gamma u+(f_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+\mathrm{c.c.}),\tag{37}$$

式中 γ，f_0 与 f_1 均为常数. 将(37)式代入(29)式，即得

$$a_{t_1}=\frac{1}{4a}\int_{-\infty}^{\infty}R_0[u^{(0)}(z)]\psi_1(z)\mathrm{d}z$$
$$=-\frac{3}{2}\gamma a+\frac{f_0}{2a}.\tag{38}$$

作变换 $A=a^2$，并回到原先的自变量 t，(38)式化为

$$A_t+3\varepsilon\gamma A=\varepsilon f_0.\tag{39}$$

不难解出

$$a=A^{1/2}=\Big[\frac{f_0}{3\gamma}+\Big(a_0^2-\frac{f_0}{3\gamma}\Big)\mathrm{e}^{-3\varepsilon\gamma t}\Big]^{1/2},\tag{40}$$

式中 a_0 为初始时刻(微扰刚加上时) a 的取值. 同样，将(37)式代入(33)式，得

$$\xi_{t_1}=\frac{1}{4a^3}\int_{-\infty}^{\infty}R_0[u^{(0)}(z)]\psi_2(z)\mathrm{d}z$$
$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{\mathrm{i}n\omega}\int_{-\infty}^{\infty}R_n[u^{(0)}(z)]\psi_1(z)\mathrm{d}z+\mathrm{c.c.}\Big]$$
$$=0.\tag{41}$$

(41)与(40)式分别表示，外场不影响孤子的运动速度，但影响孤子的高度和宽度(它们决定于同一参数 a). (40)式还显示：当时间足够长时，$a\to(f_0/3\gamma)^{1/2}$，这时孤子的高度和宽度分别达到稳定值 $2f_0/3\gamma$ 与 $(3\gamma/f_0)^{1/2}$.

6. 结　　论

综上所述，在处理周期性含时的孤子微扰问题时，线性化，构造微扰展开基等程序和非含时微扰的做法完全一样，但在确定孤子参数如何随时间变化时，可将微扰项展为时间变量的傅里叶级数，这时不难看出常数项是导致长期项的根源. 消除长期项即可求出孤子参数对时间的依赖. 傅氏级数的其他项只对波形修正作贡献. 这一结论应具有普遍性，所以本文的方法可直接推广于处理其他孤子的含时微扰问题.

[1] Kaup D J 1976 *SIAM J. Appl. Math.* **31** 121

[2] Karpman V I, Maslov E M 1977 *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **73** 537

[3] Kaup D J, Newell A C 1978 *Proc. R. Soc. London Ser.* A **361** 413

[4] McLaughlin D W, Scott A C 1978 *Phys. Rev.* A **18** 1652

[5] Gorshkov K A, Ostrovskii L A, Pelinovsky E N 1974 *Proc. IEEE* **82** 1511

[6] Gorshkov K A, Ostrovskii L A 1981 *Physica* D **3** 428

[7] Forgel M B, Trullinger S E, Bishop A R, Krumhansl A 1976 *Phys. Rev. Lett.* **36** 1411

[8] Keener J P, McLaughlin D W 1977 *Phys. Rev.* A **16** 777
Keener J P, McLaughlin D W 1977 *J. Math. Phys.* **18** 2008

[9] Flesch R J, Trullinger S E 1987 *J. Math Phys.* **28** 1619

[10] Herman R L 1990 *J. Phys.* A **23** 2327
Herman R L 1990 *J. Phys.* A **23** 1063

[11] Kivshar Y S, Malomed B A 1989 *Rev. Mod. Phys.* **61** 765

[12] Yan J R, Tang Y 1996 *Phys. Rev.* E **54** 6818

[13] Yan J R, Tang Y, Zhou G H, Chen Z H 1998 *Phys. Rev.* E **58** 1064

[14] Li Z B, Pan S Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 402 (in Chinese) [李志斌、潘素起 2001 物理学报 **50** 402]

[15] Wei C M, Xia Z Q, Tian N S 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2463 (in Chinese) [韦才敏、夏尊铨、田乃硕 2005 物理学报 **54** 2463]

Time-dependent perturbation theory of KdV soliton*

Pan Liu-Xian[1)2)] Yu Hui-You[1)] Yan Jia-Ren[1)†]

1)(*Department of Physics, Hunan Normal University, Changsha* 410081, *China*)

2)(*Department of Engineering in Electronics and Information, Hunan University of International Economics, Changsha* 410205, *China*)

(Received 4 April 2007; revised manuscript received 21 June 2007)

Abstract

The effects of the periodical time-dependent perturbation on a KdV (Korteweg de Vries) soliton are studied. Expanding the perturbation term into a Fourier series, we find that the time-independent term will lead to the secular terms. In this paper, the soliton parameters (height, width and velocity) are derived by eliminating the secular terms, and the corrections on a soliton caused by perturbation are obtained with the help of other terms in Fourier series in the first-order approximation.

Keywords: KdV soliton, soliton perturbation

PACC: 0340, 4720, 4725

* Project supported by the Natural Science Foundation of China (Grant No. 10375043) and Sponsored by Hunan Postdoctoral Scientific Program.

† Correspondent author. E-mail: jiarenyan@hunnu.edu.cn