

# 变分同化中水平误差函数的 正交小波模拟新方法\*

曹小群<sup>1)†</sup> 黄思训<sup>1)†</sup> 杜华栋<sup>1)</sup>

1) 解放军理工大学气象学院, 南京 211101)

2) 国防科技大学, 长沙 410073)

(2007 年 5 月 19 日收到, 2007 年 7 月 18 日收到修改稿)

背景误差协方差是变分资料同化系统中的一个重要组成部分, 能将观测信息从观测点传播到周围的模式格点和垂直层上. 为了模拟背景误差协方差中水平误差函数的非均匀性和各向异性, 提出了一种用正交小波变换模拟水平误差函数的新方法. 试验结果表明, 新方法能模拟出水平误差函数中固有的非均匀性和各向异性, 极好地表示了背景误差协方差中固有的结构和特征.

关键词: 变分资料同化, 背景误差协方差, 二维正交小波, 水平误差函数

PACC: 9260X, 9260Y

## 1. 引 言

气象学和物理海洋学模式中资料同化技术的研究和发展是目前国际上的热点问题<sup>[1-6]</sup>. 资料同化的目的, 正如 Talagrand 所定义的那样, 在于“利用现有的所有信息来定义一个最可能精确的大气(海洋)运动状态”. 众所周知, 背景误差协方差在资料变分同化中起关键性的作用, 目前许多业务同化系统中采用的背景协方差模型普遍存在许多缺陷: 1) 必须假设水平误差是均匀和各向同性的; 2) 水平方向的相关和垂直方向的相关是可分离的; 3) 所模拟的水平长度尺度在每个模式层上无局地变化. 这些缺陷使得协方差模型既不能真实地反映实际背景场误差的结构特征, 同时使得同化系统的分析场质量较差. 主要原因是完整的背景误差协方差矩阵  $B$  将由  $10^{12}$ — $10^{14}$  个矩阵元素构成, 超出了一般计算机的存储能力; 而且真实的背景误差无法知道, 所以必须通过一些转换算子来模拟  $B$  矩阵, 以实现简化表示. 在背景协方差的模拟方面, 已有许多有意义的理论研究: Desroziers 使用了水平半地转坐标变换, 此方法在锋面情况下能够给出更高的分辨率和各向异性的误差相关分布, 但在半地转近似无效的情况下适

用性受到限制(如热带地区)<sup>[7]</sup>. Benjamin 在垂直方向对分析量进行变换, 采用等熵的垂直坐标系, 方法除了在斜压地区具有高的水平和垂直分辨率外, 在热带地区同样适用<sup>[8]</sup>. Derber 和 Bouttier 通过一个线性平衡方程来分离热带和中纬度特征<sup>[9]</sup>. Courtier 把整个分析域分解成几个相互补充的子区域<sup>[10]</sup>. Purser 使用递归滤波来模拟  $B$  中的误差相关<sup>[11, 12]</sup>. Weaver 和 Courtier 使用扩散方程模拟球面上的误差相关<sup>[13]</sup>. 在业务应用方面, 递归滤波技术已应用于 WRF 和 ETA 模式的 3D-Var 系统中, 以模拟区域资料同化中的水平误差函数; ECMWF, NCEP 和 Meteo-France 等气象单位使用谱方法来描述全球 3/4D-Var 系统中水平误差函数(或水平误差相关). 递归滤波方法使用的前提是背景场误差相关函数具有高斯分布型联合概率密度, 即假定背景场误差各向均匀同性. 谱分析方法在谱空间有较好的局部性, 但缺少物理空间的局部性, 因此只能描述各尺度上的平均相关, 但对非均匀的且各向异性的局地误差相关分布无能为力<sup>[14]</sup>. 而数值天气预报(NWP)更关心一些在空间上变化剧烈的局部天气系统(如锋面, 雷暴等). 小波方法是一种全新的数学工具, 小波函数同时在物理空间和谱空间中具有局部特性, 可以克服谱方法和递归滤波方法的弱点, 同时正交小波变换还有

\* 国家自然科学基金(批准号: 40675020, 40575052)资助的课题.

