

# 超混沌 Lü 系统的电路实现<sup>\*</sup>

刘扬正<sup>†</sup>

(南京工程学院非线性物理研究所, 南京 211167)  
(2007 年 5 月 31 日收到, 2007 年 8 月 1 日收到修改稿)

在三维 Lü 系统的基础上增加一维状态, 构建了一个新的四维超混沌 Lü 系统, 简要地分析了该系统平衡点的性质、超混沌吸引子的相图、Lyapunov 指数和 Lyapunov 维数等特性, 并设计了一种实现四维超混沌系统的实际电路. 硬件电路实验表明, 超混沌 Lü 系统具有丰富的动力学行为.

关键词: 超混沌 Lü 系统, Lyapunov 指数, 电路实现

PACC: 0545

## 1. 引 言

2002 年, Lü 和 Chen 以 Lorenz 系统的为基础<sup>[1]</sup>, 构建了一个新的三维自治混沌系统——Lü 混沌系统, 作为广义 Lorenz 系统族的成员之一<sup>[2-4]</sup>, 因其具有丰富的动力学行为, 而成为研究者广泛关注的对象<sup>[5-12]</sup>. 但 Lü 混沌系统的电路实现鲜见文献报道. 最近, 以广义 Lorenz 系统族中的系统为基础, 采用拓展系统变量的方法, 构建了多种形式的超混沌系统<sup>[13-18]</sup>. 本文根据三维 Lü 混沌系统, 采用系统变量扩展的方法构建四维超混沌 Lü 系统, 分析了该系统平衡点的性质、超混沌吸引子的相图、Lyapunov 指数和 Lyapunov 维数等特性, 设计了一种实现四维超混沌 Lü 系统的实际电路. 电路实验结果表明, 四维超混沌 Lü 系统具有丰富的动力学行为.

## 2. 系统构成与实验

Lü 系统<sup>[1]</sup>是一个典型的三维自治非线性系统, 将其变量延伸一维并反馈回原系统, 构成四维系统, 为了电路实现时能满足运算放大器和模拟乘法器对输入电压限制的要求, 将四维混沌系统方程表述为以下形式:

$$\dot{x} = -ax + ay + w,$$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= by - 4xz, \\ \dot{z} &= -cz + 4x^2, \\ \dot{w} &= dy, \end{aligned} \quad (1)$$

式中正常数  $a, b, c, d$  为系统参量, 与三维 Lü 系统比较, 四维系统增加了一维状态  $w$ , 并将系统变量  $w$  反馈作用在系统的第一个方程上, 系统的非线性函数与三维 Lü 系统有所差异, 第三个方程式中的  $xy$  被  $x^2$  取代.

四维系统具有唯一的平衡点  $P^0(0, 0, 0, 0)$ , 四维系统的 Jacobian 矩阵在平衡点  $P^0$  处的特征值为  $\lambda_1 = -a, \lambda_2 = b, \lambda_3 = -c, \lambda_4 = 0$ , 四个特征值皆为实数, 且有一个特征值大于零, 两个特征值小于零, 一个特征值等于零, 因而平衡点  $P^0$  是不稳定的鞍结点. 系统参数 ( $a = 10, b = 5, c = 3$ ) 保持不变, 系统变量  $y$  随系统参数  $d$  变化的分岔图如图 1 所示.

图 2 为系统参数 ( $a = 10, b = 5, c = 3$ ) 保持不变, 系统的 Lyapunov 指数随系统参数  $d$  变化的情况. 当系统参数  $d \in (0, 1.0267)$ , 系统有两个正的 Lyapunov 指数 ( $LE_1 > 0, LE_2 > 0$ ), 因此四维系统处于超混沌状态; 当系统参数  $d \in (1.0267, 3.7192)$ , 系统只有一个正的 Lyapunov 指数 ( $LE_1 > 0$ ), 此时四维系统处于混沌状态; 当系统参数  $d \in (3.7192, 4.6638)$ , 系统没有正的 Lyapunov 指数, 此时四维系统处于多周期稳定状态; 当系统参数  $d \in (4.6638, 6.4943)$ , 系统的 Lyapunov 指数 ( $LE_1 = LE_2 = 0$ ), 四维系统处于拟

