

分数阶 Liu 混沌系统及其电路实验的研究与控制

陈向荣 刘崇新 王发强 李永勋

(西安交通大学电气工程学院 电力设备电气绝缘国家重点实验室 西安 710049)

(2007 年 5 月 19 日收到 2007 年 6 月 14 日收到修改稿)

基于波特图的频域近似方法,研究了分数阶 Liu 混沌系统,并设计了一种树形电路单元来实现分数阶 Liu 混沌系统,通过对 2.7 阶 Liu 混沌系统的电路仿真和实验,以及 $\alpha = 0.8 \sim 0.1$ (步长 0.1) Liu 混沌系统的电路仿真,验证了树形电路单元的有效性,证实分数阶 Liu 混沌系统中确实存在混沌现象,且存在混沌的最低阶数为 0.3. 设计简单有效的线性反馈控制器,实现了分数阶 Liu 混沌系统的混沌控制.

关键词:分数阶 Liu 系统,电路实验,混沌控制

PACC: 0545

1. 引 言

自从 1963 年 Lorenz 在三维自治系统中发现了 Lorenz 系统^[1]以来,混沌现象的理论研究和应用已成为非线性科学研究的热点问题,但是目前发现的混沌系统并不多. 1999 年,Chen 等利用反控制的方法发现了一种与 Lorenz 系统对偶的混沌系统,称为 Chen 系统^[2]. 2002 年,Lü 等相继发现了 Lü 系统和连接以上三个混沌系统的统一混沌系统^[3,4]. 2004 年,Liu 等提出了一种含有非线性平方项的混沌系统,称为 Liu 系统^[5]. 以上这些系统都是 3 阶混沌系统. 近年来,分数阶混沌系统引起人们广泛的兴趣和深入地研究,并在 Chua's 电路^[6]、Chen 系统^[7,8]、Lü 系统^[9]、混沌电子振荡器^[10]中,通过数值仿真,发现当系统的阶数为分数时,系统仍呈现混沌或超混沌状态,且更能反映系统所呈现的物理现象. 以上所有研究成果促进了混沌理论的研究以及分数阶微积分理论的发展. 由于 Liu 混沌系统是一个新的混沌系统,对其分数阶系统的研究具有重要的理论意义和实际价值.

本文应用分数阶微积分理论,基于波特图的频域近似方法,研究了分数阶 Liu 混沌系统,设计了树形电路单元实现分数阶 Liu 混沌系统,电路实验和仿真证实了电路单元的有效性和可行性,发现分数阶 Liu 混沌系统存在混沌的最低阶数为 0.3. 设计了简单有效的线性反馈控制器,数值仿真和电路实验结果证实了该控制器的可行性.

2. Liu 混沌系统

Liu 混沌系统的数学表达式如下:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(y - x), \\ \frac{dy}{dt} &= bx - cxz, \\ \frac{dz}{dt} &= -dz + hx^2, \end{aligned} \quad (1)$$

式中 a, b, c, d, h 为系统参数,当 $a = 10, b = 40, c = 10, d = 2.5, h = 4$ 时,混沌吸引子的相图如图 1 所示.

根据广义 Lorenz 系统的定义^[11],Liu 混沌系统满足 $a_{12} a_{21} > 0$,因此它属于广义 Lorenz 系统,Chen 系统满足 $a_{12} a_{21} < 0$,与 Lorenz 系统互为对偶系统,而 Lü 系统满足 $a_{12} a_{21} = 0$ 为临界系统,在 Lorenz 系统和 Chen 系统之间架起了桥梁,这里参数 a_{12}, a_{21} 是系统线性部分的矩阵的对应项. 因此对 Liu 混沌系统及其分数阶系统的研究同其他 Lorenz 系统族的混沌系统一样具有重要的理论意义和实际价值.