† E-mail: huangxp@yahoo.com.cn

许多其他优点,如高稀疏性、变换速度快和具有多尺度分析能力等。

文中提出一种用正交小波变换模拟背景误差协方差(目前主要是模拟  $B$  的水平部分)的新方法。首先建立了一个基于 Meyer 正交小波变换的水平误差函数模型,然后通过对比试验表明新方法的优点。

## 2. 正交小波变换介绍

### 2.1. 一维小波

正交小波是由一组同时具有格点基函数和谱函数(正余弦函数和勒让德函数)性质的基函数构成。Fournier 对正交小波分析在气象场领域的应用做了一个全面地综述<sup>[15]</sup>。文中使用的是 Meyer 小波,它具有光滑和对称的性质,小波函数同时在格点空间和谱空间中具有局部化特性。在一维形式中, Meyer 正交小波基函数都是通过对一个母函数  $\psi_{0,0}$  进行伸展和平移操作后得到

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi_{0,0}(2^j x - k), \quad (1)$$

$j$  是尺度指标,  $k$  是位置指标。在这种表示中,较大的  $j$  值表示较小尺度的小波,即较高的分辨率。Meyer 小波满足正交关系

$$\psi_{j_1, k_1} \psi_{j_2, k_2} = \delta_{j_1, j_2} \delta_{k_1, k_2}. \quad (2)$$

任何一个函数  $F(x) \in L^2(\mathbf{R})$  都可以展开成下面的形式:

$$F(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{j,k} \psi_{j,k}(x), \quad (3)$$

其中

$$f_{j,k} = \int F(x) \psi_{j,k}(x) dx. \quad (4)$$

### 2.2. 二维小波

尽管定义不可分离的二维正交小波是可能的,但是这种小波没有像一维小波那样被完整地研究,也没有非常成熟的算法<sup>[16]</sup>。一个构造二维小波族更常用的技术是使用一维小波族的张量积。这样的小波对  $X$  和  $Y$  方向给出了非常重要的地位,同时除尺度和位置外,还为转换增加一个方向分量。在文中,张量积使用的是上面定义的多尺度 Meyer 小波。有两种不同的张量积方法从一维正交小波基构造一个二维正交小波基。第一个是由 Yano 等使用的,考虑小波在  $X$  和  $Y$  方向所有可能的组合:

$$\phi_{i,j,k}(x,y) = \phi_{i,k}(x) \otimes \phi_{j,k}(y),$$

$$\psi_{i,j,k}(x,y) = \psi_{i,k}(x) \otimes \psi_{j,k}(y). \quad (5)$$

这个构造方法被称为矩形构造法<sup>[17]</sup>。第二种是 Jawerth 和 Sweldens 提出的正方形构造法<sup>[18]</sup>。在文中,将使用矩形构造方法(5),这种方法的优点是它可以用到非正方形区域上<sup>[19,20]</sup>。

## 3. 基于正交小波的水平误差函数模拟

数值天气预报模式的初始场可以由三维变分同化资料分析系统提供,其中分析场  $x^a$  融合所有可获得的信息:观测资料  $y^o$ 、背景场  $x^b$  和它们相应的误差协方差,对大气状态给出一个最优的估计。最优分析场可以通过使下面的目标函数极小而得到:

$$\begin{aligned} J(x^a) = & \frac{1}{2} (x^a - x^b)^T B^{-1} (x^a - x^b) \\ & + \frac{1}{2} (Hx^a - y^o)^T R^{-1} (Hx^a - y^o), \end{aligned} \quad (6)$$

$B$  和  $R$  分别是背景误差协方差和观测误差协方差,  $H$  是将分析量转换到观测空间的观测算子。在上面的方程中,分析矢量  $x^a$  的维数具有  $10^7$  量级(包括每个模式格点上的基本物理变量的值),因此不可能处理完整的背景误差协方差  $B$ 。各种不同的近似需要被采用,以刻画原始协方差矩阵中的各种特征(如非均匀性和各向异性等)。常用的方法是  $B$  通过控制变量转换算子  $U$  进行模拟,转换公式定义为

$$x' = x^a - x^b = U_p U_v U_h v, \quad (7)$$

$U_p$ ,  $U_v$  和  $U_h$  分别表示物理变换、垂直变换和水平变换矩阵。物理变换矩阵能将相关的模式变量(如温度、水平风场、湿度和地面气压等)转换成非相关的控制变量(如流函数、非平衡速度势、非平衡温度、比湿和非平衡地面气压等),垂直变换矩阵利用垂直正交模态(如经验正交函数)之间的正交性解除每个控制变量空间内部的各个垂直层之间的相关性;水平变换矩阵用来解除水平方向的空间相关性。通过这些变换的逆变换将分析增量  $x'$  转换控制变量  $v$  空间中,然后进行极小化过程。因为控制变量的各个元素之间不相关,所以  $v$  空间中的协方差矩阵是单位矩阵,同时,各个变换矩阵还有预条件作用。