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号 90405011), 江苏省高校自然科学基金(批准号 07KJD120081), 南京工程学院自然科学基金(批准号 KXJ07068)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: lyz64@njit.edu.cn, lyz\_6410@163.com

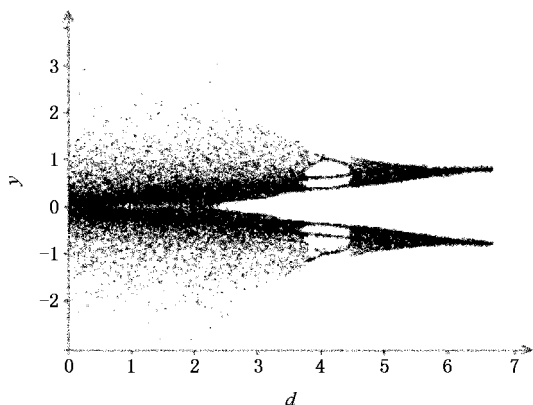


图 1 超混沌 Li 系统的分岔图

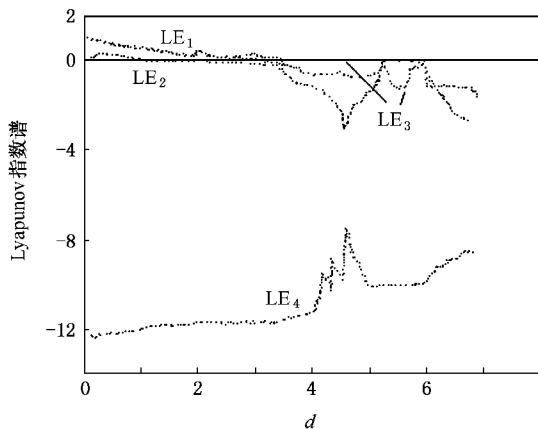


图 2 四维 Li 系统的 Lyapunov 指数谱

周期状态 ;当系统参数  $d > 6.4943$  ,系统没有正的 Lyapunov 指数 ,系统处于不对称的二周期状态.

系统参数为 ( $a = 10 , b = 5 , c = 3 , d = 0.5$ ) 时 ,系统的 Lyapunov 指数 ( $LE$ )  $LE_1 = 1.0596 , LE_2 = 0.1285 , LE_3 = 0 , LE_4 = -12.1647$  ,系统有两个正的 Lyapunov 指数 ,因此四维系统处于超混沌状态. 系统的 Lyapunov 维数为

$$D_L = j + \frac{1}{|LE_{(j+1)}|} \sum_{i=1}^j LE_i$$

$$= 3 + \frac{LE_1 + LE_2}{|LE_4|}$$

$$= 3 + \frac{1.0596 + 0.1285}{|-12.1647|} = 3.0977.$$

从系统相图(图 4)和分形维数可以看出,系统式(1)是超混沌系统且明显具有分形特征.

根据(1)式我们设计了一个能实现四维超混沌系统功能的电路,如图 3 所示. 图中的运算放大器皆为 LF324, 电路中各元件的数值如图中标示, 它们由(1)式中系统的参数决定. 由于系统中的非线性函数都是系统变量的二次函数,可由模拟乘法器实现. 模拟乘法器选用 AD633JN.

根据图 3 所示的电路图制作硬件电路,系统参数为( $a = 10 , b = 5 , c = 3 , d = 0.5$ )时,硬件电路在模拟示波器上观测到四维超混沌 Li 系统的相图如图 4 所示,图中的坐标系设置如下:图 4(a)  $x-y$  (b)  $y-z$ ,