3. 分数阶微分及其近似

分数阶微分的定义有好几种^[12],但常用的是 Riemann-Liouville(RL)定义,其数学表达式如下:

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau, \quad (2)$$

式中 $\Gamma(\cdot)$ 为 gamma 函数, $n - 1 \leq \alpha < n$, 考虑函数

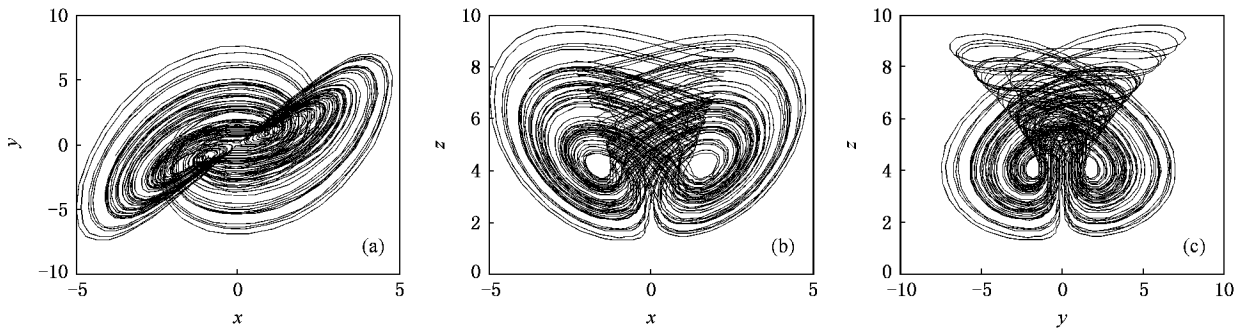
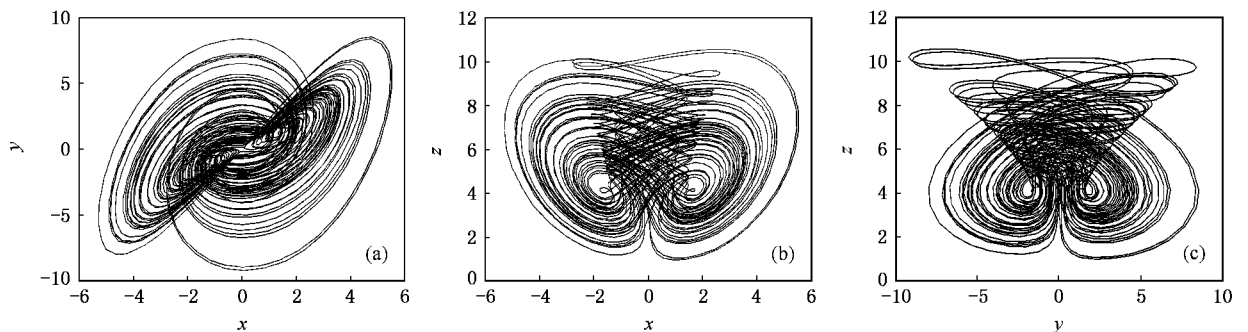


图1 Liu 混沌系统的相图 (a)x-y,(b)x-z,(c)y-z

$f(t)$ 的初始值为零时 (2) 式的 Laplace 变换可表示为

$$L\left\{\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha}\right\} = s^\alpha L\{f(t)\}. \quad (3)$$

因此,分数阶微分算子“ α ”可以在频域中用传递函数 $F(s) = \frac{1}{s^\alpha}$ 表示. 由于分数阶微积分的标准定义不能在时域中直接进行分数阶算子的运算,文献 [13] 提出了一种基于波特图的频域近似方法,应用这种方法,文献 [14] 推导出 $\frac{1}{s^\alpha}$ ($\alpha = 0.1-0.9$, 步长为 0.1) 的近似式. 在本文的数值仿真以及电路实验中,我们只采用近似误差为 2dB 的 $\frac{1}{s^\alpha}$ 近似式.

图2 分数阶 Liu 混沌系统的仿真相图($\alpha = 0.9$) (a)x-y,(b)x-z,(c)y-z

指数为 0.0158.