文中的核心思想是在控制变量转换中引入一种新的水平变换矩阵  $U_w$ , 以其代替  $U_h$ 。

$$x' = U_p U_v U_w v, \quad (8)$$

其中  $U_w = D_g W^{-1} D_w$ ,  $W$  表示二维正交小波变换。而  $D_g$  和  $D_w$  是对角矩阵,分别包含分析变量在格点

空间和小波空间中的标准偏差. 正交小波变换  $W$  的使用意味着水平协方差矩阵在小波空间中被对角化, 即利用正交小波基之间的正交性来解除水平方向的相关性.

在许多业务变分资料同化系统中, 常用的水平变换是递归滤波和谱变换(包括傅里叶变换和勒让德变换). 两种变换在水平方向上获得的任意两点之间的背景误差相关是均匀的和各向同性的(即不随两点的刚性平移或旋转而改变). 而真实的背景误差相关应该是非均匀和各向异性的<sup>[18]</sup>. 小波分析的一个重要特征是同时具有格点空间和谱空间上的局部特性. 谱空间中的局部特性将像谱方法一样能表示不同尺度的平均相关, 这种平均相关是均匀和各向同性的. 另外小波分析在格点空间上的局部化特性对描述  $B$  中的局地相关是非常合适的, 这种局地相关是非均匀的和各向异性的.

引入正交小波变换后, 总的背景误差协方差矩阵  $B$  可以用下面这些转换算子表示为

$$B = U_p U_v D_g W^{-1} B_w W^{-T} D_g^T U_g^T U_g^T, \quad (9)$$

其中  $B_w = D_w D_w^T$ , 包含的是小波功率谱. (9)式的物理意义是使用一系列的变换矩阵及其伴随矩阵来实现对背景误差协方差矩阵的隐式模拟, 从而在变分同化的求解中避免了对  $B$  矩阵的直接表示和求逆. 假如不考虑物理变换和垂直变换, 则水平误差函数可以表示为  $B_h = D_g W^{-1} B_w W^{-T} D_g^T$ . 对  $B_w$  和  $D_g$  两个对角矩阵进行存储, 再加上正交小波变换算子和伴随算子, 就能表示水平误差函数. 因此与在格点空间中直接表示水平误差函数相比较, 不但方法简单, 而且大大减少存储量. 若使用双傅里叶变换(在两个相互正交的水平方向都采用傅里叶变换)代替正交小波变换, 水平误差函数可以表示为  $B_h = D_g F^{-1} B_r F^{-T} D_g^T$ .  $F^{-1}$  和  $F^{-T}$  分别表示傅里叶逆变换及其伴随变换.  $B_r$  是包含傅里叶系数方差的对角矩阵.

## 4. 试验和分析

### 4.1. 统计资料

文中以 WRF 模式产生的将近一个月(2005 年 6 月 2 日到 6 月 29 日)的预报场资料进行统计. WRF 模式从 NCEP 的全球 Grib 资料获得初始场和边值条件, 然后在每天模式起报时刻(00 时和 12 时), 以前次预报的 12 小时预报场为初始场进行 24 h 预报, 每

12 h 保存一次结果, 如此循环至 6 月 29 日 12 时止. 为 NMC 方法提供的样本总数为 55, 统计的区域范围为(95.079—114.92418, 30.039—39.96024). 样本的分辨率为 20 km, 垂直方向 30 个 sigma 层, 水平维数是  $64 \times 64$ .

### 4.2. 试验设计

因为方法中的物理变换  $U_p$  和垂直变换  $U_v$  与常用的 NMC 方法相同, 所以下面的分析不再考虑  $U_p$  和  $U_v$ . 这样进行试验的目的是不再考虑其他因素的影响, 只考虑不同水平变换方法对水平误差函数的模拟. 在下面的试验结果中, 受篇幅限制只给出了经过物理变换和垂直变换(EOF 经验正交函数)后, 非平衡速度势第 7 个模态的分析结果. 分别用两种方法(FFT 方法和正交小波变换方法)模拟非平衡速度势在此模态上的水平误差函数, 比较它们各自所呈现的形状特征.

