第 57 卷 第 3 期 2008 年 3 月
1000-3290/2008/57(03)/1343-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57, No.3, March, 2008

一维 Tonks-Girardeau 原子气区域中的亮孤子解*

刘 红[1)†] 魏佳羽[2)] 楼森岳[3)] 贺贤土[4)]

1)(北京物资学院物流学院,北京 101149)

2)(中国工程物理研究院研究生部,北京 100088)

3)(宁波大学理学院,宁波 315211)

4)(北京应用物理与计算数学研究所,北京 100088)

(2007 年 7 月 14 日收到;2007 年 7 月 27 日收到修改稿)

利用玻色-费米图像,发现了一维 Tonks-Girardeau 气体的孤子解,方法是在平均场近似的基础上,利用对称变换,将 GP 方程转化为高阶强相互作用的非线性薛定谔方程,之后解析求解这个含五次方的非线性薛定谔方程,得到一个亮孤子解,这对从实验上观测 Tonks-Girardeau 气体的孤子现象具有指导作用.

关键词:玻色-爱因斯坦凝聚,Tonks-Girardeau 气体,孤子解

PACC:0365,0155,7335

1. 引 言

在 Tonks-Girardeau 原子气区域中[1],玻色粒子被限制在一维,该体系的物理性质由粒子间的排斥力支配,这一物质状态自被提出后已被广泛研究了 40 年[2],但仅仅是在理论上研究,因为这种气体以前一直没有在实验室中生成. 2004 年,科学家将超冷铷原子气体束缚在一个光学点阵中,然后用另一个光学势来增加铷原子的有效质量,从而增加它们的相互作用能量,这样便将该体系推进到了 Tonks-Girardeau 区域,即生成了 Tonks-Girardeau 气体[3],其中玻色子像费米子(电子和夸克等物质粒子)一样运动[4]. 这种气体表现出一些特别的性质,如概率密度通过 Talbot 震荡表现出空间聚焦现象[5],Girardeau 研究了一维硬核玻色气体在环形势阱束缚下可能存在亮和暗的孤波解[6],在动量空间,限制在一维扩展的 Tonks 气体中,系统的费米特性被观察到[7—9],而另一研究发现具有费米子特征的 Tonks 气体,表现出费米-玻色二向性交替出现的现象[10]. 在 Gaudin 发表见解之后[11],人们对低维玻色气体被囚禁在方势阱[12]和有硬壁的光学盒子的束缚下[13]的行为很有兴趣[14,15],这些研究大多限制在由不同谐振子波束缚的势阱下,用超冷中子杨氏双缝干涉实验测量法[16]和衍射时间测量法[17]可以俘获到单粒子的运动行为.

在绝对零度时,GP 方程对玻色-爱因斯坦凝聚体的动力学行为的描述是有效的[18],对于均匀凝聚体的情况,即外势为零或常数,GP 方程就是一个标准的非线性薛定谔方程,类似于许多非线性物理系统中的孤子,如光学孤子、水波、光纤通讯、DNA 大分子等许多非线性物理系统中的孤子,在玻色-爱因斯坦凝聚体中同样具有物质波孤子[19],这也是一种稳定的局域化的波包结构,并在传播过程中保持波形不变. 在非线性光学中由于传播介质的非线性作用引起的对波包的自聚焦作用(self-focusing)平衡了色散和衍射造成波包扩散,从而形成光学孤子如图 1 所示. 在玻色-爱因斯坦凝聚体中,产生这种自聚焦作用的非线性效应来自聚焦原子间的两体相互作用,如果它抵消掉波包的扩散作用后,就可以形成物质波孤子了,对于不同性质的原子间相互作用,会形成不同的物质波孤子,当凝聚原子相互作用为排斥作用时,GP 方程具有暗孤子解[20],当凝聚原子相互吸引时,则可以形成物质波的亮孤子解[21],二维情况下有模拟的孤子解[22],Zhang 等得到自旋-1 波色-爱因斯坦凝聚体系的旋转孤立波解[23],在不同的势阱束缚下,原子气体的散射长度会影响原子气体的物质密度[24].

* 国家自然科学基金(批准号:10474008,10476033),国家重点基础研究发展计划(973)项目(批准号:2007CB814800)和北京市属市管高等学校人才强教计划资助的课题.