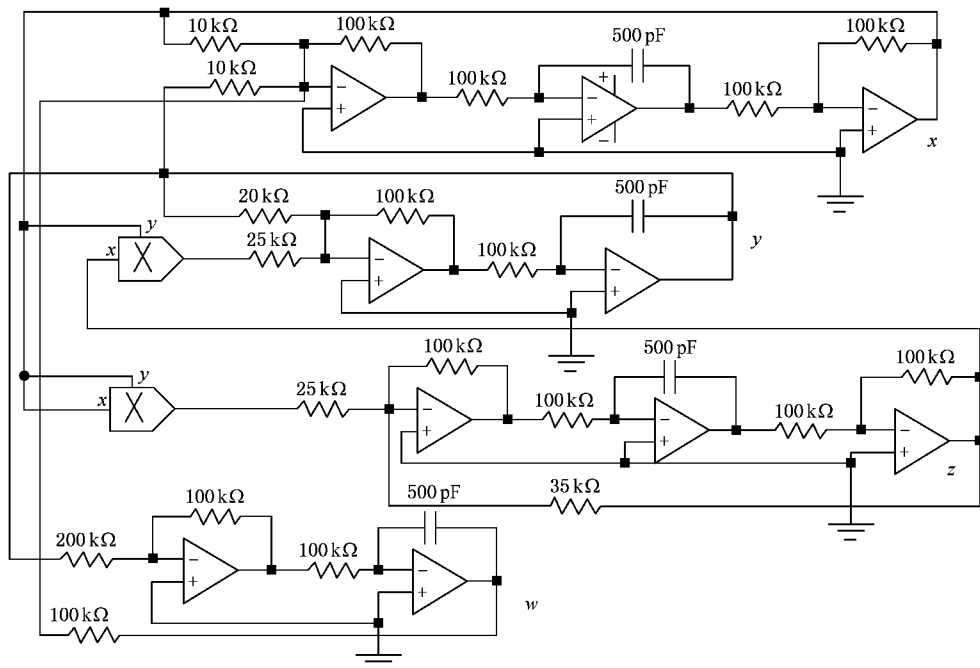


图 3 四维超混沌 Li 系统实际电路图

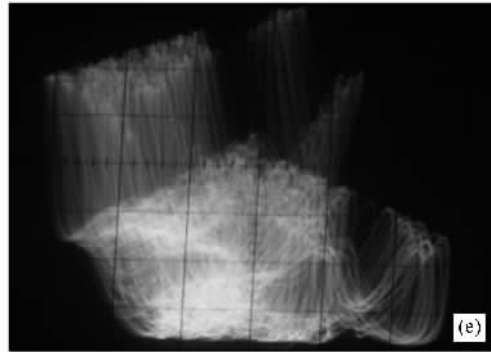
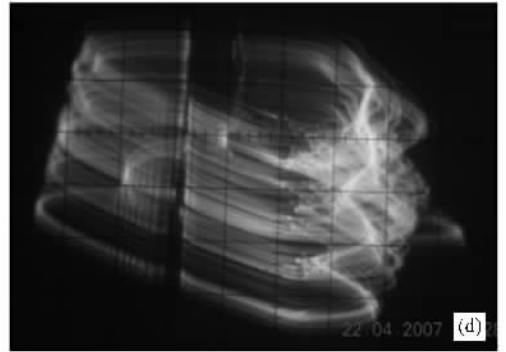
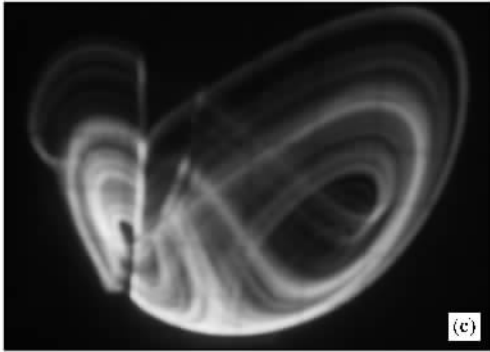
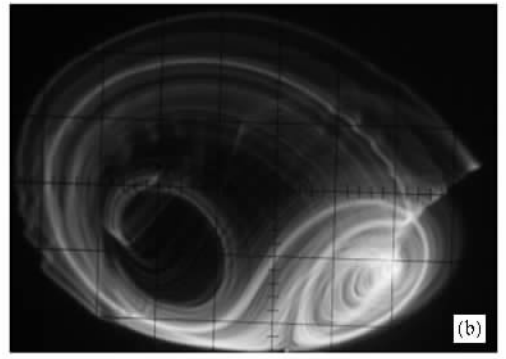
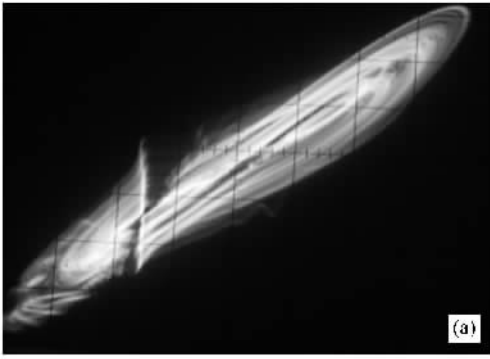
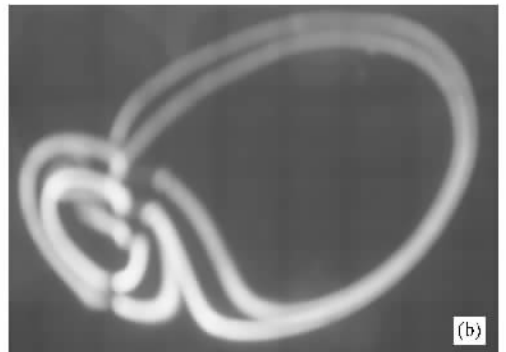