### 4.3. 试验结果

在这一部分中, 研究和讨论小波方法表示水平误差函数(包括方差函数和相关函数)的有效性和可用性. 研究和图示水平相关函数一般比较困难. 区域上的任何格点和周围格点之间都有一个相关函数. 对某个垂直层的某个变量(如流函数, 非平衡温度和非平衡速度势等), 对应的相关函数的数目都在  $10^3$  和  $10^4$  之间, 而每个相关函数包含的点值也在  $10^3$  和  $10^4$  之间. 因此计算和表示某个变量完整的相关函数几乎是不可能的.

所以只从区域中选择 5 个格点, 用原始资料统计计算这些格点上的局地相关函数. 由于样本数的限制, 局地相关函数中必定存在误差. 如图 1(a)所示, 每个局地相关函数的形状都极度不规则, 说明被表示的相关函数中都存在噪声. 在下面的结果中我们将看到: 无论是傅里叶方法, 还是正交小波方法都能有效去除由于样本数不够所引入的误差. 在图 1(b)和图 3(b)中, 各个相关函数的等值线都相当光滑, 验证了两种方法的滤波效果.

对原始资料在格点空间中直接进行统计计算, 可以得到方差函数  $D_g D_g^T$  和局地相关函数, 分别如图 1(a)和图 1(b)所示. 采用正交小波变换模拟水平误差函数的过程是: 首先对每个样本进行正交小波变换, 然后在小波空间中进行统计计算, 得到小波系数的方差, 也就是小波功率谱  $B_w$ , 最后由公式  $B_h =$

$D_g W^{-1} B_w W^{-T} D_g^T$  计算格点空间中的方差函数和局地相关函数, 这个计算过程和资料同化分析过程中控制变量转换及其伴随的计算过程相同, 需要巨大的计算代价. 用双傅里叶方法来模拟水平误差函数和上面的计算过程相似, 也需要先计算谱空间中的方差函数  $B_f$ .

现在对直接统计计算、双傅里叶方法模拟和正

交小波方法模拟三种方法的计算结果进行比较. 首先分析方差函数, 图 2(a)、图 2(b) 和图 3(a) 中显示的分别是由三种方法计算得到的格点方差在区域上的分布, 很容易看出正交小波变换方法模拟的结果更加接近“真实”的方差分布. 说明正交小波变换方法对物理格点空间中的局部特性比傅里叶方法有更好的刻画, 这个优点在下面的分析中更加显著.

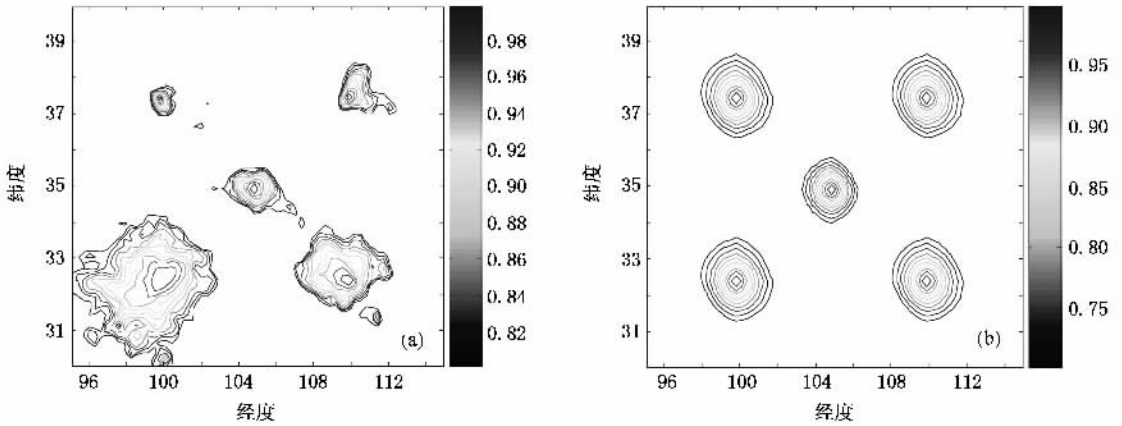


图 1 (a) 由原始数据统计计算的局地相关函数 (b) 由双傅里叶方法模拟的局地相关函数

在图 1(b) 中, 五个格点上的局部相关函数几乎完全一样, 说明由傅里叶方法模拟的水平相关函数不依赖于地理位置, 是均匀的. 同时, 图 1(b) 所示的局部相关函数基本上呈现出圆形, 说明水平相关是各向同性的. 图 3(b) 所示的结果正好相反, 五个格点上的局部相关函数都不一样, 而且等值线的形状不规则. 因此用正交小波变换方法模拟出来的水平相关是非均匀和各向异性的(即误差相关随两点的刚性平移或旋转而改变). 而图 1(a) 中所显示的“真实”的局地相关函数也是非均匀和各向异性的. 通过