4.2. 电路实现

根据电路理论,图 3 中 A 与 B 之间等效电路的复频域可以实现文献 [14] 中 α 从 0.1 到 0.9 的 $\frac{1}{s^\alpha}$ 近似式,为方便,我们称其为树形电路单元.

4. 分数阶 Liu 混沌系统及其电路实现

4.1. 分数阶 Liu 混沌系统

分数阶 Liu 混沌系统的数学表达式为

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} &= \alpha(y - x), \\ \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} &= bx - cz, \\ \frac{d^\alpha z}{dt^\alpha} &= -dz + hx^2. \end{aligned} \quad (4)$$

当 $\alpha = 0.9$, $a = 10$, $b = 40$, $c = 10$, $d = 2.5$, $h = 4$ 时,数值仿真相图如图 2 所示,并得出其最大 Lyapunov

选取 $\alpha = 0.9$ 为例设计电路对系统 (4) 进行仿真和实验. 根据文献 [14],可知 $\frac{1}{s^{0.9}}$ 的近似式为

$$\frac{1}{s^{0.9}} \approx \frac{2.2675(s + 1.292)(s + 215.4)}{(s + 0.01292)(s + 2.154)(s + 359.4)}. \quad (5)$$

当 $\alpha = 0.9$ 时,树形电路单元如图 4 所示.

图 4 中 A 与 B 之间的传递函数 $H(s)$ 为

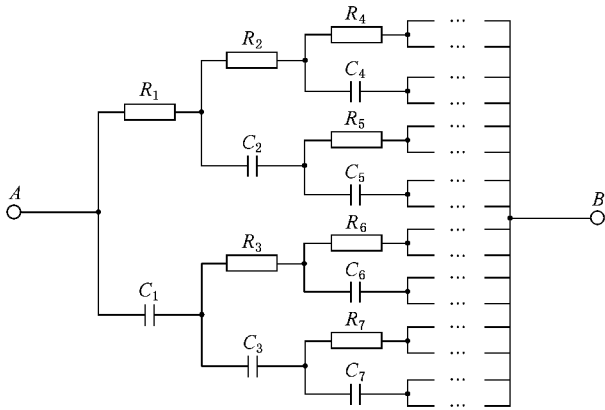


图 3 分数阶 $\frac{1}{s^\alpha}$ 的树形电路单元

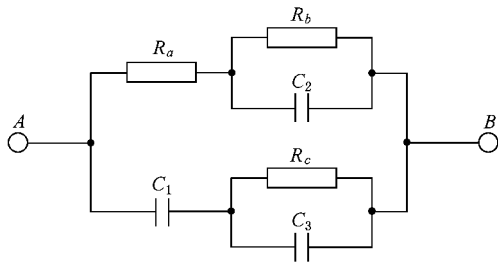


图 4 分数阶 $\frac{1}{s^{0.9}}$ 的树形电路单元

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \left[R_a + \left(R_b \parallel \frac{1}{sC_2} \right) \right] \\
 &\parallel \left[\frac{1}{sC_1} + \left(R_c \parallel \frac{1}{sC_3} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{C_0} \left[\left(\frac{C_0}{C_1} + \frac{C_0}{C_3} \right) \left(s + \frac{R_a + R_b}{R_a C_2 R_b} \right) \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\times \left(s + \frac{1}{C_1 R_c + C_3 R_c} \right) \\
 &\left. \left/ \left[s^3 + \left(\frac{R_a + R_b}{R_a C_2 R_b} + \frac{1}{C_3 R_c} + \frac{C_1 + C_3}{C_1 R_a C_3} \right) s^2 \right. \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \left(\frac{R_a + R_b}{R_a C_2 R_b C_3 R_c} + \frac{1}{C_1 R_a C_3 R_c} \right. \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{C_1 + C_3}{C_1 R_a C_2 R_b C_3} \right) s \right. \right. \\
 &\left. \left. + \frac{1}{C_1 R_a C_2 R_b C_3 R_c} \right] \right], \tag{6}
 \end{aligned}$$