图 4 四维超混沌 Lü 系统实际电路相图 (a)  $x-y$  (1 V/格, 1 V/格); (b)  $y-z$  (1 V/格, 0.5 V/格); (c)  $x-z$  (1 V/格, 0.5 V/格); (d)  $x-w$  (1 V/格, 0.5 V/格); (e)  $z-w$  (0.5 V/格, 0.2 V/格)

(c)  $x-z$  (d)  $x-w$  (e)  $z-w$ .

通过可变电阻改变系统参数  $d$  的值, 可以得到

四维超混沌 Lü 系统状态随参数变化的相图, 如图 5 所示, 系统历经不对称的周期态到达超混沌状态.



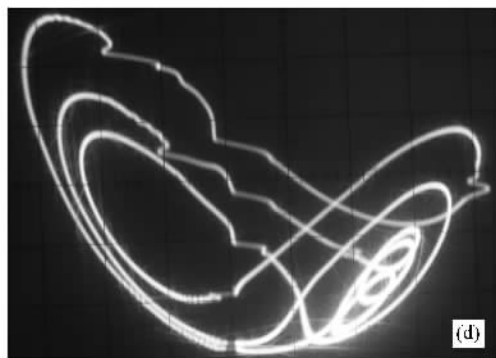


图 5 四维超混沌 Lü 系统稳定周期态的相图  $x-z$  (1 V/格 0.5 V/格)

实验发现,当四维超混沌 Lü 系统处于超混沌状态时,在系统参数保持不变的情况下,系统的动力学行为会在两个状态间随机跳跃,一段时间系统在图

6 所示的左图状态下演化,某个时刻,系统会突变到图 (b) 所示的状态下演化,这种状态间的跳变较为频繁,一般在几秒钟就会发生一次。

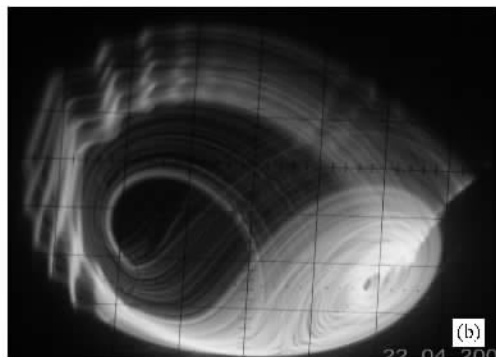
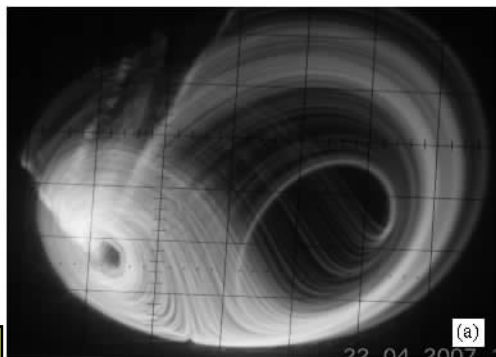


图 6 四维超混沌 Lü 系统发生跳变的相图  $y-z$  (1 V/格 0.5 V/格)

### 3. 结 论

本文构建的四维超混沌 Lü 系统结构简单,只包

含两项系统变量乘积的二次非线性项,实现四维超混沌 Lü 系统的实际电路简便. 实际硬件电路的实验结果表明,四维超混沌 Lü 系统具有丰富的动力学行为.