上面的分析, 容易得到以下的结论: 正交小波变换模拟方法能有效地消除水平误差函数中由样本数不足而引入的误差, 同时能保持局地相关函数中固有的非均匀性和各向异性, 而傅里叶方法(或谱方法)也能极大地抑制噪声, 但不能刻画非均匀性和各向异性. 这是因为正弦、余弦函数或球谐函数都只在谱空间中存在局部化功能, 不能反演物理空间中的局部信息. 所以在变分资料同化中使用谱变换作为控制变量转换的水平变换时, 要假设水平误差相关是均匀的和各向同性的.

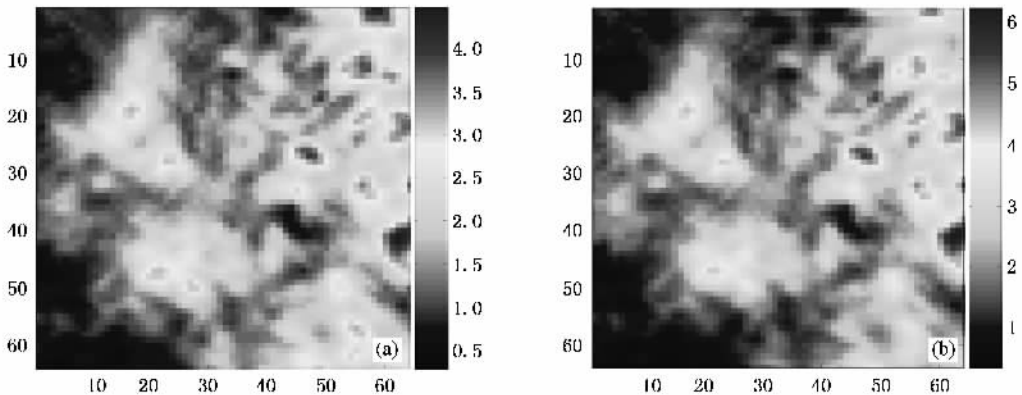


图 2 (a) 由原始数据统计计算的方差函数 (b) 使用双傅里叶方法模拟的方差函数

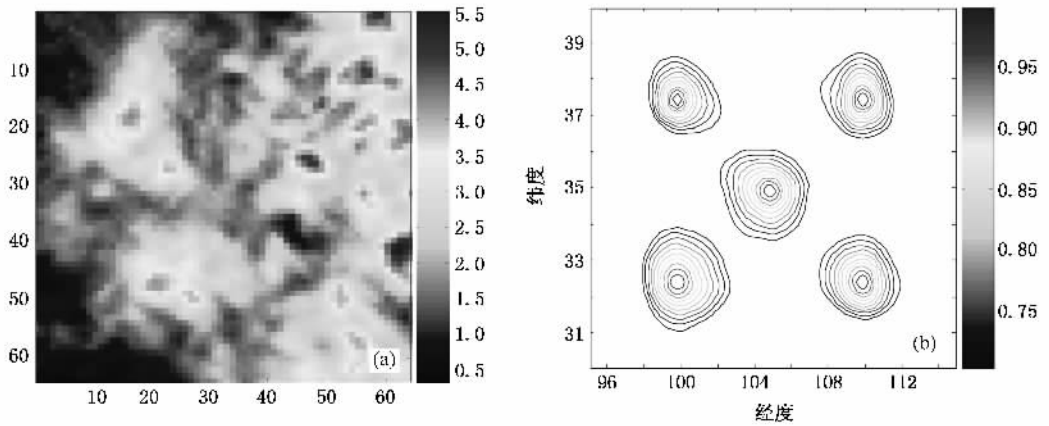


图 3 (a)和(b)分别表示由正交小波方法模拟的方差函数和局地相关函数

## 5. 结 论

文中的主要工作是引入了正交小波变换方法来模拟背景误差协方差中的水平误差函数. 由于小波函数同时在谱空间和物理空间中具有局部性质, 因此它能比 FFT 方法或谱方法更好地表示方差函数和局地相关函数. 试验结果表明: 用正交小波方法计

算得到的方差函数和局地水平相关函数成功地刻画了水平误差函数的非均匀性和各向异性, 而 FFT 方法却不能. 现在使用的二维 Meyer 小波由于是用张量积方法构造而成, 方向性有限(主要是指向  $X$  和  $Y$  方向), 很难表示其他方向上的局部各向异性, 因此有必要引入其他方向性更强的小波, 如复小波和矢量小波等. 另外, 构造基于正交小波的控制变量转换和设计小波 3D-Var 同化系统也是一个重要的问题.