其中 C_0 为单位参数,令 $C_0 = 1 \mu\text{F}$, $F(s) = H(s) \cdot C_0 = \frac{1}{s^{0.9}}$. 将(6)式与(5)式相比较,可得到图4所示树形电路单元的电阻电容值为 $R_a = 1.55 \text{ M}\Omega$, $R_b = 61.54 \text{ M}\Omega$, $R_c = 2.526 \text{ k}\Omega$, $C_1 = 0.7346 \mu\text{F}$, $C_2 = 0.5221 \mu\text{F}$, $C_3 = 1.103 \mu\text{F}$. 同理,当 $\alpha = 0.1 - 0.8$ 步长为 0.1 时,可以得到分数阶 $\frac{1}{s^\alpha}$ 树形电路单元的电阻电容值分别如表 1、表 2 所示.

根据图 4 所示的树形电路单元和文献 [15] 的设计方法来设计电路实现 2.7 阶 Liu 混沌系统,其电路原理图如图 5 所示.

由图 5 可得到复频域中 2.7 阶 Liu 混沌系统的方程可表示为

$$\begin{aligned}
 \frac{X(s)}{F(s)} &= \frac{R_4}{C_0 R_5} \left[\frac{Y(s)}{R_6} - \frac{R_2 X(s)}{R_1 R_3} \right], \\
 \frac{Y(s)}{F(s)} &= \frac{R_9}{C_0 R_{10}} \left[\frac{X(s)}{R_7} - \frac{k R_{16} L \{x(t) \dot{x}(t)\}}{R_8 R_{15}} \right], \\
 \frac{Z(s)}{F(s)} &= \frac{R_{13}}{C_0 R_{14}} \left[-\frac{R_{16} Z(s)}{R_{11} R_{15}} + \frac{k L \{x^2(t)\}}{R_{12}} \right], \tag{7}
 \end{aligned}$$

其中 k 为乘法器 AD633 的输出系数,且 $k = 0.1$,取

表 1 分数阶 $\frac{1}{s^\alpha}$ 树形电路单元的电阻值(2 dB)

α	n	$R_1/\text{M}\Omega$	$R_2/\text{M}\Omega$	$R_3/\text{M}\Omega$	$R_4/\text{M}\Omega$	$R_5/\text{M}\Omega$	$R_6/\text{M}\Omega$
0.1	3	0.9517	0.6332	1.363			
0.2	4	0.5454	0.7553	3.307	1.211		
0.3	5	0.3476	1.296	4.854	2.339	0.2196	
0.4	6	0.1845	0.4294	2.080	5.698	0.7819	1.961
0.5	6	0.1749	0.4417	2.480	9.410	0.6957	2.354
0.6	6	0.08291	0.3202	2.594	15.45	0.5436	2.853
0.7	6	0.02169	0.1205	2.016	24.99	0.2806	3.247
0.8	5	0.008586	0.09269	6.325	39.69	0.4900	
0.9	3	1.550	61.54	0.002526			

表 2 分数阶 $\frac{1}{s^\alpha}$ 树形电路单元的电容值(2 dB)

α	n	$C_1/\mu\text{F}$	$C_2/\mu\text{F}$	$C_3/\mu\text{F}$	$C_4/\mu\text{F}$	$C_5/\mu\text{F}$	$C_6/\mu\text{F}$
0.1	3	0.02572	15.77	0.0006468			
0.2	4	5.366	0.1814	0.01262	1.560		
0.3	5	4.927	0.5417	0.02525	2.752	0.3098	
0.4	6	5.023	0.4836	0.02834	0.1456	0.1428	4.854
0.5	6	3.793	0.5827	0.06416	0.1751	0.2292	4.441
0.6	6	2.741	0.5489	0.09585	0.1692	0.2442	3.247
0.7	6	1.917	0.4657	0.1131	0.1500	0.1964	2.019
0.8	5	0.9503	0.6139	0.2349	0.2337	0.2391	
0.9	3	0.7346	0.5221	1.103			