† E-mail:liuhong_cc@yahoo.com.cn

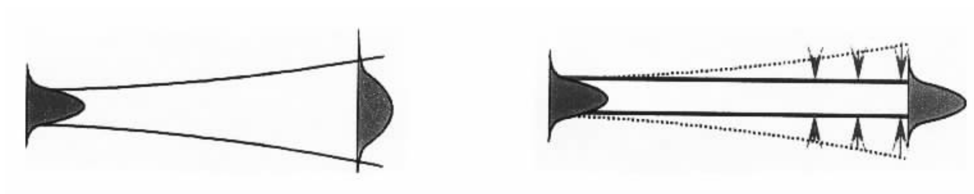

图 1 非线性相互作用使孤立波保持稳定的形状

实验中，早在 1999 年，Burger 等[20] 利用^{87}Rb 原子观察到玻色-爱因斯坦凝聚体的暗孤子，随后 Denschlag 等人利用 Na 原子也实现了物质波的暗孤子[25]，他们都是通过相位标记(phase imprinting)的方法来发现物质波暗孤子的，只有当凝聚体的密度包络上凹痕处的凝聚体密度为零时，暗孤子才是静止的，此时这一凹痕分成两部分的玻色-爱因斯坦凝聚体的相位精确相差 π，随着凹痕的深度由最大到零的变化会引起暗孤子的速度由静止到接近声速的相应变化. 相对于暗孤子，亮孤子的研究相对较晚，原因是凝聚原子间为相互吸引作用时，维系孤子稳定的凝聚原子数必须要低于一个临界值，在二维和三维情形下聚集体会迅速塌缩掉，在准一维情况下，可以有亮孤子形成，如 Strecker[26] 和 Khaykovich[27] 等人利用^{7}Li 原子在准一维光学阱中生成了物质波亮孤子和孤子链，并观察了他们的传播过程. 本文用解析的方法给出了具有强相互作用时，一维 Tonks-Girardeau 原子气区域中的一个亮孤子解.

2. 模 型

在稀薄低温的玻色气体中，人们一般只考虑两体相互作用，使用刚球模型，哈密顿中的两体相互作用势可近似为 δ 函数[28]

$$V(r'-r)=g\delta(r'-r), \tag{1}$$

这里 g 是和 s-波散射波长相关的耦合常数，令

$$g'=\frac{4\pi\hbar^2 a}{m}, \tag{2}$$

可得著名的 Gross-Pitaevskii(GP)方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi(r,t)=\Big[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}+V_{\mathrm{ext}}(r)+g'\mid\Phi(r,t)^2\mid\Big]\Phi(r,t), \tag{3}$$

在平均场理论框架下，系统的动力学行为可以方便地由 GP 方程描述，当系统处于绝对零度时，非凝聚部分波函数为零，此时 GP 方程是严格有效的，许多研究者从 GP 方程出发，利用平均场理论，得到了玻色-爱因斯坦凝聚体中的大量有趣的性质.

Rybin 等人[29] 分析了 D 维 GP 方程在球对称势情况下，具有自相似的球对称解，令 $\hbar=1$，$m=\frac{1}{2}$，$r^2=\sum_i^D x_i^2$，(3)式变为

$$\mathrm{i}\varphi_t+\Delta_x\varphi-2\kappa\varphi\mid\varphi\mid^{2n}-\frac{\omega^2}{4}r^2\varphi=0. \tag{4}$$

再经过

$$\theta=\frac{1}{\omega_x}\tan(\omega_x t),\quad z_i=\frac{x_i}{\cos(\omega_x t)}, \tag{5}$$

$$\varphi(x,t)=[\cos(\omega_x t)]^{-D/2}\exp\Big[-\mathrm{i}\frac{\omega_x}{4}\tan(\omega_x t)r^2\Big]\times p(z,\theta), \tag{6}$$

代入(4)式得

$$\mathrm{i}p_\theta+\Delta_z p-\frac{2\kappa}{(1+\omega^2\theta^2)^{-Dn/2+1}}p\mid p\mid^{2n}=0. \tag{7}$$