- [ 1 ] Lü J , Chen G 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 659
- [ 2 ] Ueta T , Chen G 2000 *Int. J. Bifur. Chaos* **10** 1917
- [ 3 ] Lü J , Chen G , Zhang S 2002 *Chaos , Solitons & Fractals* . **14** 669
- [ 4 ] Lü J , Chen G , Cheng D , Celikovsky 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 2917
- [ 5 ] Wang G Y , Qiu S S , Li H W , Li C Z , Zheng Y 2006 *Chin. Phys.* **15** 2872
- [ 6 ] Wang J Z , Chen Z Q , Yuan Z Z 2006 *Chin. Phys.* **15** 1216
- [ 7 ] Park J H 2006 *Chaos , Solitons & Fractals* **27** 549
- [ 8 ] Gong X F , Lai C H 1999 *Chaos , Solitons & Fractals* **11** 1231
- [ 9 ] Yassen M T 2005 *Chaos , Solitons & Fractals* **23** 131
- [ 10 ] Ning D , Lu J A 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4590 ( in Chinese ) [ 宁 娣、陆君安 2005 物理学报 **54** 4590 ]
- [ 11 ] Wang G Y , Qiu S S , Xu Z Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3295 ( in Chinese ) [ 王光义、丘水生、许志益 2006 物理学报 **55** 3295 ]
- [ 12 ] Min F H , Wang Z Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4026 ( in Chinese ) [ 闵富红、王执铨 2005 物理学报 **54** 4026 ]
- [ 13 ] Wang J Z , Chen Z Q , Yuan Z Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3956 ( in Chinese ) [ 王杰智、陈增强、袁著祉 2006 物理学报 **55** 3956 ]
- [ 14 ] Wang F Z , Qi G Y , Chen Z Q , Zhang Y H , Yuan Z Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4005 ( in Chinese ) [ 王繁珍、齐国元、陈增强、张宇辉、袁著祉 2006 物理学报 **55** 4005 ]
- [ 15 ] Liu Y Z , Jiang C S , Lin C S , Jiang Y M 2007 *Chin. Phys.* **16** 660
- [ 16 ] Wang F Q , Liu C X 2006 *Chin. Phys.* **15** 1971
- [ 17 ] Wang F Q , Liu C X 2006 *Chin. Phys.* **15** 963
- [ 18 ] Liu L , Su Y C , Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3933 ( in Chinese ) [ 刘 凌、苏燕辰、刘崇新 2006 物理学报 **55** 3933 ]

# A new hyperchaotic Lü system and its circuit realization <sup>\*</sup>

Liu Yang-Zheng

( *Institute of Nonlinear Physics , Nanjing Institute of Technology , Nanjing 211167 , China* )

( Received 31 May 2007 ; revised manuscript received 1 August 2007 )

## Abstract

The four-dimensional hyperchaos system is built by adding an additional state to the three-order Lü system. Some of its basic dynamical properties are studied briefly , such as the feature of equilibrium , the hyperchaos attractor , Lyapunov exponent and fractal dimension. An electronic circuit is designed to realize the four-dimensional hyperchaos system. Moreover , a novel analogue circuit is realized for the verification of various attractors .

**Keywords** : hyperchaotic Lü system , Lyapunov exponent , analogue circuit

**PACC** : 0545

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 90405011 ) and the Natural Science Foundation of Jiangsu Province , China ( Grant No. 07KJD120081 ) and the Natural Science Foundation of Nanjing Institute of Technology , China ( Grant No. KXJ07068 ).