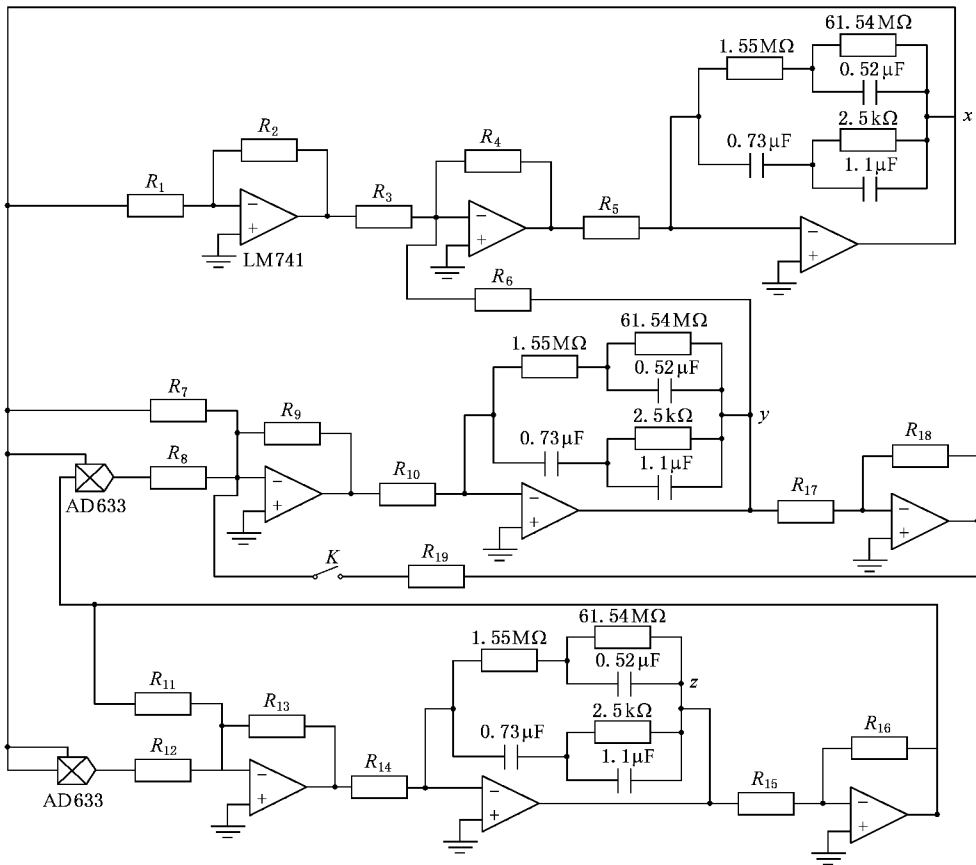


图 5 2.7 阶 Liu 混沌系统的电路原理图

$R_1, R_2, R_3, R_4, R_6, R_7, R_{13}, R_{15}, R_{16} = 10 \text{ k}\Omega, R_5, R_{10}, R_{14} = 100 \text{ k}\Omega, R_9, R_{11} = 40 \text{ k}\Omega, R_8, R_{12} = 2.5 \text{ k}\Omega,$ 利用 EWB 对 2.7 阶 Liu 混沌系统进行仿真, 得相图如图 6 所示。

考虑到实际的电阻电容值达不到图 4 所示电阻电容的精度, 选取 $R_a = 1.55 \text{ M}\Omega, R_b = 62 \text{ M}\Omega, R_c$

$= 2.5 \text{ k}\Omega, C_1 = 0.68 \mu\text{F}, C_2 = 0.5 \mu\text{F}, C_3 = 1.1 \mu\text{F}$ 来做电路实验, 得到相图如图 7 所示。