若令 $n=2$，$D=1$，经过简单的变化，可得如下形式的薛定谔方程：

$$\mathrm{i}\partial_t E+\partial_{xx}E-h\mid E\mid^4 E=0, \tag{8}$$

其中 $E(x,t)$为波的复振幅，h 为耦合常数，先假定其解具有如下形式：

$$E(x,t)=Q(kx+\omega t)\exp[-\mathrm{i}(k_0x+\omega_0 t)]. \tag{9}$$

经过简单的数学运算，可得如下形式的孤子解：

$$Q=\frac{\mathrm{sech}(kx+\omega t)\sqrt{3}\mathrm{e}^{\{[-\frac{\omega x}{2k}-\frac{(\omega^2-4k^4)k^2t}{4}]\mathrm{i}\}}}{\sqrt{\sqrt{-\frac{3h}{k}}(1+\tanh(kx+\omega t)^2)}}, \tag{10}$$

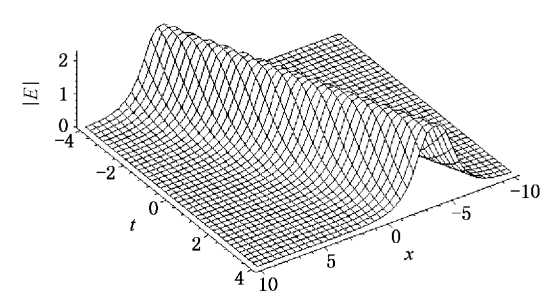

图 2 一维 Tonks-Girardeau 原子气区域中的一个亮孤子解(其中 $h=-1$，$k=1$，$\omega=1$)

其中 i 为虚数单位，这是一个亮孤子解，如图 2 所示.

3. 结　　论

综上所述，我们对描述一维 Tonks-Girardeau 原子气区域中的 GP 方程，用文献[28]中的球对称变换，将其转换成一个含高阶项的一维非线性薛定谔方程，求解非线性薛定谔方程一直是人们感兴趣的问题[30—32]，我们通过解析的方法，对这种相互作用势下的一维高阶非线性薛定谔方程进行求解，得到了一个亮孤子解.

Liu[32,33] 等人曾对孤子解在超冷原子气体中的行为，做了很好的分析工作，这些理论分析对从实验上观测超冷原子气体的孤子现象具有指导作用.

[1] Girardeau M 1960 *J. Math Phys.* **1** 516
Girardeau M 1965 *Phys. Rev.* **139** B 500
Tonks L 1936 *Phys. Rev.* **50** 955
Lieb E H，Liniger W 1963 *Phys. Rev.* **130** 1605

[2] Olshanii M 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 938
Dunjko V，Lorent V，Olshanii M 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 5413

[3] Paredes B，Widera A，Murg V 2004 *Nature* (London) **429** 227
Kinoshita T，Wenger T，Weiss D 2004 *Science* **305** 1125

[4] Kinoshita T，Wenger T，Weiss D 2006 *Nature* (London) **440** 900
Pollet L，Rombouts S M，Denteneer P J 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 210401

[5] Rojo A，Cohen J L，Berman P R 1999 *Phys. Rev.* A **60** 1482

[6] Girardeau M D，Wright E M 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 5239

[7] Rigol M，Muramatsu A 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 240403

[8] Minguzzi A，Gangardt D M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 240404

[9] Öhberg P，Santos L 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 240402

[10] Girardeau M D，Minguzzi A 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 80404

[11] Gaudin M 1971 *Phys. Rev.* A **4** 386

[12] Hänsel W，Hommelhoff P，Hänsch T W，Reichel J 2001 *Nature* **413** 498

[13] Meyrath T P，Schreck F，Hanssen J L，Chuu C S，Raizen M G 2005 *Phys. Rev.* A R **71** 41604

[14] Cazalilla M A 2002 *Europhys. Lett.* **59** 793
Cazalilla M A 2004 *J. Phys.* B **37** S1

[15] Batchelor M T，Guan X W，Oelkers N，Lee C 2005 *J. Phys.* A **38** 7787

[16] Gerasimov A S，Kazarnovskii M V 1976 *Sov. Phys. JETP* **44** 892

[17] Godoy S 2002 *Phys. Rev.* A **65** 42111

[18] Liu J，Wu B，Niu Q 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 170404
Liu J，Zhang C，Mark G. Raizen，Niu Q 2003 *Phys. Rev.* A **73** 13601