- [ 1 ] Zou X ,Navon I M ,LeDimet F X 1992 *Q. J. R. Meteor. Soc.* **118** 1163
- [ 2 ] Navon I M 1977 *Dyn. Atmos. Oceans* **27** 55
- [ 3 ] Huang S X ,Han W ,Wu R S 2004 *Chin. Science(D)* **47** 630
- [ 4 ] Talagrand O 1977 *J. Met. Soc. Japan Special Issue* **75** 1B 191
- [ 5 ] Huang S X ,Cai Q F ,Xiang J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2607 ( in Chinese ) [ 黄思训、蔡其发、项 杰 2007 物理学报 **56** 2607 ]
- [ 6 ] Huang S X ,Sheng Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6720 ( in Chinese ) [ 黄思训、盛 峥 2006 物理学报 **55** 6720 ]
- [ 7 ] Desroziers G 1997 *Mon. Wea. Rev.* **125** 3030
- [ 8 ] Benjamin S G 1989 *Mon. Wea. Rev.* **117** 1586
- [ 9 ] Derber J ,Bouttier F 1999 *Tellus A* **51** 195
- [ 10 ] Courtier P ,Andersson E ,Heckley W ,Pailleux J ,Vasiljevic D ,Hamrud M ,Hollingsworth A ,Rabier F ,Fischer M 1989 *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* **124** 1783
- [ 11 ] Purser R ,Wu W S ,Parrish D ,Roberts N M 2003 *Mon. Wea. Rev.* **131** 1524
- [ 12 ] Purser R ,Wu W S ,Parrish D ,Roberts N M 2003 *Mon. Wea. Rev.* **131** 1536
- [ 13 ] Weaver A ,Courtier P 2001 *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* **127** 1815
- [ 14 ] Fisher M ,Andersson E 2001 *ECMWF Technical Memorandum* **347** 38
- [ 15 ] Fournier A 2000 *J. Atmos. Sci.* **57** 3856
- [ 16 ] Lai M J ,Zhou D X 2002 *Analysis : Twenty Year 's Development* ( New York : Ed. World Scientific ) p231
- [ 17 ] Yano J I ,Moncrieff M W ,Wu X 2001 *J. Atmos. Sci.* **58** 850
- [ 18 ] Jawerth B ,Sweldens W 1994 *SIAM Rev.* **36** 377
- [ 19 ] Gou X Q ,Zhang Y J ,Dong W S 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 957 ( in Chinese ) [ 苟学强、张义军、董万胜 2006 物理学报 **55** 957 ]
- [ 20 ] Yu Z H ,Cai Y L 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1659 ( in Chinese ) [ 于振华、蔡远利 2006 物理学报 **55** 1659 ]

# The new method of modeling horizontal error functions in variational assimilation with orthogonal wavelet<sup>\*</sup>

Cao Xiao-Qun<sup>1,2)</sup> Huang Si-Xun<sup>1)†</sup> Du Hua-Dong<sup>1)</sup>

1) *Institute of Meteorology, People's Liberation Army University of Science and Technology, Nanjing 211101, China*

2) *National University of Defense Technology, Changsha 410073, China*

( Received 19 May 2007 ; revised manuscript received 18 July 2007 )

## Abstract

Background error covariance is an important part of variational data assimilation system, which is used to spread the observation information to other grid points and vertical levels of the model. In order to model the inhomogeneity and anisotropy in horizontal error functions of raw background error covariance, a new method is proposed to model horizontal error functions based on orthogonal wavelet transforms. The results of experiments show that the new method successfully modeled the heterogeneity and anisotropy included in the local correlation functions and depicted the structure and feature of raw covariance correctly.

**Keywords** : variational data assimilation, background error covariance, orthogonal wavelet transform, horizontal error function

**PACC** : 9260X, 9260Y

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National National Science Foundation of China ( Grant Nos. 40675020, 40575052 ).

<sup>†</sup> E-mail: huangsxp@yahoo.com.cn