同理, 根据表 1 和表 2, 分别设计电路可以实现 $\alpha = 0.8-0.1$ (步长为 0.1) 的分数阶 Liu 混沌系统, 对电路进行 EWB 仿真, 发现分数阶 Liu 混沌系统的最低阶数为 0.3, 且具有丰富的混沌特性。

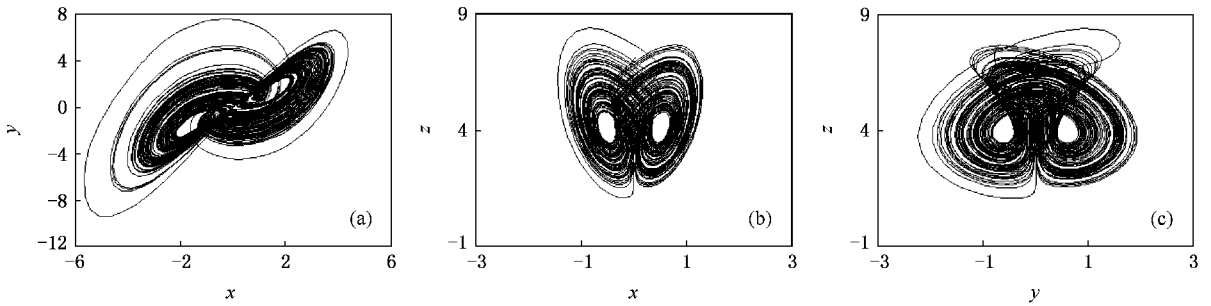


图 6 2.7 阶 Liu 混沌系统得 EWB 仿真相图 (a) $x-y$ (b) $x-z$ (c) $x-w$

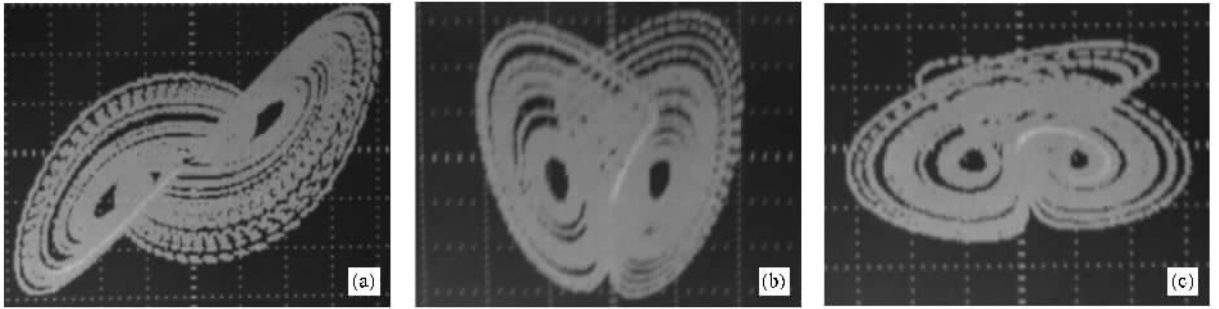


图 7 2.7 阶 Liu 混沌系统的电路实验相图 (a) $x-y$ (1V/div, 2V/div) (b) $x-z$ (2V/div, 1V/div) (c) $x-w$ (2V/div, 2V/div)

5. 分数阶 Liu 混沌系统的线性反馈控制

设分数阶混沌系统为

$$\frac{d^\alpha X}{dt^\alpha} = F(X), \quad (8)$$

采用线性反馈后,其受控系统为

$$\frac{d^\alpha X}{dt^\alpha} = F(X) - KX, \quad (9)$$

其中 $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ 为非线性函数的 N 维向量, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 为 N 维状态向量, $K = \text{diag}[k_1, k_2, \dots, k_n]$ 为线性反馈控制参数, $0 < \alpha \leq 1$

1. 对于分数阶 Liu 混沌系统, 设 $k_1 = 0, k_3 = 0$, 其受控系统可以表示为

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} &= a(y - x), \\ \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} &= bx - czx - k_2 y, \\ \frac{d^\alpha z}{dt^\alpha} &= -dz + hx^2. \end{aligned} \quad (10)$$