[19] Carr L D，Brand J 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 40401
Eiermann B，Anker T，Albiez M，Taglieber M，Treutlein P，Marzlin K P，Oberthaler M K 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 230401

[20] Jackson B，Proukakis N P，Barenghi C F 2007 *Phys. Rev.* A**75** 51601
Burger S，Bongs K，Dettmer S，Ertmer W，Sengstock K 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 5198
El G A，Gammal A，Kamchatnov A M 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 180405

[21] Khawaja U A，Stoof H T C，Hulet R G，Strecker K E，Partridge G B 2000 *Phys. Rev. Lett.* **89** 200404
Pérez-García V M，Michinel H，Herrero H 1998 *Phys. Rev.* A **57** 3837

[22] Lashkin V M 2007 *Phys. Rev.* A **75** 43607

[23] Zhang W X，Müstecaploğlu Ö E，You L 2007 *Phys. Rev.* A **75** 43601

[24] Liang Z X，Zhang Z D，Liu W M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 50402

[25] Denschlag J，Simsarian J E，Feder D L，Charles W C，Collins L A，Cubizolles J，Deng L，Hagley E W，Helmerson K，Reinhardt W P，Rolston S L，Schneider B I，Phillips W D 2000 *Science* **287** 97

[26] Strecker K E，Partridge G B，Truscott A G，Hulet R G 2002 *Nature* **417** 150

[27] Khaykovich L，Schreck F，Ferrari G，Bourdel T，Cubizolles J，Carr L D，Castin Y，Salomon C 2002 *Science* **296** 1290

[28] Lee T D，Huang K，Yang C N 1957 *Phys. Rev.* **106** 1135

[29] Rybin A V，Varzugin G G，Lindberg M，Timonen J，Bullough R K 2000 *Phys. Rev.* E **62** 6224

[30] Zhou C T，He X T，Chen S G 1992 *Phys. Rev.* A **46** 2277

[31] Garnier J，Abdullaev F K，Salerno M 2007 *Phys. Rev.* E **75** 16615

[32] Li Z D，He P B，Li L，Liang J Q，Liu W M 2005 *Phys. Rev.* A **71** 53611
Li L，Li Z D，Malomed B A，Mihalache D，Liu W M 2005 *Phys. Rev.* A **72** 33611
Zong F D，Dai C Q，Yang Q，Zhang J F 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3805 (in Chinese) [宗丰德、戴朝卿、杨　琴、张解放 2006 物理学报 **55** 3805]

[33] He Z M，Wang D L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3088 (in Chinese) [何章明、王登龙 2007 物理学报 **56** 3088]

Bright soliton solution in 1D Tonks-Girardeau gas*

Liu Hong[1)†] Wei Jia-Yu[2)] Lou Sen-Yue[3)] He Xian-Tu[4)]

1)(*Logistics School*, *Beijing Wuzi University*, *Beijing* 101149, *China*)

2)(*Graduate School*, *China Academy of Engineering Physics*, *Beijing* 100088, *China*)

3)(*Department of Physics*, *Ningbo University*, *Ningbo* 315211, *China*)

4)(*Institute of Applied Physics and Computational Mathematics*, *Beijing* 100088, *China*)

(Received 14 July 2007; revised manuscript received 27 July 2007)

Abstract

Base on spherical symmetric trap treatment, we analyze how to change a generalized Gross-Pitaevskii equation to a quintic nonlinear Schrödinger equation. Analysing the nonlinear Schrödinger equation, we find a typical bright soliton solution in Tonks-Girardeau gas region. This will help experimental observations.

Keywords: Bose-Einstein condensate (BEC), Tonks-Girardeau gas, soliton solution

PACC: 0365, 0155, 7335

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10474008, 10476033), the National Basic Research Program of China (Grant No. 2007CB814800), and the Funding Project for Academic Human Resources Development in Institutions of Higher Learning Under the Jurisdiction of Beijing Municipality.

† E-mail: liuhong_cc@yahoo.com.cn