显然 $S = (0, 0, 0)$ 是系统(10)的一个平衡点, 系统(10)在 S 处线性化, 其 Jacobia 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ b & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -d \end{bmatrix}. \quad (11)$$

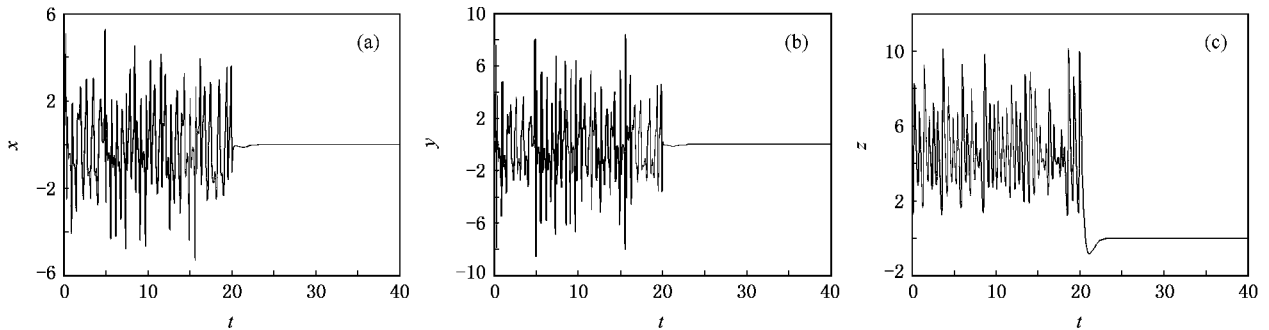


图 8 受控 2.7 阶 Liu 混沌系统的状态变量时间波形 (a) $t-x$ (b) $t-y$ (c) $t-z$

根据分数阶线性系统的稳定性理论^[16],当 $k_2 > 40$ 时,受控系统(10)的特征值 λ_i 满足 $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}$, 其中 $i = 1, 2, 3$, 受控系统(10)能够渐进稳定到平衡点 S , 这样就实现了分数阶 Liu 混沌系统的控制. 取 $k_2 = 50$, 将其应用到 2.7 阶 Liu 混沌系统, 在 $t = 20$ s 时加上控制信号, 数值仿真结果如图 8 所示.

反馈控制器电路如图 9 所示.

根据电路原理图 5, 当 K 闭合, 反馈控制器作用, 根据电路理论, 有

$$k_2 = \frac{R_0 R_{18}}{C_0 R_{10} R_{17} R_{19}}. \quad (12)$$

选取 $R_{17} = 10 \text{ k}\Omega$, $R_{18} = 50 \text{ k}\Omega$, $R_{19} = 40 \text{ k}\Omega$, 电路实验结果如图 10 所示. 可见电路实验结果图 10 与数值仿真结果图 8 相一致, 从而证实了该控制器的有效性和可行性.

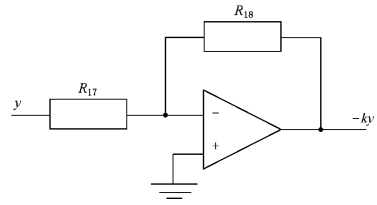


图 9 反馈控制器

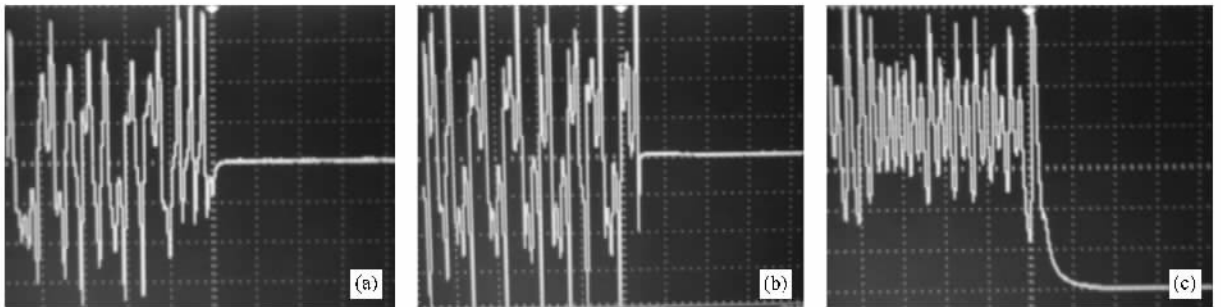


图 10 受控 2.7 阶 Liu 混沌系统电路实验的状态变量时间波形图 (a) $t-x$ (b) $t-y$ (c) $t-z$

6. 结 论

本文应用分数阶微积分理论, 基于波特图的频域近似方法, 设计了新的树型电路单元实现分数阶 Liu 混沌系统, 发现分数阶 Liu 混沌系统存在混沌的

最低阶数为 0.3, 并设计了简单有效的线性反馈控制器, 实现了分数阶 Liu 混沌系统的混沌控制, 数值仿真和电路实验结果证实了树型电路单元的有效性以及线性控制器的可行性. 此外, 本文设计的树型电路单元和控制器具有普适性, 可应用于其他分数阶混沌系统以及超混沌系统的电路实现和控制当中.

- [1] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 113
- [2] Chen G R, Ueta T 1999 *Int. J. Bifurc. Chaos* **9** 1465
- [3] Lü J H, Chen G R 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 659
- [4] Lü J H, Chen G R, Cheng D Z, Serget C 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 2917
- [5] Liu C X, Liu T, Liu L, Liu K 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **22** 1031
- [6] Hartly T T, Lorenzo C F, Qammer H K 1995 *IEEE Trans. CAS-I* **42** 485
- [7] Li C G, Chen G R 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **22** 549
- [8] Lu J G, Chen G R 2006 *Chaos, Solitons and Fractals* **27** 685
- [9] Lu J G 2006 *Phys. Lett. A* **354** 305
- [10] Gao X, Yu J B 2005 *Chi. Phys.* **14** 908
- [11] Chen G R, Lü J H 2003 *Dynamics Analysis, Control and Synchronization of Generalized Lorenz System* (Beijing: Science Press) [陈光荣、吕金虎 2003 Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步(北京:科学出版社)]
- [12] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* (New York: Academic Press)
- [13] Charef A, Sun H H, Tsao Y Y, Onaral B 1992 *IEEE Trans. Auto. Contr.* **37** 9
- [14] Ahmad W M, Sprott J C 2003 *Chaos, Solitons and Fractals* **16** 339
- [15] Lü J H, Chen G R 2006 *Int. J. Bifurc. Chaos* **16** 775
- [16] Matignon D 1996 *In: IMACS, IEEE-SMC, Lille, France* 963

Study on the fractional-order Liu chaotic system with circuit experiment and its control

Chen Xiang-Rong Liu Chong-Xin Wang Fa-Qiang Li Yong-Xun

(School of Electrical Engineering , Key Laboratory of Electrical Insulation and Power Equipment , Xi 'an Jiaotong University , Xi 'an 710049 , China)

(Received 19 May 2007 ; revised manuscript received 14 June 2007)

Abstract

In this paper , applying frequency domain techniques based on Bode diagram , fractional-order Liu chaotic system is studied. An electronic circuit unit of tree shape is designed to realize the fractional-order chaotic Liu system. Circuit experiment of 2.7-order Liu system , as well as simulation results of fractional-order Liu chaotic system with $\alpha = 0.8—0.1$ in step size of 0.1 , verify the circuit unit 's effectiveness , and prove that chaos actually exists in the fractional-order Liu chaotic system with order as low as 0.3. A simple , but effective linear feedback controller is designed to realize the chaotic control of fractional-order Liu chaotic system.

Keywords : fractional-order Liu system , circuit experiment , chaos control

PACC : 0545